匈牙利奥林匹克数学竞赛题解

〔匈〕Й. 库尔沙克　Д. 诺依柯姆　Д. 哈约希　Я. 舒拉里　编

胡湘陵　译

科学普及出版社

内 容 提 要

本书收集了1894年至1974年匈牙利奥林匹克数学竞赛的两百多个试题及解答，一题多解，并有理论说明。虽然用中学生学过的初等数学知识就可以解答这些试题，但是它又涉及许多高等数学的课题。参阅此书不仅有助于锻炼逻辑思维能力，对进一步学习高等数学也颇有好处。

本书可供中学生、中学教师及广大知识青年学习与参考。

Венгерские математические олимпиады

Й. Кюршак Д. Нейкомм
Д. Хайош Я. Шурани

МИР МОСКВА 1976

* * *

匈牙利奥林匹克数学竞赛题解

胡湘陵 译

*

科学普及出版社 出版（北京西郊友谊宾馆）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国人民解放军第七二一二工厂印刷

*

开本：787×1092毫米1/16 印张：20 字数：510千字

1979年12月第一版 1979年12月第一次印刷

印数：1－300,000册 定价：1.40元

统一书号：13051·1001 本社书号：0001

目　　录

一、1894年试题及解答

1．证明：对于同样的整数 x 和 y，表达式

$$2x+3y \quad 和 \quad 9x+5y$$

能同时被17整除.

【证明1】

1） 首先我们来弄清楚：如果表达式 $2x+3y$ 等于某个任意给定的整数 k，x 和 y 可以取怎样的整数值. 假设

$$2x+3y=k, \tag{1}$$

这时

$$x=\frac{k-3y}{2}=-y+\frac{k-y}{2}. \tag{2}$$

因此，仅当表达式 $\frac{k-y}{2}$ 等于某个整数 s 时，x 才能是整数. 由 $\frac{k-y}{2}=s$ 得

$$y=k-2s,$$

再由等式（2）即得

$$x=-y+s=3s-k.$$

因此仅当

$$x=-k+3s, \quad y=k-2s \tag{3}$$

时整数 x 和 y 才能满足等式（1），其中 s 是任意的整数.

反之，当 s 取任意的整数时，我们可以由公式（3）得到整数 x 和 y，它们满足等式（1）.

2） 用类似的方法我们可以求得：如果

$$9x+5y=l, \tag{4}$$

其中 l 是某个给定的整数，那么 x 和 y 能取什么整数值.

由等式（4）解出 y，得

$$y=\frac{l-9x}{5}=-2x+\frac{l+x}{5}. \tag{5}$$

因此，仅当表达式 $\frac{l+x}{5}$ 等于某个整数 t 时，y 才能取整数值. 但这时

$$x=5t-l,$$

再由等式（5）即得

$$y=-2x+t=-9t+2l.$$

因此仅当

$$x=5t-l, \quad y=-9t+2l \tag{6}$$

时，两个整数 x 和 y 才满足等式（4），其中 t 是任意整数.

反之，当t取任意的整数时，我们可以由公式（6）求得整数x和y,它们满足等式(4).

3）由1)中的证明知，若表达式$2x+3y$是17的倍数(即等于形如$17n$的整数,这里n是任意的整数)，则x和y一定可以表示成

$$x=-17n+3s,\qquad y=17n-2s$$

的形式，其中s是任意的整数.

但这时

$$9x+5y=9(-17n+3s)+5(17n-2s)=17(-4n+s).$$

因此表达式$9x+5y$所取的值也是17的倍数.

同样，从2)中的证明知，使表达式$9x+5y$为17的倍数的整数x和y，可以表示成

$$x=5t-17m,\qquad y=-9t+34m.$$

这样一来，

$$2x+3y=17(-t+4m)$$

也是17的倍数★.

【证明2】为了简单起见，我们记

$$u=2x+3y,\qquad v=9x+5y,$$

于是

$$3v-5u=17x.$$

上一关系式可以表示成

$$3v=5u+17x,\tag{1}$$

$$5u=3v-17x.\tag{2}$$

如果x和y是使u能被17整除的整数，那么由关系式(1)，$3v$也能被17整除.因为乘积$3v$的第一个因子不能被素数17整除，所以欲使整个乘积能被17整除，仅仅只有在v能被17整除时才有可能.

同样可以证明：如果x和y是使v能被17整除的整数，那么由关系式(2)，u也能被17整除★.

§1. 整数的可除性及分类[1]

如果对于某个整数a和不为零的整数b，可以找到这样一个整数k，使得等式$a=bk$成立，那么就说a能被b整除. 在这种情况下，数a叫做数b的**倍数**，数b叫做数a的**约数**.

整数a，b，k并不一定是正的，它们之中的任何一个都可以是负的，而数a和k甚至可以为零.

如果a能被b整除，而b能被c整除，那么a能被c整除.

如果a和a'能被b整除，那么$a+a'$和$a-a'$也能被b整除.

如果b是不为零的整数a的约数，那么b的**绝对值**不能超过a的**绝对值**[2]. 因此，每一个不为零的整数只有有限个不同的约数. 例如，数12的约数为±1，±2，±3，±4，±6，±12.

通常在求整数的约数时，仅限于求它的**正**约数，因为所有的负约数可以通过改变正约数

---

[1] 为了进一步理解上述题解，这里给出相应的数学知识，下同.

[2] 正数或零的绝对值就是它自己。负数的绝对值是一个正数，和原来的数仅仅是符号不同. 数a的绝对值用$|a|$来表示。例如，$|5|=|-5|=5$.

的符号而得到.

正单位和负单位（即数 + 1 和 − 1）除了 1 以外，没有其它的正约数．所有绝对值大于 1 的整数至少有两个正约数：它自身的绝对值和 1．

如果绝对值大于 1 的整数 p，除了 $|p|$ 和 1 以外，没有其它的正约数，那么 p 就叫做**素数**.

如果某个绝对值大于 1 的整数 a，至少有一个不同于 $|a|$ 和 1 的正约数（我们用 b 表示这个约数），那么 a 可以表示成 $a=kb$ 的形式，这里的 b 和 k 表示整数，且满足不等式 $1<|k|<|a|$. 这样一来，在这种情况下，数 a 可以表示成两个整数乘积的形式，这两个整数的绝对值大于 1 而小于 $|a|$. 这样的数 a 叫做**复合数**.

零可以被任何整数整除.

这样一来，整数可以被分成四类：

正单位和负单位，

素数，

复合数，

零（构成单独的一类）.

数论研究数的可除性和许多与它相近的问题．它的基础早在欧几里得的书，《几何原本》的卷 Ⅶ－Ⅸ 中就奠定了.

§ 2． 素数的一个重要性质

第 1 题的证法 2 利用了下面的素数的性质.

1） **如果两个整数中的任何一个都不能被某一个给定的素数 p 整除，那么它们的乘积也不能被 p 整除.**

为了证明这个论断，只要研究自然数[1]就行了，因为一方面，任何数 N 和 $-N$ 具有相同的约数，另一方面，任何一个数的负约数乘上（－1）以后就变成了它的正约数.

于是，我们可以把上述论断变成下面的形式来进行证明：

如果某一个自然数 a 不能被素数 p 整除，那么乘积 ab 仅当 p 能除尽第二个因子 b 的时候才能被 p 整除.

于是，假设给定了正素数 p 和某一个不能被 p 整除的数 a. 设 B 是自然数 b 的集合，这里的 b 是那些使乘积 ab 能被 p 整除的自然数（显然，集合 B 包含数 p 本身和它的倍数）．我们来求包含在 B 中的最小的数．这样的数是存在的．事实上，只要在数

$$a\cdot 1,\quad a\cdot 2,\quad \cdots,\quad a\cdot(p-1),\quad a\cdot p \tag{1}$$

之中寻求能被 p 整除的数就行了．显然，$a\cdot p$ 一定能被 p 整除．如果在序列（1）中，$a\cdot m$ 是第一个能被 p 整除的数，那么 m 是集合 B 中最小的数.

我们来证明，一方面，**所有包含在 B 中的数都能被 m 整除**，而另一方面，数 **m 只可能是素数 p.**

事实上，假设属于集合 B 的某一个数 b 不能被 m 整除．设在比 b 小的 m 的倍数中，mq 是最大的，即

$$b=mq+r,$$

---

[1] 通常把正整数叫做自然数．有点名气的数学家布尔巴吉还把 0 算作自然数．在我们的命题里，任何一个数都不会是 0，因为已知它们不能被 p 整除，而 0 可以被任何数整除．—— 俄译编辑注.

其中 r 表示数 1，2，…，$m-1$ 中的某一个．我们来证明，在这种情况，小于 m 的数 r 应该包含在集合 B 中，尽管这与数 m 的定义相违背．事实上，将等式两边乘以 a，我们得到

$$ab=amq+ar,$$

由此

$$ar=ab-(am)\cdot q.$$

右端的第一项能被 p 整除．第二项也能被 p 整除，因为括弧中的乘积能被 p 整除．因此，ar 也能被 p 整除，但这是不可能的，因为 $0<r<m$，而在和 a 的乘积为 p 的倍数的正整数中，m 是最小的数．

所得到的矛盾证明了，任何一个属于 B 的数 b 应该能被 m 整除．

因为数 p 本身属于集合 B，所以根据上面所证明的，p 能被 m 整除．但是 p 只有两个正约数：1 和 p，而 $m\neq 1$，因为根据假设数 $a\cdot 1=a$ 不能被 p 整除．因此必须满足等式 $m=p$．这就证明了第二个断言，因而证明了上面所说的定理．

1）中的定理可以有下面的推广．

2） **如果数**

$$a,\ b,\ c,\ d,\ \cdots$$

中的任何一个数都不能被素数 p 整除，那么乘积

$$ab,\ abc=(ab)c,\quad abcd=(abc)d,\ \cdots$$

中的任何一个都不能被 p 整除．

3） 用类似于我们选取数 m 的方法可以证明下面简单的论断，我们今后将不止一次地用到它．

如果 A 是非空的集合，它的元素是某些自然数，那么在 A 所包含的数中，有一个最小的数．

事实上，如果 a 是属于集合 A 的任一自然数，那么当我们依次来研究数

$$1,\ 2,\ \cdots,\ a-1,\quad a$$

时，我们会遇到（不迟于第 a 次）第一个属于集合 A 的数，而这个数将是构成集合 A 的所有数中最小的数．

应该特别着重指出，我们是在由自然数组成的集合 A 中寻求最小的数．如果不是这样，例如，在所有的（不一定是正的）偶数中，或者是在所有的倒数为自然数（不一定是整数）的数中寻求最小的数，那么是不可能找到最小数的．

§3．数学归纳原理[1]

1） 在§2中，下面的论断——称之为最小数原理——占有重要的地位．

如果 A 是非空的集合，它的元素是某些自然数，那么在 A 所包含的数中有最小的数．

我们回想一下这个论断是怎样被证明的．因为这个集合 A 是非空的，所以必存在一个属于它的自然数 a．依次来看自然数 1，2，…，a．在这些数中，第一个属于 A 的数将是这个集合中最小的数．

对这个论证的完善性很容易产生怀疑．特别是，为什么从 1 开始我们一定能够到达任一给定的自然数 a？自然地会回答："因为只有有限个小于 a 的自然数"．但这样的回答是不

[1] 由俄译编辑补加的．

能令人满意的，因为“有限个数”意味着什么呢？借口这是“实践经验的推广”几乎也是无济于事的．在日常生活中，我们不仅不和“任何给定的”自然数打交道，甚至也不和很大的数打交道．(例如，谁数过9^{9^9}个物体？我想，即使是在十亿个数的范围内，也不会有人依次选取这些自然数的．）因此，在这些骤然看来没有什么不对的话中，例如“任一自然数 a”这句话，已经不明显地包含了比粗糙的感性经验更多的什么东西．这里有巨大的质的飞跃：从若干（不是非常之多）具体的、个别的有限集合（一匹马，两只皮靴，三棵树）中进行抽象，我们得到无穷的自然数序列的概念，它的项使我们有可能讨论任一有限集合的元素的个数❶．阿基米德的《沙粒的计算》是一部优秀的著作，它说明了我们可以想像并说出任意大的自然数．命数法（即关于自然数命名的学说）曾长时间地作为一种单独的算术运算不是没有原因的（例如，*M*·*B*·罗蒙诺索夫学习过的*Л*·马格里兹基的《算术》就是这样的）．

我们的怀疑好像是牵强附会的：这一切是如此显然的或几乎是显然的，在繁琐的论证上花费时间和提出荒诞的问题是值得的吗？但是，实际上所涉及到的是非常本质的问题：关于数学论证的基本原理．自然数以及它的性质在数学的所有分支中都要用到，而我们甚至于并不总是明显地意识到这一点的．

2） 数学家在进行证明时所采用的法则，要求精确地叙述原始命题——公理，而所有其它命题应该按照逻辑法则从它们推出来．在公理中，要指明某种数学理论中必不可少的**对象**以及这些对象所满足的必不可少的**关系**．最常用的自然数列的一组公理是由意大利数学家皮亚诺（1852—1932）提出的．他成功地指出了，从下面最简单的关系出发：a紧跟在b后面或b紧靠在a前面（在这里说“$a=b+1$”还为时过早，因为加法还没有定义），可以定义所有的算术运算，并能证明自然数的一切性质．皮亚诺公理是：

1．在自然数中有这样一个数，没有任何自然数紧靠在它的前面，这个数我们用1来表示；

2．对于任何一个自然数，有而且只有一个自然数紧跟在它后面；

3．任何一个自然数有不多于一个紧靠在它前面的数；

4．（归纳公理）任何一个自然数集合A，若：

① 1属于A；

②如果某个自然数属于A，那么紧跟在它后面的自然数也属于A，

则A和整个自然数集合重合．

正象我们已经指出的，这四条公理对于建立整个算术已经足够了（见《初等数学百科全书》，卷1，国家技术出版社，莫斯科，1951❷）．因此在今后，代替“紧跟在n后面的自然数”，我们将简单地写作$n+1$．

3） 归纳公理用精确的逻辑术语表达了自然数列的这样一种性质，这种性质在直观上用“从1开始，一个一个地选取可以到达任何一个自然数”这句话来表达．它是一种形式上方便的办法，使得能够一下子把整个自然数的无穷集合引入到论证中去．这多半借助于数学归纳原理（也叫做数学归纳法或完全归纳法）来实现．

数学归纳原理．假设$P(n)$是依赖于自然数n作为参数的命题．如果$P(1)$成立，且由$P(n)$成立可推出$P(n+1)$成立，那么$P(n)$对所有的自然数n都成立．

为了从归纳公理引出数学归纳原理，我们用A表示使$P(n)$成立的自然数n的集合．这

❶ 为了回答什么是“有限集合”这个问题，应该比较深入地研究数学的基础（可见§60）．

❷ 还可参考艾·兰道著《分析基础》．有中译本（刘绂堂译）．——中译者注．

时A包含1，因为$P(1)$成立，且若A包含n，那么$P(n)$成立，这时$P(n+1)$也成立，这意味着A包含紧跟在n后面的自然数$n+1$. 根据归纳公理，A包含所有的自然数，即$P(n)$对所有的n都成立.

命题$P(1)$如果成立，叫做**归纳基础**. 关于$P(n)$成立的假设叫做**归纳假设**.

作为例子，我们证明下面的命题.

$P(n)$：**自然数n或者是1，或者是跟在某一个自然数后面的数.**

$P(1)$（归纳基础）显然成立. 假设$P(n)$成立（归纳假设）. 这时n是某一个自然数，而$n+1$是紧跟在它后面的数. 这就意味着$P(n+1)$成立. 根据归纳原理，$P(n)$对所有的n都成立.

在这本书中，我们以后会遇到许多应用归纳原理的例子. 现在我们感兴趣的是下面的事实：前面所说的最小数原理和归纳公理是等价的并可以代替它.

4) **由归纳公理推出最小数原理**. 假设A是自然数列的某一个集合. 我们假设在这个集合中没有最小的数. 我们构造一个集合M，它含有这样的自然数m，如果所有满足条件$n\leqslant m$的自然数n不属于集合A.❶ 这时：

1属于M；不然的话，1应该属于A并且是A中最小的数.

如果自然数m属于M，那么所有满足条件$n\leqslant m$的自然数n不属于A. 因而数$m+1$也不可能属于A，因为不然的话，它就是A中最小的数. 因此$m+1$也属于M.

根据归纳公理，M和整个自然数集合重合，但若A是非空的时候，这是不可能的.

5) **由最小数原理推出归纳公理**. 设M是归纳公理的条件中所说的集合. 我们取补集A，它由所有不属于M的自然数构成. 如果M不和整个自然数列重合，那么A是非空的. 根据最小数原理，在A中有最小数a. 因为1属于M，所以$a\neq1$. 根据上面所证明的，a紧跟在某一个自然数n的后面. 因为a是A中最小的数，所以n不属于A，于是n属于M，而紧跟在它后面的自然数a不属于M，这和集合M的定义相矛盾. 这个矛盾表明，A是空的，于是M和整个自然数集合重合.

2. 给定一个圆和圆内的点P和Q. 求作内接于这个圆的直角三角形，使它的一个直角边通过点P，另一个直角边通过点Q. 点P和Q在什么位置时，本题无解？

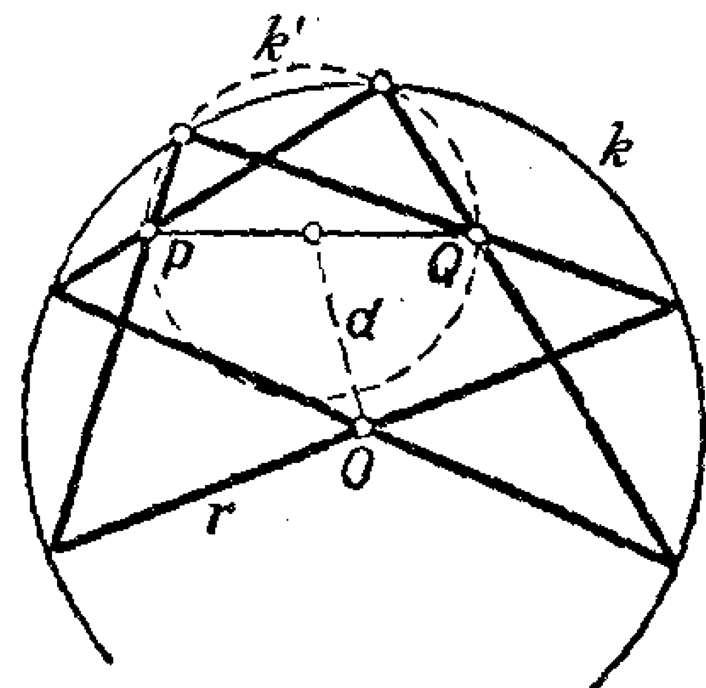


图 1

【解】对线段PQ所张的角为直角的点的轨迹是以PQ为直径所画的圆k'（图1）. 圆k'和已知圆k的交点即是内接于圆k且**直角边或直角边的延长线通过点**P和Q的直角三角形的顶点. 为了使得直角边本身而不是它们的延长线通过点P和Q，这两个点应该在圆k内.

如果点P和Q在圆k内，圆k和k'有几个交点，本题就有几个解，因此，

1) 如果$\frac{1}{2}PQ>r-d$（其中r是圆k的半径，d是圆k的圆心到线段PQ的中点的距

❶ 注意，我们认为所有的算术运算已经建立了. 特别是，我们已经会比较自然数的大小. 1是所有自然数中最小的数.

离),则有两个解.

2) 如果$\frac{1}{2}PQ=r-d$,则只有一解.

3) 如果$\frac{1}{2}PQ<r-d$,则无解.因为圆k'的圆心到圆k的最短距离等于$r-d$.

3.三角形的边构成公差为d的等差数列,三角形的面积等于S.求三角形的边长和角.再对$d=1$,$S=6$这个特殊情况,求解本题.

【解】我们将三角形的边表示成$a=b-d$,b,$c=b+d$,这里$0<d<b$.将表达式

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{3b}{2},\qquad p-a=\frac{b}{2}+d,$$

$$p-b=\frac{b}{2},\qquad p-c=\frac{b}{2}-d$$

代入海伦公式

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c),$$

我们得到

$$S^2=\frac{3b^2}{4}\left(\frac{b^2}{4}-d^2\right).$$

把它看作是(关于b^2的)二次方程,我们解得

$$b^2=2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4S^2}{3}}\right).$$

开平方(两个根号都取正号,因为b是三角形的一个边长,所以是正的),我们得到

$$b=\sqrt{2\left(d^2+\sqrt{d^4+\frac{4S^2}{3}}\right)},\qquad a=b-d,\qquad c=b+d.$$

a及b所对的角α和β一定是**锐角**❶,且

$$S=\frac{bc}{2}\sin\alpha,\qquad S=\frac{ac}{2}\sin\beta.$$

最后,c所对的角$\gamma=180°-(\alpha+\beta)$.

如果$d=1$,$S=6$,那么从上面所得到的公式求得$b=4$.于是$a=3$,$c=5$,且

$$\sin\alpha=\frac{3}{5},\qquad \sin\beta=\frac{4}{5}=\cos\alpha.$$

因此,$\alpha=36°52'$,$\beta=90°-\alpha=53°8'$,$\gamma=90°$.

---

❶ 事实上,在三角形中,最大的边所对的角才可能是钝角.在我们的情形中,只有边c所对的角才可能是钝角.——俄译者注

二、1895年试题及解答

4．有两类卡片，每类卡片都有无穷多张．试证：从这些卡片中，有 $2(2^{n-1}-1)$ 种方法挑选出这样的组，它由 n 张有序的卡片组成，而且每一类卡片至少含有一张．

【证明】我们约定认为，包含在一组中的卡片编了号码，并且我们来研究由 n 张卡片构成一组的所有可能的方法，而两种"不允许的"情况（整个一组全由一类卡片构成）以后再除去．

当 $n=2$ 时，可以有下面一些组：

$$AA,\quad AB,\quad BA,\quad BB, \tag{1}$$

这里 BA 表示这样的组，第一张卡片是 B 类的，第二张卡片是 A 类的．

当 $n=3$ 时，由两类不同卡片可以构成 $2\times4=8$ 个有序组．为了得到这些组，必须对(1)中所列举的两个字母的有序组添加第三个字母（A 或 B）．由三张卡片构成的组的全部情况看来是

$$AAA,\quad ABA,\quad BAA,\quad BBA,$$
$$AAB,\quad ABB,\quad BAB,\quad BBB.$$

例如，字母组合 BAB 表示这样的组：第一张卡片是 B 类的，第二张卡片是 A 类的，第三张卡片又是 B 类的．

当每一组的卡片数增加 1 张时，由两类卡片构成有序组的个数增加一倍．因此，有 2^n 种由 n 张两类卡片构成的不同有序组．这些组对应于**由两个字母 A 和 B 构成的 n 位重复排列**.★

从总的组数中除去本题条件不允许的两个组（完全由一类卡片构成的组），我们得到，对于 n 张两类卡片构成的组来说，所允许的有序组的总个数等于 2^n-2．不满足本题条件的两个卡片组对应于同一个字母 A 或 B 的 n 位重复排列．

如果在由两个字母 A 和 B 的 n 位重复排列中，用数字 1 来代替 A，用数字 2 来代替 B，那么本题断言可以叙述如下：

有 2^n-2 个不同的 n 位数，这些 n 位数是由数字 1 和 2 构成的，且在这些 n 位数中，两个数字都至少出现一次．

§4．关于重复排列

不难看出，前面在计算字母 A 和 B 的 n 位可重复排列的排列个数时，所得到的结果是下面比较一般的断言的特殊情况：

m 个元素的 n 位可重复排列的排列个数等于 m^n．

关于重复排列的比较详细的知识不是没有用处的，尽管它们和题 4 没有直接的关系．

对于 m 个元素，用所有可能的方法把它们放在 n 个编了号的位置上，我们便得到 m 个给定元素的 **n 位重复排列**．在重复排列中，每个元素可以出现若干次．

通常我们把放元素的位置排成**一排**（排成一水平直线），但是位置的排法并非绝对必须如

此，例如，它们可以绕着圆周放在圆内接正 n 边形的顶点上，这些顶点是用某种办法编了号的.

我们用所指出的方法在圆周上放好 n 个元素，然后将它绕圆心旋转$\frac{360^\circ}{n}$（我们将认为，仅仅旋转放在圆周上的元素，而内接正 n 边形仍然在原来的地方）. 原来的排列作**循环置换**后，产生了新的排列.

例如，在图 3 中，字母 A，B，C的排列可借助于循环置换由图 2 所示的字母排列得到，而图 4 所示的排列可借助于循环置换由图 3 所示的排列得到. 再进行一次循环置换，我们由图 4 所示的排列又得到图 2 所示的原来的排列❶.

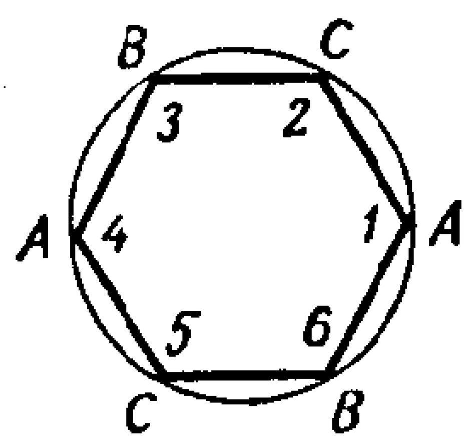


图 2

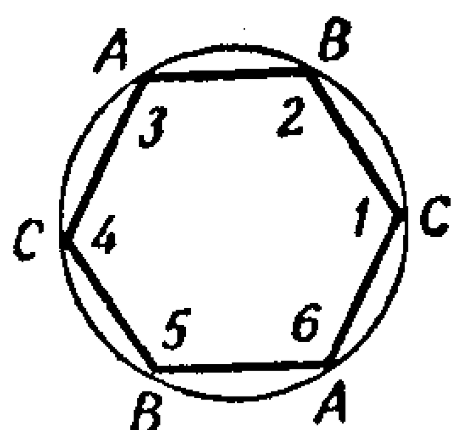


图 3

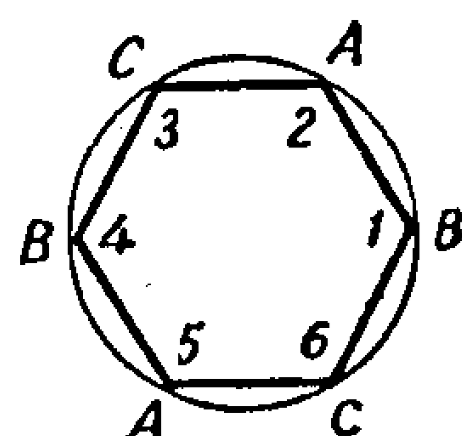


图 4

循环置换的特点是：在循环置换时，每一个元素从它在置换之前所占据的位置变到相邻的位置上，而占据第一个位置的元素在置换以后变到了最后一个位置上.

如果进行一次或若干次循环置换，可以从一个排列U变到另一个排列V，那么只要进行一定的循环置换，由V变到U的逆过程也可以实现. 这样一来，循环置换可以将排列U和V中的任何一个变到另一个.

我们假设进行 k 次循环置换可以由排列U变到排列V，而进行 l 次循环置换，可以由排列V变到排列W. 这时由排列U进行 $k+l$ 次循环置换可以得到排列W.

如果把循环置换看成是转动圆周，那么上面的两个断言简直是显然的.

我们将排列进行分类，只有进行一次或若干次循环置换可以互相变换的排列而且仅仅只有这些排列属于同一类.

属于任何一类排列的个数等于数 n 的某个约数.

事实上，我们来研究某一类排列，且假设U_0是属于它的一个排列. 构成这类排列的每一个排列和下面的排列

$$U_0,\ U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_r,\ \cdots\ \ U_s,\ \cdots \tag{1}$$

中的一个相同，这里的U_r 表示由U_0 进行 r 次循环置换所得到的排列. 因此，为了计算包含在这一类的排列的个数，必须确定在序列（1）中包含有多少个不同的排列.

如果排列U_r 和U_s 重合，那么U_{r+1} 和U_{s+1} 也是同一个排列. 反之，如果U_r 和U_s 是不同的排列，那么U_{r+1} 和U_{s+1} 也不相同.

假设U_s 是**第一个**和前面某一排列相重合的排列. 显然，前面那个排列的附标 r 应等于零，因为要不然的话，排列U_{s-1} 将和排列U_{r-1} 重合.

这样一来，序列（1）的每一项和排列

$$U_0,\ U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_{s-1} \tag{2}$$

中的某一个重合，而（2）中的各项是互不相同的. 因此，我们所研究的类包含 s 个排列.

---

❶ 在通常的记法中，和三个字母 A，B，C相应的 6 位排列具有下面的形式：$ACBACB$、CBA CBA，$BACBAC$.

和排列 U_0 重合的是序列(1)中下面的那些项:

$$U_0,\quad U_s,\quad U_{2s},\ \cdots.$$

因为 U_n 和 U_0 重合，所以附标 n 等于数 s，$2s$，$3s$，… 中的一个数．因此，s 是数 n 的约数，这就是所要证明的．

§5．关 于 组 合

1) 可以试一试用下面的方法来解答第4题：用所有可能的方法把字母 A 放在1，2，3，…，$n-2$ 或 $n-1$ 个位置上，而在其余的位置上写上字母 B．如果字母 A 占据 k 个位置（$k=1,2,\cdots,n-1$），那么它们以怎样的次序占据这些位置是无关紧要的（所有的字母 A 都是相同的）．但是如果有两个组，在一组中某一个位置上放的是字母 A，而在另一组中这个位置被字母 B 占据了，这两组就认为是不同的．

这样一来，试题的答案可以这样得到：计算**由 n 个不同的元素（卡片）中选取 k 个元素，如果不计所选取的元素的先后次序，总共有多少种不同的方法．选取的元素叫做由 n 个元素中选取 k 个元素的组合，而这种组合的个数通常用 C_n^k 来表示．**数 C_n^k 也叫做**二项式系数**．（关于二项式系数见§25．）

借助于二项式系数，根据本题的条件，字母 A 和 B 的 n 位重复排列的排列个数可以表示成

$$C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^{n-1} \tag{1}$$

的形式．当然，所得到的表达式仅在有简单的办法来计算二项式系数时才有价值．

2) 为了确定由 n 个元素中取 k 个元素的组合数，我们来看一看，从由 n 个元素中取 $k-1$ 个元素（$k>1$）的某个组合出发，可以得到多少个由 n 个元素取出 k 个元素的组合．对于由 $k-1$ 个元素构成的每一个组合，可以补加 $n-k+1$ 个未取的元素中的任意一个元素．当对所有由 n 个元素中选取 $k-1$ 个元素的组合都补加完之后，我们得到由 n 个元素中选取 k 个元素的所有组合，而且每一个组合出现 k 次，这是因为“后来补加的元素”是这个组合的 k 个元素中的任一个．

因此，我们可以断定

$$(n-k+1)C_n^{k-1}=kC_n^k,$$

或者

$$C_n^k=\frac{n-k+1}{k}C_n^{k-1}. \tag{2}$$

此外，显然有

$$C_n^1=n.$$

假设在公式(2)中令 $k=2$，3，…，我们求得

$$C_n^2=\frac{n-1}{2}C_n^1=\frac{n(n-1)}{2},$$
$$C_n^3=\frac{n-2}{3}C_n^2=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times2\times3},$$
$$C_n^4=\frac{n-3}{4}C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\times2\times3\times4},$$

……………………………………………………

继续使 k 的值每次增加 1，最后我们得到

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{1\times2\times3\times\cdots\times k}. \tag{3}$$

3） 自然数的乘积 $1\times2\times3\times\cdots\times k$ 通常表示成 $k!$ 并叫做 k 的阶乘．如果将公式（3）中右边的分子和分母乘以

$$(n-k)!=(n-k)\times(n-k-1)\times\cdots\times3\times2\times1,$$

那么二项式系数可以变成新的形式：

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\times\cdots\times3\times2\times1}{k!\ (n-k)!}=$$

$$=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}. \tag{4}$$

由这个表达式看出

$$C_n^k=C_n^{n-k},$$

即二项式系数具有对称性．

由公式（3）令 $k=n$ 或者直接根据二项式系数的含义，显然有

$$C_n^n=1.$$

虽然“由 n 个元素中取 0 个元素的组合”这种说法以及这种组合的个数是没有意义的，但通常认为

$$C_n^0=1.$$

这个假设和早先所指出的二项式系数的对称性是一致的．如果对上面所给出的定义补充规定 $0!=1$，那么公式（4）当 $k=0$ 时仍然有效．

现在我们已经具备了所有必要的知识来讨论本题的第二种证法．利用二项式系数的性质——以后再证明它们（见 § 25），不难证实

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n.$$

4） 二项式系数有一个经常用到的性质，即

$$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1},$$

它能计算两个相邻的二项式系数的和．

可以用直接计算的办法来证实这一点，将左边的两个表达式通分，得

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(k+1)+n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)[(k+1)+(n-k)]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}=C_{n+1}^{k+1}.$$

5．给定一个直角三角形 ABC．在这个三角形内求一点 N，使 $\angle NBC$，$\angle NCA$，$\angle NAB$ 相等．

【解法 1】1）分析．假设 α，β，γ 是三角形 ABC 的三个内角，$\gamma=90°$，N 是 $\triangle ABC$ 内的一点，对于点 N（图 5）有

$$\angle NCA=\angle NBC=\angle NAB.$$

这时

$$\angle BNC=180°-(\angle BCN+\angle NBC)=180°-(\angle BCN+\angle NCA)=180°-\gamma.$$

同样地

$$\angle CNA=180°-\alpha$$

和

$$\angle ANB=180°-\beta.$$

2）**综合**．因为在我们所研究的情况中，$180°-\gamma=90°$，所以所要求的点 N 在以 BC 为直径的圆 k 上．这个圆和边 AC 相切于点 C．因此，圆 k 和顶点 B 位于直线 AC 的同一侧．这样一来，点 N 只能是圆 k 和另一个圆弧 k_1 的交点，k_1 是对线段 AC 所张的角为 $180°-\alpha$ 且和顶点 B 在 AC 的同一侧的点的轨迹．于是作圆 k 和另一个圆弧 k_1 的交点，我们便可求得点 N．

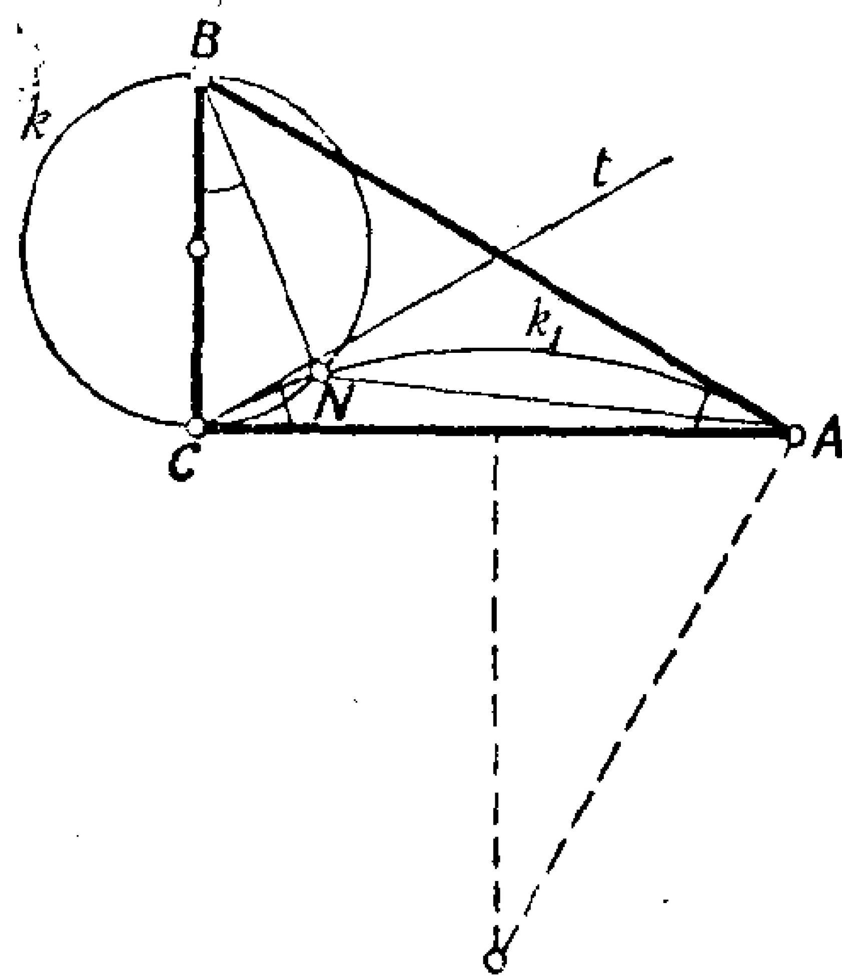


图 5

3）**论证**．顶点 C 同时属于圆 k 和另一个圆的弧 k_1．这两个圆在点 C 不相切，因为 AC 是圆 k 的切线，而且是另一个圆的割线．于是这两个圆还交于另一点 N，而且点 N 位于直线 AC 和圆 k 的同一侧，因此也位于和弧 k_1 的同一侧．

圆 k 和另一个圆的弧 k_1 的交点 N 在三角形 ABC 内，因为弧 k_1 完全在三角形 ABC 内．事实上，过点 A 引弧 k_1 的切线，它和三角形的边 AC 的夹角为 α．这意味着边 AB 和弧 k_1 相切于点 A．假设 t 是和弧 k_1 相切于点 C 的切线．因为 t 和三角形 ABC 的边 CA 的夹角为 α，所以 t 在角 ACB 内．由于弧 k_1 在直线 AB，AC 和 t 所构成的三角形内，所以弧 k_1 完全在三角形 ABC 内．

因为根据证明，CA 和圆 k 相切，AB 和弧 k_1 相切，所以根据弦切角和圆周角的已知定理，有

$$\angle NCA=\angle NBC,\qquad \angle NAB=\angle NCA.$$

这样一来，所作的点 N 满足本题的所有条件．

【解法 2】正如在解法 1 中所证明的那样，点 N 应该在以边 BC 为直径的圆 k 上，而且在圆 k 的位于三角形 ABC 内的那一部分上．

为了完全确定点 N 的位置，我们作直线 AN（图 6），使

$$\angle NBC=\angle NAB. \qquad (1)$$

如果 M 也是直线 AN 和圆 k 的一个交点，那么 $\angle NBC$ 和 $\angle AMC$ 相等，因为它们内接于同一个圆 k 且在同一弧 CN 上．此外，显然 $\angle NAB=\angle MAB$．将所得到的 $\angle NBC$ 和 $\angle NAB$ 的值代入(1)，得

$$\angle AMC=\angle MAB,$$

或者换句话说，线段 AB 和 CM 平行．

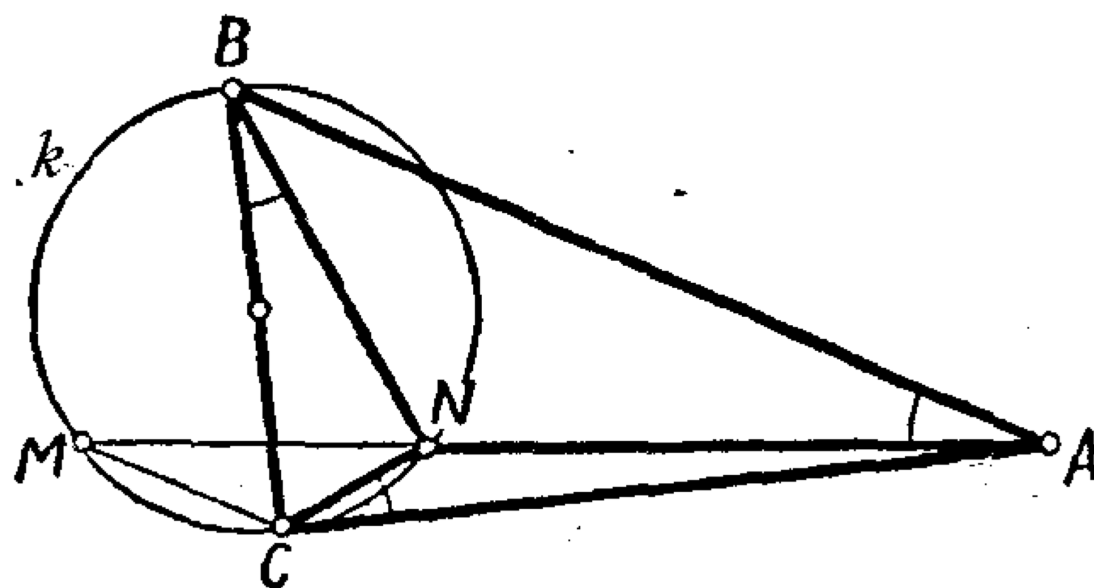


图 6

这样一来，为了确定所要求的点 N 的位置，必

须以 BC 为直径作圆 k，且过点 C 作平行于 AB 的直线. 这个直线和圆 k 的另一个交点为 M. 线段 AM 和圆 k 不仅交于点 M，而且还有另外一个交点，它就是我们所要求的点 N. 根据作法，点 M 总是在三角形 ABC 的外面，而点 N 正象我们所要求的，在三角形的内部.

注. 用类似的方法可以证明：在任意三角形内，存在两个点 N_1 和 N_2，使

$$\angle N_1BC = \angle N_1CA = \angle N_1AB$$

和

$$\angle N_2CB = \angle N_2AC = \angle N_2BA.$$

这两个点叫做这个三角形的**布洛卡尔点**❶.

6. 在某一个三角形中，已知外接圆半径 R，一边 c 和其余两边的比 $a:b$. 求这个三角形的边和角 α，β，γ.

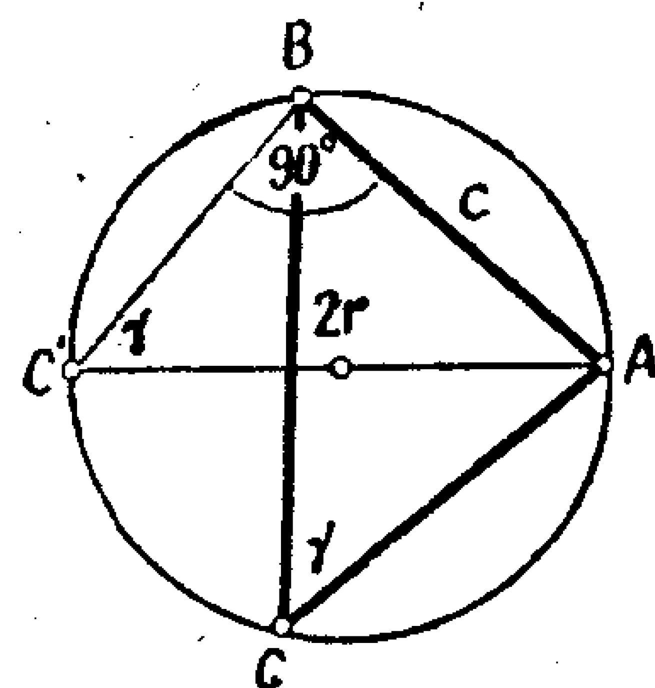


图 7

【解法 1】边 c 所对的角 γ 的值可由正弦定理求得，见(图 7)

$$\sin\gamma = \frac{c}{2R}.$$

当 $c<2R$ 时，我们得到 γ 的两个值，当 $c=2R$ 时，得到 γ 的一个值，当 $c>2R$ 时，无解.

三角形其余的角和边，用下面的方法可以用已知的角 γ 和边之比 $a:b$ 来表示.

根据边 a，b 和它们所对的角 α，β 的正切定理★，它们之间有关系式

$$\frac{tg\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{tg\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{a+b}{a-b} = \frac{\dfrac{a}{b}+1}{\dfrac{a}{b}-1}.$$

因为半和

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180^\circ-\gamma}{2}$$

知道了，那么由上面的关系式可以求出半差 $\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 作为 $\dfrac{a}{b}$ 的函数.

在用所说的方法确定了角 α 和 β 的和与差之后，不难求得角 α 和 β 本身的值：

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{1}$$

最后，利用正弦定理，得到

$$a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}, \qquad b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

【解法 2】由三角形 ABC 的外接圆心 O 作边 AB 的垂线 OC_1（图 8）. 根据对应于圆的同一弧的圆周角和圆心角的关系，角 BOC_1 等于边 AB 所对的三角形的角. 因此

$$\sin\gamma = \frac{BC_1}{OB} = \frac{\dfrac{c}{2}}{R} = \frac{c}{2R}.$$

于是，当 $c<2R$ 时，我们得到两个角 γ（一个锐角，一个钝角）；当 $c=2R$ 时，得到一个

❶ 布洛卡尔（Брокар）（1845—1922）——法国的数学家和气象学家.

角 γ（$\gamma=90°$）. 当 $c>2R$ 时，本题无解. 对于每一个求得的 γ 的值，对应的三角形其余的量可以用下面的方法来确定.

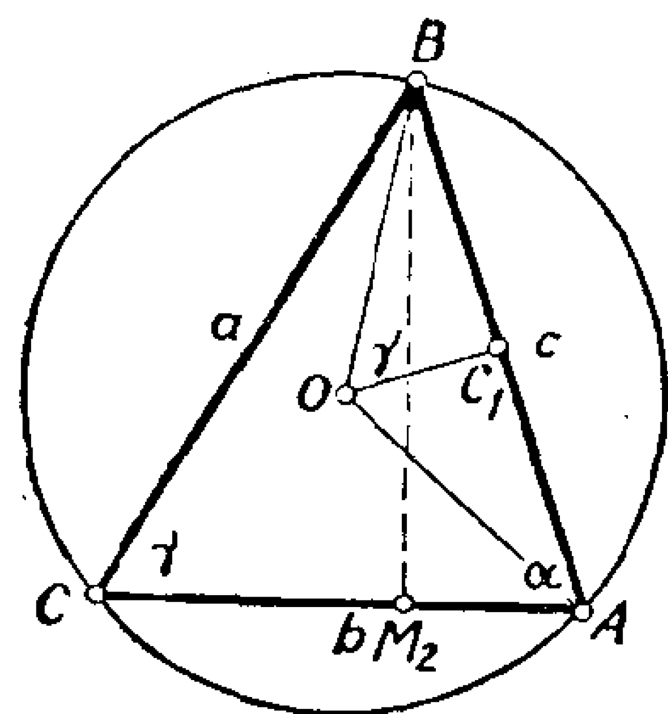


图 8

由顶点 B 作边 AC 的垂线 BM_2. 这时

$$BM_2=a\sin\gamma\left(=a\frac{c}{2R}\right)$$

和

$$CM_2=a\cos\gamma\left(=a\ \frac{\pm\sqrt{4R^2-c^2}}{2R}\right).$$

根号前面的"正号"对应于锐角 γ，"负号"对应于钝角 γ. 于是

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BM_2}{AM_2}=\frac{a\sin\gamma}{b-a\cos\gamma}=\frac{\frac{a}{b}\sin\gamma}{1-\frac{a}{b}\cos\gamma}.$$

所得到的表达式在角 α 是钝角时也是成立的，因为这时边 AB 在边 AC 上的投影 AM_2 是负的，差 $b-a\cos\gamma$ 也取负值.

当角 γ 和 α 知道后，角 β 不难由关系式 $\alpha+\beta+\gamma=180°$ 求出. 最后利用正弦定理，我们得到三角形的边

$$a=\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}=2R\sin\alpha,\qquad b=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}=2R\sin\beta.$$

§6. 正 切 定 理

在解题 6 时所利用的定理可以用下面的方式来证明.

把正弦定理写成

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}.$$

用 λ 来表示两个比例的公共值（实际上 λ 等于外接圆的直径）. 这时

$$a=\lambda\sin\alpha,\qquad b=\lambda\sin\beta,$$

于是

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\lambda(\sin\alpha+\sin\beta)}{\lambda(\sin\alpha-\sin\beta)}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}.$$

把角 α 和 β 中的每一个分解成角 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 和 $\frac{\alpha-\beta}{2}$ 的和与差，并利用两角和与差的正弦公式，我们得到

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

这样一来，

$$\frac{a+b}{a-b}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

三、1896年—1897年试题及解答

7. 证明：对任意的正整数 n，有不等式

$$\lg n \geqslant k\lg 2,$$

其中 $\lg n$ 是数 n 的以10为底的对数，k 是 n 的不同的（正）素因子的个数.

【证明】假设 n 是大于1的整数，p_1，p_2，……，p_k 是它的 k 个不同的素因子，

$$p_1^{\alpha},\ p_2^{\beta},\ \cdots\cdots p_k^{\chi}$$

是能除尽数 n 的素数 p_1，p_2，……，p_k 的最高方次的乘幂. 这时有★

$$n = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} \cdots p_k^{\chi}.$$

每一个数 p_i 不小于2，因此

$$n \geqslant 2^{\alpha+\beta+\cdots+\chi} \geqslant 2^k.$$

所得到的不等式当 $n = 1$ 时也是成立的，因为这时

$$k = 0, \quad n = 1 = 2^0 = 2^k.$$

将不等式取对数，底 a 是大于1的任意实数，例如 $a = 10$，即得

$$\log_a n \geqslant k\log_a 2.$$

§7. 关于将整数分解成素数乘幂的乘积

1） **每一个正复合数可以表示成两个或更多个素数因子❶的乘积.**

最小的正复合数4可以表示成 $4 = 2\times 2$ 的形式.

因此，剩下的只要证明：如果上面所说的断言对于小于某一个正复合数 a 的所有正复合数成立，那么它对 a 也成立（即利用**完全数学归纳法**，见§3）.

事实上，根据复合数的定义，a 可以表示成两个数 k 和 b 的乘积，数 k 与 b 为下列数

$$2,\ 3,\ \cdots,\ a-1$$

中的某一个.

根据假设，所要证明的断言对于所有小于 a 的正复合数是成立的. 这样一来，数 k 和 b 中的每一个或者是素数，或者可以表示成素数乘积. 因此，数 $a = kb$ 也可以表示成素数乘积.

2） **每一个正整数可以表示成不同素数的乘幂的乘积，这些乘幂的幂指数为正整数或零.**

根据上面的证明，每一个正复合数 a 可以表示成素数的乘积，然后将相同的素数因子合并，写成这个素数乘幂的形式. 我们把这种形式称之为正整数的**标准的因子分解式**. 最后，如果愿意的话，还可以写上带有零指数的其它素数的乘幂（这种做法并不改变乘积的值，因为任何正（或负）数的零次幂都等于1）.

---

❶ 这里所说的素数总是指正素数.

及

$$(2)\begin{cases} x-2y+1=0, \\ x^2-2xy+y^2-5x+7y=0. \end{cases}$$

从方程组（1）的第一个方程得 $x=y$. 把它代入（1）的第二个方程得

$$2y=0.$$

因此方程组（1）的解仅可能是

$$x=0, \quad y=0.$$

由方程组（2）的第一个方程得

$$x=2y-1.$$

把它代入（2）的第二个方程得

$$(2y-1)^2-2(2y-1)y+y^2-5(2y-1)+7y=0,$$

合并同类项得

$$y^2-5y+6=0.$$

这个方程有两个根：$y=2$ 和 $y=3$. 相应地有 $x=3$ 和 $x=5$. 这样一来，方程组（2）仅可能有两组解：$x=3$，$y=2$ 和 $x=5$，$y=3$. 因此，原方程组有下面三组解：

$$x=0,\ y=0; \quad x=3,\ y=2; \quad x=5,\ y=3.$$

将它们代入到方程

$$xy-12x+15y=0,$$

即知这三组解都满足它.

【证法2】这一题也可直接证明. 为此，只要将每一个原方程的左端乘以某个表达式，使得把乘积加起来以后得到的多项式就是第三个方程的左端或者与它相差一个非零的常数因子即可. 不难看出，光乘以常数因子是不行的. 但乘以 x 和 y 的适当的线性表达式，就可达到这个目的.

我们有

$$(x^2-3xy+2y^2+x-y)(x-y-9)+(x^2-2xy+y^2-5x+7y)(-x+2y+3)=$$
$$=2(xy-12x+15y).$$

去掉左边的括号再合并同类项，即可验证它的正确性. 因此，如果 x 和 y 的某一组值满足原来的两个方程，那么恒等式的左边等于零. 因此，恒等式的右边也等于零，这就表明 x 和 y 也满足第三个方程.

9. 给定某 $\triangle ABC$ 的高的垂足 A_1，B_1 和 C_1. 求作 $\triangle ABC$.

或者：给定 $\triangle A_1B_1C_1$，它的顶点是三角形 ABC 的高的垂足. 求 $\triangle ABC$ 的边和角.

【解】

Ⅰ $\triangle ABC$ 是锐角三角形时的解法.[1]

1） **定理. 锐角 $\triangle ABC$ 的高是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的角平分线.**

如果高 AA_1 和 BB_1 交于点 M，那么线段 MC 对点 A_1 和 B_1 所张的角都是直角（图 9）. 因此，点 A_1 和 B_1 在以线段 MC 为直径所画的圆上. 线段 MB_1 把这个圆分成两个弧. 点 A_1

---

[1] 如果 $\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle B=90°$，那么 $A_1=C_1$. 这时容易看出，本题以第一种形式叙述时，有无穷多个解. 而以第二种形式叙述时，这种情形是不可能遇到的，因为"给定三角形 $A_1B_1C_1$"这句话就假定了所有三个点是不同的. 对于钝角三角形的解答在Ⅱ中研究. ——俄译者注.

属于这两个弧中含有点C的那一个弧．因此

$$\angle MA_1B_1=\angle MCB_1,$$

即

$$\angle AA_1B_1=90°-\alpha.$$

类似地有

$$\angle AA_1C_1=90°-\alpha.$$

因此，AA_1 实际上是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的角 α_1 的平分线．作为附带的结果，我们得到

$$\frac{\alpha_1}{2}=90°-\alpha.$$

从所证明的定理推出，$\triangle ABC$ 的高相交于一点，且这点是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的内切圆心．

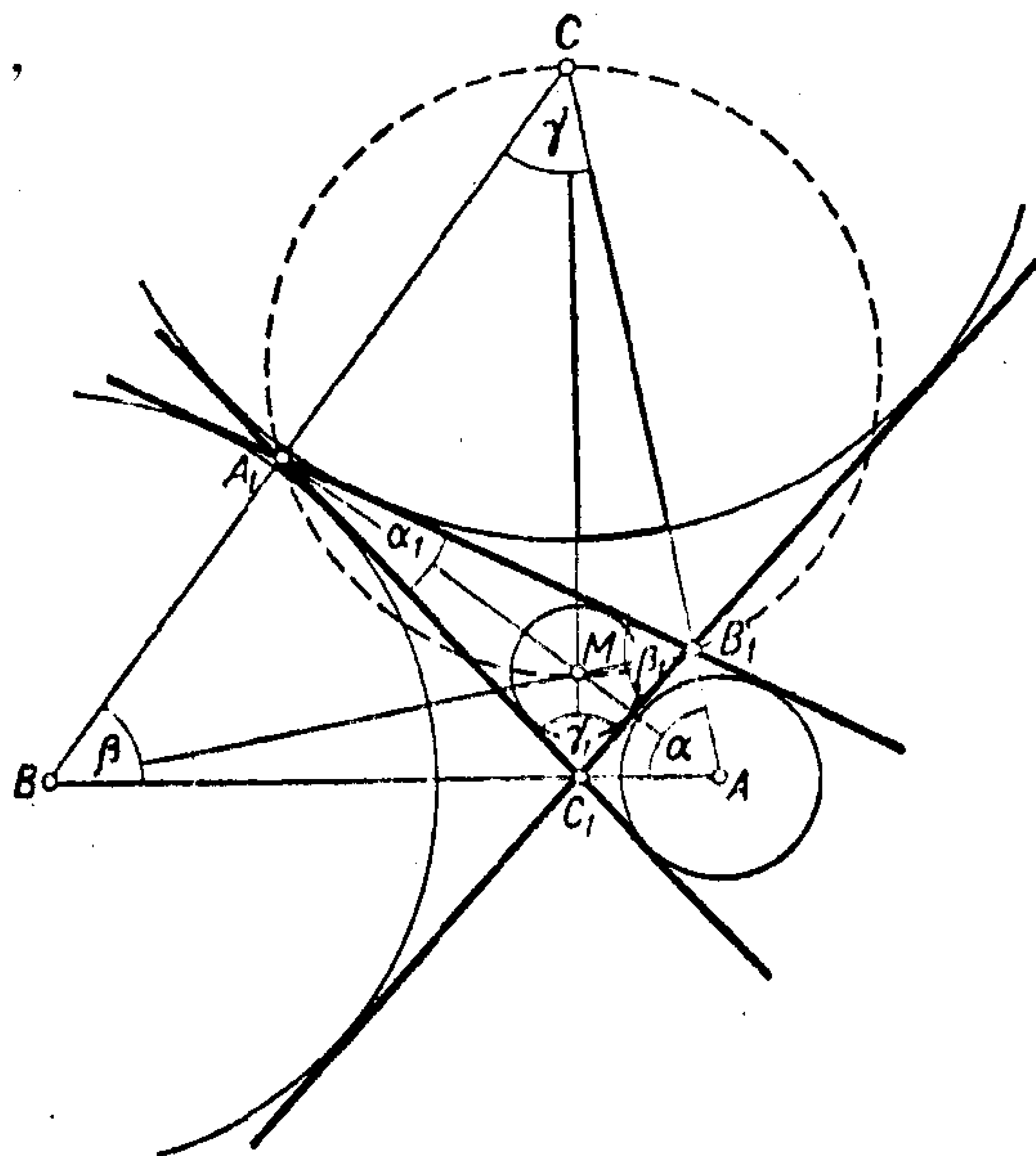


图 9

2） **分析**．根据1)中所证明的定理，存在唯一的 $\triangle ABC$，它的边是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外角平分线．换句话说，所要求的三角形的顶点不是别的，而是与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的一边以及另外两边的延长线相切的圆的圆心(图 9)．[1]

3） **综合**．我们作 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外角平分线．显然，任意两个外角平分线与第三个内角的平分线相交于一点．另一方面，任何一个内角的平分线垂直于这个角的外角的平分线．因此，$AA_1\perp BC$，$BB_1\perp CA$，$CC_1\perp AB$．这就证明了，点 A_1，B_1，C_1 与 $\triangle ABC$ 的高的垂足相重合．

4） **计算**．在1)中证明了

$$\frac{\alpha_1}{2}=90°-\alpha,$$

因此角 α 是锐角且［见 § 8的公式(12)］

$$\cos\alpha=\sin\frac{\alpha_1}{2}=\sqrt{\frac{(p_1-b_1)(p_1-c_1)}{b_1c_1}},$$

这里 a_1，b_1，c_1 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边长，p_1 是半周长．

其次，因为角 A 公用，而且

$$\angle C_1B_1A=90°-\frac{\beta_1}{2}=\beta.$$

所以 $\triangle C_1AB_1\backsim\triangle CAB$，因而有

$$B_1C_1:BC=C_1A:CA,$$

即

$$a_1:a=\cos\alpha.$$

由此，利用上面所提到的公式(12)，我们得到

$$a=\frac{a_1}{\cos\alpha}=a_1\sqrt{\frac{b_1c_1}{(p_1-b_1)(p_1-c_1)}}.$$

[1] 事实上，$A_1C\perp A_1A$ 且是边 A_1B_1 和 A_1C_1 的延长线的夹角的平分线．因此 C 到 A_1B_1 和 A_1C_1 的延长线是等距的．类似地可以证明，C 到 A_1B_1 和 B_1C_1 的延长线是等距的．因此，C 是傍切圆的圆心．由此立刻推出文中所说的结果（见 3））．——俄译者注．

Ⅱ．$\triangle ABC$是钝角三角形的解法．

从$\triangle ABC$的钝角顶点所作的高（与锐角三角形的任一顶点所作的高一样），是以$\triangle ABC$的高的垂足为顶点的$\triangle A_1B_1C_1$的内角平分线．至于从钝角三角形的锐角顶点所作的高，它们（与从锐角三角形的顶点所作的高不同）是$\triangle A_1B_1C_1$相应的外角平分线．

如果我们允许所求的三角形是钝角三角形，那么除了$\triangle ABC$外，$\triangle BCM$，$\triangle CAM$，$\triangle ABM$也都满足本题的条件．这些三角形的高的交点分别是A，B，C．

所有四个解答具有共同的性质：它们之中的任何一个三角形的顶点和垂心是和$\triangle A_1B_1C_1$的三边相切的四个圆的圆心，其中A_1，B_1，C_1是所要求的三角形的三个高的垂足．

如果$\triangle ABC$是锐角三角形，那么它的高的交点和$\triangle A_1B_1C_1$的内切圆心重合．

如果$\triangle BCM$，$\triangle CAM$，$\triangle ABM$中的某一个是钝角三角形，那么钝角的顶点和$\triangle A_1B_1C_1$的内切圆心相重合★．

§8．关于三角形的某些内容

1） **关于和三角形的边相切的圆．** 假设和$\triangle ABC$的边BC，CA，AB从里面相切的圆k的圆心为O，半径为τ，切点为D，E，F（图10）；和边BC以及边AB，AC的延长线相切的圆k_a的圆心为O_a，半径为τ_a，切点为D'，E'，F'．引入下面的记号：$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$和$a+b+c=2p$．

因为从一点到同一圆的切线相等，所以

$$AE=AF,\ BF=BD,\ CD=CE,$$

于是

$$2p=AB+BC+CA=$$
$$=2(AE+BF+CD).$$

由后一个等式求得

$$CD=p-(AE+BF)=$$
$$=p-(AF+BF)=p-c. \quad (1)$$

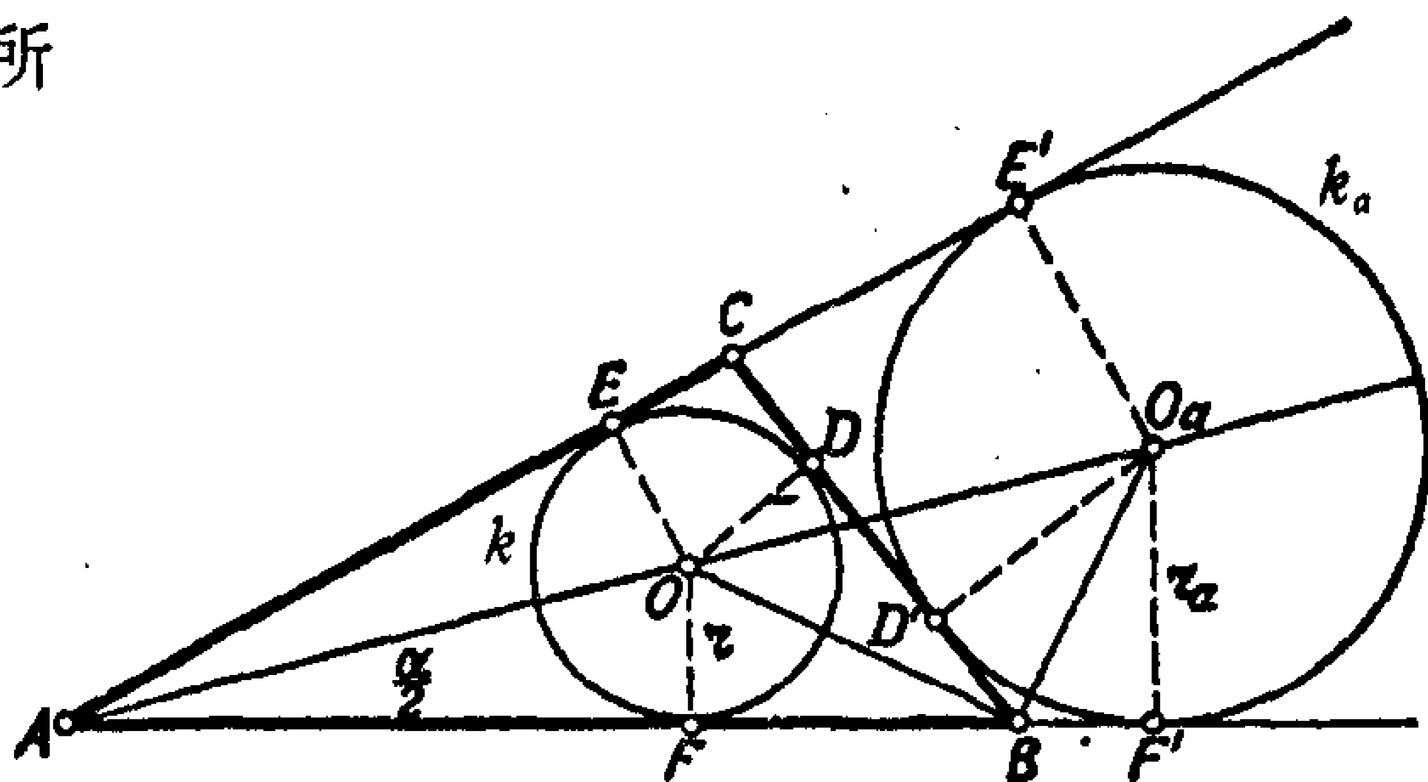


图 10

类似地有

$$AE=p-a, \qquad BF=p-b.$$

当研究由点A向圆k_a所引的切线AE'和AF'时，我们得到

$$2AE'=AE'+AF'=AC+CE'+AB+BF'=$$
$$=AB+AC+BD'+CD'=AB+AC+BC=2p,$$

由此得到

$$AE'=AF'=p \qquad (2)$$

和

$$CE'=AE'-AC=p-b, \qquad BF'=p-c. \qquad (3)$$

我们将$\triangle ABC$分成三部分来计算它的面积：$\triangle AOB$，$\triangle BOC$和$\triangle COA$（我们约定三角形的面积也用三角形本身的记号来表示）．这时

$$S=\triangle ABC=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA=\frac{1}{2}(\tau\cdot AB+\tau\cdot BC+\tau\cdot CA)=\tau\cdot\frac{a+b+c}{2},$$

即

$$S=\tau\cdot p. \tag{4}$$

另一方面

$$S=\triangle ABC=\triangle AO_aB+\triangle AO_aC-\triangle BO_aC$$

$$=\frac{1}{2}(\tau_a\cdot AB+\tau_a\cdot AC-\tau_a\cdot BC)=\tau_a\cdot\frac{b+c-a}{2}=\tau_a(p-a). \tag{5}$$

类似地有

$$S=\tau_b(p-b), \tag{6}$$

$$S=\tau_c(p-c). \tag{7}$$

量τ_b表示和$\triangle ABC$的边b以及其它两边的延长线相切的圆的半径，而τ_c表示和三角形的边c以及其它两边的延长线相切的园的半径.

2) **三角形的角与边之间的关系.** 显然，$\triangle ABC$的内切圆心和这个三角形的内角平分线的交点相重合，因此，例如$\angle OAF=\frac{\alpha}{2}$. 由关系式（4）和三角形面积的海伦公式求得

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{OF}{AF}=\frac{\tau}{p-a}=\frac{S}{p(p-a)}=$$

$$=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \tag{8}$$

类似地有

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}, \tag{9}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \tag{10}$$

另一方面，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=bc\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

因此，由关系式（8）和海伦公式得到关系式

$$bc\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{S}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=p(p-a).$$

由此并对其它两个角得到类似的公式：

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\qquad \cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}, \tag{11}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

将所得到的半角的余弦表达式和关系式（8）—（10）比较，我们求得：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\qquad \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}, \tag{12}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}.$$

10．证明：如果α,β,γ是直角三角形的内角，那么

$$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)+$$
$$+\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)=0.$$

【证明】假设$\alpha=90°=\beta+\gamma$.

这时

$$\sin\alpha=1,\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\gamma,$$
$$\sin(\gamma-\alpha)=-\sin(\alpha-\gamma)=-\sin\beta.$$

因此

$$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)=\sin\beta\sin\gamma,$$
$$\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)=\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma),$$
$$\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)=-\sin\gamma\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)=-\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)\sin\beta$$

这四式相加，其和为零，这就是所要证明的.★

§9. 关于三角函数的乘积之和的变换

关系式

$$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)+$$
$$+\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)=0 \quad (1)$$

不仅对直角三角形的角成立，而且对任意三角形的角，**甚至对任意的三个角都成立**.

我们来研究三角函数乘积之和的变换.

1） 将$\sin(x+y)$和$\cos(x+y)$按已知的公式展开，得到关系式

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y,$$
$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y,$$
$$\cos(x-y)-\cos(x+y)=2\sin x\sin y,$$

由此得到

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)],$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)],$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)].$$

特别地，当$x=y$时，

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\qquad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

所得到的关系式可以将任意多个正弦和余弦的乘积变成和的形式.

在第10题所要证明的三角恒等式中，所有的项是三个正弦的乘积：

$$\sin x\sin y\sin z=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]\sin z=$$

$$=\frac{1}{2}[\sin z\cos(x-y)-\sin z\cos(x+y)]=$$

$$=\frac{1}{4}[\sin(x-y+z)+\sin(-x+y+z)-\sin(x+y+z)-\sin(-x-y+z)]=$$

$$=\frac{1}{4}[\sin(-x+y+z)+\sin(x-y+z)+\sin(x+y-z)-\sin(x+y+z)]. \quad (2)$$

2） 令$x=\alpha-\beta$，$y=\beta-\gamma$，$z=\gamma-\alpha$.

这时

$$x+y+z=0,\qquad -x+y+z=-2(\alpha-\beta),$$
$$x-y+z=-2(\beta-\gamma),\qquad x+y-z=-2(\gamma-\alpha).$$

代入到（2）中求得

$$4\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)=$$
$$=-\sin2(\alpha-\beta)-\sin2(\beta-\gamma)-\sin2(\gamma-\alpha). \quad (3)$$

如果角γ，α或β中的一个等于零，那么由（3）

得

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)=\sin2(\alpha-\beta)+\sin2\beta-\sin2\alpha, \quad (4)$$
$$4\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)=\sin2(\beta-\gamma)+\sin2\gamma-\sin2\beta, \quad (5)$$
$$4\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)=\sin2(\gamma-\alpha)+\sin2\alpha-\sin2\gamma. \quad (6)$$

将关系式（3）—（6）的左右两边分别相加便可得到恒等式（1）.

11．证明：如果α,β,γ是任意三角形的三个内角，那么

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}<\frac{1}{4}.$$

【证法1】因为

$$\frac{\alpha}{2}=90^\circ-\frac{\beta+\gamma}{2}<90^\circ-\frac{\beta}{2}<90^\circ$$

（又因为锐角越大，它的正弦值也越大），所以

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}<\sin\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}=\cos\frac{\beta}{2}\ \sin\frac{\beta}{2}.$$

由此得到

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}<\frac{1}{2}\sin\beta\leqslant\frac{1}{2}. \quad (1)$$

如果选取γ表示最小的角，那么

$$\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\sin30^\circ=\frac{1}{2}. \quad (2)$$

由不等式（1）和（2），我们得到

$$\sin\frac{\alpha}{2}\ \sin\frac{\beta}{2}\ \sin\frac{\gamma}{2}<\frac{1}{4}.$$

【证法2】❶1） 我们知道★

$$\sin\frac{\alpha}{2}\ \sin\frac{\beta}{2}\ \sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4R},$$

其中r是内切圆半径，R是外接圆半径.

因为$r<R$，所以等式左端的正弦乘积小于$\frac{1}{4}$.

2） 三个半角的正弦积甚至还满足更强的不等式

$$\sin\frac{\alpha}{2}\ \sin\frac{\beta}{2}\ \sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8},$$

因为$r\leqslant\frac{R}{2}$.

事实上，根据熟知的欧拉定理★

$$d^2=R^2-2Rr,$$

其中d是外心和内心之间的距离. 因此

$$2Rr\leqslant R^2,$$

这样一来

$$r\leqslant\frac{R}{2}.$$

如果三角形是等边的，那么$d=0$，半角的正弦之积等于$\frac{1}{8}$.

§10. 关于三角形的三角函数乘积的某些关系式

如果p是边长为a，b，c的三角形的半周长；S是它的面积，R是外接圆半径，r是内切圆的半径，那么

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{S}{p^2},\qquad (\text{I})$$

或将它表示成另外的形式

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{p}.\qquad (\text{II})$$

此外，

$$\cos\frac{\alpha}{2}\ \cos\frac{\beta}{2}\ \cos\frac{\gamma}{2}=\frac{p}{4R}\qquad (\text{III})$$

和

$$\sin\frac{\alpha}{2}\ \sin\frac{\beta}{2}\ \sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4R}.\qquad (\text{IV})$$

事实上，由§8中的公式（8），（9），（10），我们求得

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\ \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p^2}.$$

❶ 这个证法是由参加奥林匹克竞赛的一个优胜者给出的，它在很大程度上依赖于初等几何的知识. 但是比起前面所给的简单证明，它更深刻地揭示问题的本质.

如果利用海伦公式和 § 8 中的关系式(4),那么可以得到表达式(Ⅰ)和(Ⅱ).

由 § 8 中关系式(11),我们得到

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc}=\frac{pS}{abc}.$$

为了由此得到关系式(Ⅲ),只要注意到(见 § 8)

$$\sin\gamma=\frac{c}{2R},\ \text{由此有}\ R=\frac{c}{2\sin\gamma}=\frac{abc}{4S}.$$

关系式(Ⅳ)可由关系式(Ⅱ)和(Ⅲ)推出.

§ 11. 欧 拉 定 理

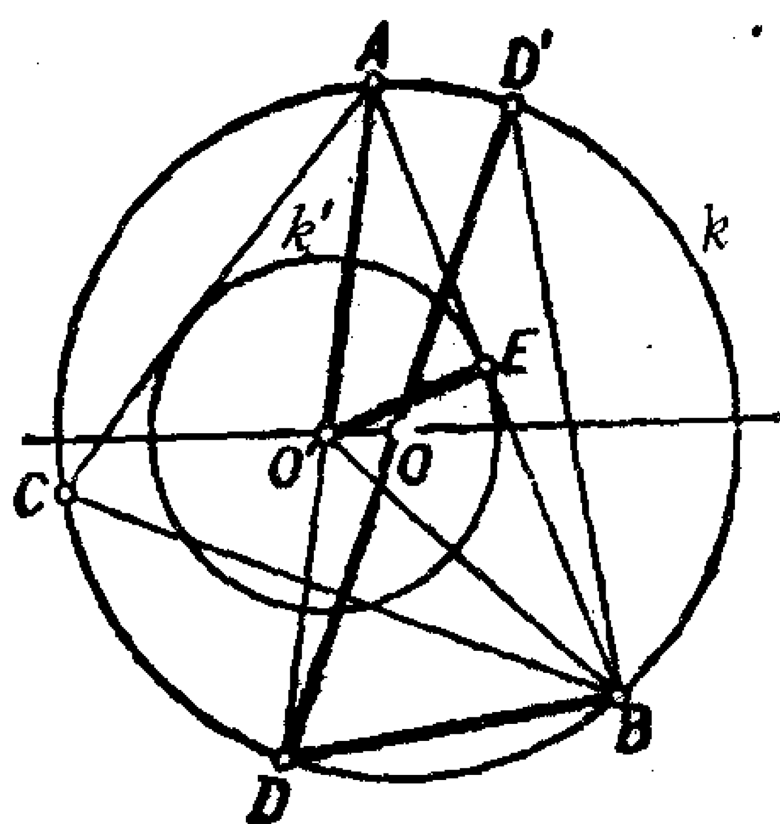


图 11

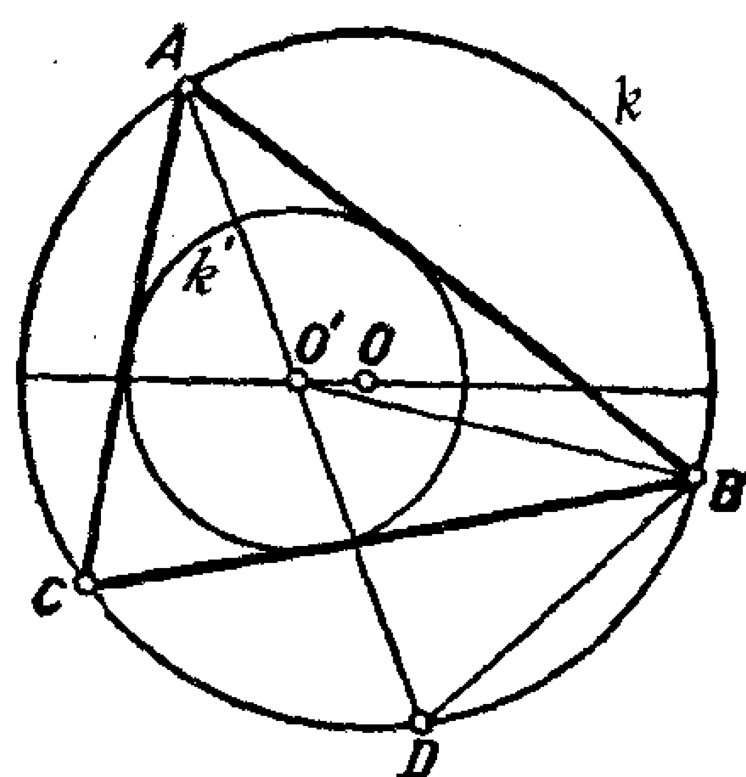


图 12

假设给定两个圆(图11和12):k 以及在它里面的 k'. 用 O 和 O' 表示它们的圆心,R 和 r 表示它们的半径。设 d 是两个圆心之间的距离.

11题证法 2 中所引用的欧拉定理(以及它的逆定理)可以叙述成下面的形式:

和圆 k' 外切的三角形当而且仅当

$$d^2=R^2-2Rr \tag{1}$$

时才能内接于圆 k.

我们来导出这个关系式.

1) 设 A 是圆 k 上一点(图11).在圆 k 上选取点 B 和 C,使得 k' 是 $\triangle ABC$ 的内切圆.

这样的点 B 和 C 并不是总能找得到的. 简单地自点 A 向圆 k' 作两条切线,然后取切线与圆 k 的交点是不行的,线段 BC 还应该和圆 k' 相切. 相切的**必要充分条件**是角的等式:

$$\angle ABO'=\angle O'BC \tag{2}$$

(在图11中,这个条件不成立).

下面的考虑可以将(2)变成其它的条件,它也是问题可解的必要充分条件.

用直线连接点 A 和 O',将其延长和圆 k 交于点 D. 不难看出,AO' 是 $\angle BAC$ 的平分线,即 $\angle O'AB=\angle CAO'$. 此外,$\angle CAO'=\angle CBD$,因为这两个角在圆 k 的同一个弧 CD 上. 因此

$$\angle O'AB=\angle CBD. \tag{3}$$

但是 $\angle O'AB$ 作为 $\triangle O'AB$ 的内角等于

$$\angle BO'D-\angle ABO'.$$

此外,显然有

$$\angle CBD=\angle O'BD-\angle O'BC.$$

将所求得的$\angle O'AB$和$\angle CBD$的表达式代入到等式（3），我们得到

$$\angle BO'D-\angle ABO'=\angle O'BD-\angle O'BC. \tag{4}$$

这样一来，等式（2）在而且仅在

$$\angle BO'D=\angle O'BD \tag{5}$$

的情况下才成立.

在$\triangle BO'D$中，这两个角所对的边是BD和$O'D$，因此本题有解的必要充分条件可叙述成下面的形式：

$\triangle ABC$ 在而且仅在

$$BD=O'D$$

的情况下和圆 k' 外切（如象图12所表明的那样）.

2） 为了继续完成关系式（1）的结论，我们来确定线段BD和$O'D$的长度的比值(图11).

如果E是线段AB和圆k'的切点，而D和D'是圆k的同一条直径的两个端点，那么$\triangle AO'E$和$\triangle D'DB$是直角三角形（直角顶点分别是点E和B）. 此外，$\angle O'AE=\angle DD'B$，因为它们都在圆k的弧BD上. 因此，$\triangle AO'E$和$\triangle D'DB$相似，于是

$$AO':EO'=D'D:BD$$

或者

$$AO':r=2R:BD.$$

上式还可表示成

$$AO'\cdot BD=2Rr.$$

点O'将所有通过它的圆k的弦分成这样的两段，这两段的长度的乘积等于常数. 如果一条弦是取AD，而另一条是取圆k的通过点O'的直径，那么

$$AO'\cdot O'D=(R+d)(R-d).$$

用$AO'\cdot O'D$除$AO'\cdot BD$，我们得到

$$BD:O'D=2Rr:(R+d)(R-d). \tag{6}$$

由所得到的关系式看出，在而且仅在

$$2Rr=(R+d)(R-d) \tag{7}$$

的情况下线段BD和$O'D$相等.

3） 在1）和2）中所得到的结果可以叙述成下面的形式：

对于圆 k 上的任一点A，在这个圆上找另外两个点B和C，使得这两个点和点A一起构成一个和圆 k' 外切的三角形 ABC 的顶点. 这两个点在而且仅在R，r和d满足关系式（7）时才能找到.

于是欧拉定理以及它的逆定理被证明了，因为等式（7）和关系式（1）仅仅是写法不同.

我们所得到的关系式与圆k上点A的选取无关. 因此，**如果对于圆 k 上某一点A来说，可以作一个三角形 ABC，使得圆 k 是它的外接圆，圆 k' 是它的内切圆，那么对圆 k 上的任意一点来说，都可以作出具有同样性质的三角形.**

正像彭塞列❶所表明的，这个 *aut semper*，*aut nunquam*（要么总可以，要么总不可

---

❶ Ж.К. 彭塞列(1788—1867)法国将军和数学家，《关于图形的投影性质的论文》的作者.

以）原则还适合于更一般的情况：代替两个圆，研究两个任意的圆锥截线，代替三角形，研究n边形.

12. 已知矩形$ABCD$的两平行边AB和CD的延长线与某直线相交于点M和N，边AD和BC的延长线与此直线相交于点P和Q，边AB的长等于p. 求作矩形$ABCD$. 在什么情况下，本题有解，有多少解？

【解】在线段PQ上作一个以PQ为斜边，且直角边$PS=p$的直角△PSQ（图13）. 过点M和N作平行于线段PS的直线，过点P和Q作它们的垂线，这些直线构成所要求的矩形$ABCD$.

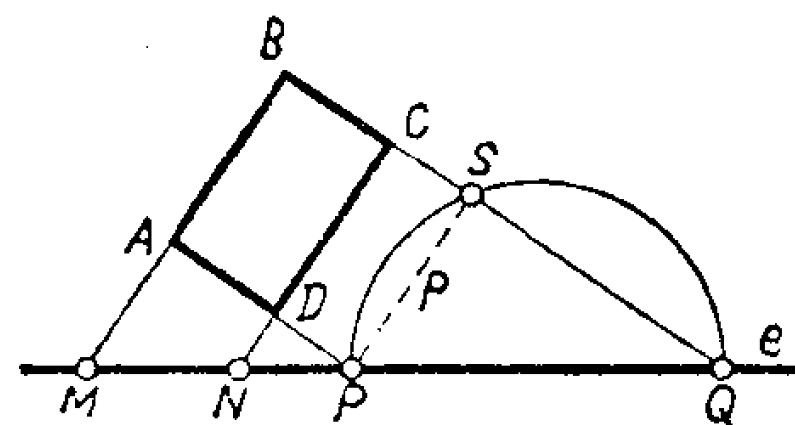


图 13

只要直角△PSQ可以作出来，本题就有解. 因此，也就是当$p<PQ$时，本题有解.

如果这个条件满足，那么△PSQ可以在给定直线e的两侧作. 因此，当$p<PQ$时，本题有两解，它们关于直线e是镜像对称的.

四、1898年试题及解答

13．求使 2^n+1 能被 3 整除的一切自然数 n．

【解】不难验证

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

将 $a=2$，$b=-1$ 代入到这个恒等式得

$$2^n-(-1)^n=3A,$$

其中 A 是在恒等式右端中令 $a=2$，$b=-1$ 时第二个因式的值．因为数 a 和 b 是整数，所以 A 也是整数．

这样一来

$$2^n+1=2^n-(-1)^n+1+(-1)^n=3A+1+(-1)^n$$

当 n 是奇数时，等式的左端能被 3 整除．如果 n 是偶数，2^n+1 被 3 除余 2．★

§12. 同余理论的基本概念

如果利用同余概念，第13题解法的“思路”将是特别明显的．

按定义，**同余式**

$$a\equiv b(mod\ m)$$

（读做：关于模 m，a 与 b **同余**）表示整数 a 和 b 被整数 m 除时余数相等，即它们的差是 m 的倍数：

$$a-b=km,$$

其中 k 是整数❶．例如，同余式

$$2^2\equiv1,\quad 2^4\equiv1,\quad 2^6\equiv1,\ \cdots\ (mod\ 3)$$

意味着数

$$2^2-1=3,\quad 2^4-1=15,\quad 2^6-1=63,\ \cdots$$

能被 3 整除．

右边为零的同余式 $a\equiv0\ (mod\ m)$ 不过是“a 能被 m 整除”的另一种写法．

例如，如果取 $m=3$，那么可把整数集合写成如下的三行：

$$\cdots,-9,-6,-3,0,3,6,9,\cdots,$$
$$\cdots,-8,-5,-2,1,4,7,10,\cdots,$$
$$\cdots,-7,-4,-1,2,5,8,11,\cdots,$$

对模 3 来说，同一行所有的数彼此是同余的，而不同行的数是不同余的．

若取任一正整数 m 作为同余式的模数，则整数集合将排成 m 行．由此看出，对任意的正整数 a，在数

---

❶ 整数 a，b，m 和 k 不一定是正的．但是通常都把模数 m 取作正整数，因为某一个数能否被 m 整除，可完全不考虑 m 的符号．

$$0, 1, 2, \cdots, m-1$$

中总可以找到一个且仅仅一个与a（关于模m）同余的数r．这个数r叫做数a关于模m的剩余（a被m除的余数）．

下面的定理表明，被高斯引入数论中的同余式在许多方面类似于普通的等式．

对任意模m，每一个整数和它自身同余（自反性）．

如果$a\equiv b \pmod m$，**那么**$b\equiv a \pmod m$（对称性）．

如果$a\equiv b \pmod m$，$b\equiv c \pmod m$，**那么**$a\equiv c \pmod m$（传递性）．

如果$a\equiv a' \pmod m$，$b\equiv b' \pmod m$，**那么**

$$a+b\equiv a'+b' \pmod m$$

$$a-b\equiv a'-b' \pmod m, \quad ab\equiv a'b' \pmod m.$$

例如，同余式的最后一个性质可以用下面的方式来证明：如果

$$a\equiv a' \pmod m, \quad b\equiv b' \pmod m,$$

那么

$$a=a'+km, \quad b=b'+lm,$$

其中k和l是整数．这样一来，

$$ab=a'b'+a'lm+b'km+klm^2,$$

因此

$$ab-a'b'=m(a'l+b'k+klm).$$

所得到的等式意味着差$ab-a'b'$能被m整除，即$ab\equiv a'b' \pmod m$．

从刚才所证明的定理可以引出如下的推论：

如果$a\equiv b \pmod m$，**那么**$a^n\equiv b^n \pmod m$．

利用最后这个关系式，13题的解答可以用下面的方式来叙述：因为

$$2\equiv -1 \pmod 3,$$

所以

$$2^n\equiv(-1)^n \pmod 3, \quad 2^n+1\equiv(-1)^n+1 \pmod 3.$$

于是，当n是奇数时

$$2^n+1\equiv 0 \pmod 3,$$

即2^n+1能被3整除，而当n是偶数时

$$2^n+1\equiv 2 \pmod 3,$$

即2^n+1不能被3整除．

14．证明：如果两个三角形有一个角相等，那么其余两个角的正弦之和较大的三角形，它的这两个角之差较小．

用所得结果确定：在什么三角形中，其角的正弦之和达到最大值？

【证明】1）假设α, β, γ和α', β', γ'是两个三角形的角，且$\alpha=\alpha'$．如果

$$\sin\beta+\sin\gamma<\sin\beta'+\sin\gamma', \qquad (1)$$

则

$$2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}<2\sin\frac{\beta'+\gamma'}{2}\cos\frac{\beta'-\gamma'}{2}. \qquad (2)$$

因为$\alpha=\alpha'$，所以$\beta+\gamma=\beta'+\gamma'$，且

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=\sin\frac{\beta'+\gamma'}{2}.$$

由于这些正弦值是正的，所以不等式（2）当且仅当

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2}<\cos\frac{\beta'-\gamma'}{2}$$

时成立，也就是说，若要不等式（2）成立，必需使$\beta'-\gamma'$的绝对值小于$\beta-\gamma$的绝对值，如果这个条件成立了，不等式（2）也一定成立.

2） 如果在某一个三角形中，至少有两个角是不同的，例如β和γ，那么总可以作一个新三角形，使得其角的正弦之和比原来的三角形的正弦之和大. 根据1)中所证明的，这只要使新三角形的角α'和原三角形的角α相等，而每一个角β'和γ'更接近于角β和γ的算术平均值就行了.

因此，当三角形是等边三角形时，正弦之和达到最大值.★

§13. 关于最大值的存在性

在第14题的解答中只是证明了：**在三角形的角的正弦之和所取的值中，如果存在最大值的话，那么它只能在三角形是等边的情况下才能达到.**

但是最大值的**存在性**决不是显然的. 我们感兴趣的正弦之和可以取无穷多个值，在这些值中，不一定有最大的.

最大值的存在性（即等边三角形u的正弦之和所取的值**确实**大于任何其它形式的三角形v的正弦之和）可用下面的方式来证实：

1） 如果在三角形v中，一个角等于60°，那么在三角形u和v中有一个角相等（均为60°）. 在三角形u中，其它两个角之差为零，因而小于三角形v的其它两个角之差. 由14题中的证明便可推出，在三角形v中，这些角的正弦之和的值比三角形u的相应的值要小.

2） 如果三角形v的任何一个角都不等于60°，且这些角表示为：$\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$，那么显然有$\alpha<60°<\gamma$，即

$$60°-\alpha \quad 和 \quad \gamma-60°$$

是正数.

再作一个三角形v'，使$\alpha'=60°$，$\beta'=\beta$，因而$\gamma'=\alpha+\gamma-60°$. 这时

$$\gamma'-\alpha'=(\alpha+\gamma-60°)-60°=(\gamma-60°)-(60°-\alpha)$$

且

$$|\gamma'-\alpha'|=(\gamma-60°)-(60°-\alpha),$$

或者

$$|\gamma'-\alpha'|=(60°-\alpha)-(\gamma-60°),$$

这要看右边两表达式中哪一个是正的. 因此

$$|\gamma'-\alpha'|<(\gamma-60°)+(60°-\alpha)=\gamma-\alpha=|\gamma-\alpha|.$$

我们知道，对于三角形v'（因为$\alpha'=60°$），它的其它两个角的正弦之和小于三角形u的相应角的正弦之和，而根据在第14题中所证明的，三角形v的两个角的正弦之和小于三角形v'的两个角的正弦之和，因为$\beta=\beta'$和（正像我们刚才看到的）三角形v'的其它两个角之

差的绝对值小于三角形 v 的两角之差的绝对值.

15. 给定在一直线上的四个点 A, B, C, D. 求作一正方形，使得正方形的一组对边的延长线和这直线相交于点 A 和 B，而另一组对边的延长线和这直线相交于 C 和 D.

【解】假设 $PQRS$ 是满足本题条件的正方形（图14）. 如果将它绕着中心旋转90°，那么线段 CD 旋转到线段 $C'D'$. 这时自然有 $C'D' \perp CD$，且 $C'D' = CD$. 由此推出，如果从点 B 作点 A, B, C, D 所在的直线的垂线，且在其上取线段 $BB' = CD$，那么所得到的点 B' 和点 A 确定一直线，所要求的正方形的一边 PS 就在这直线上.

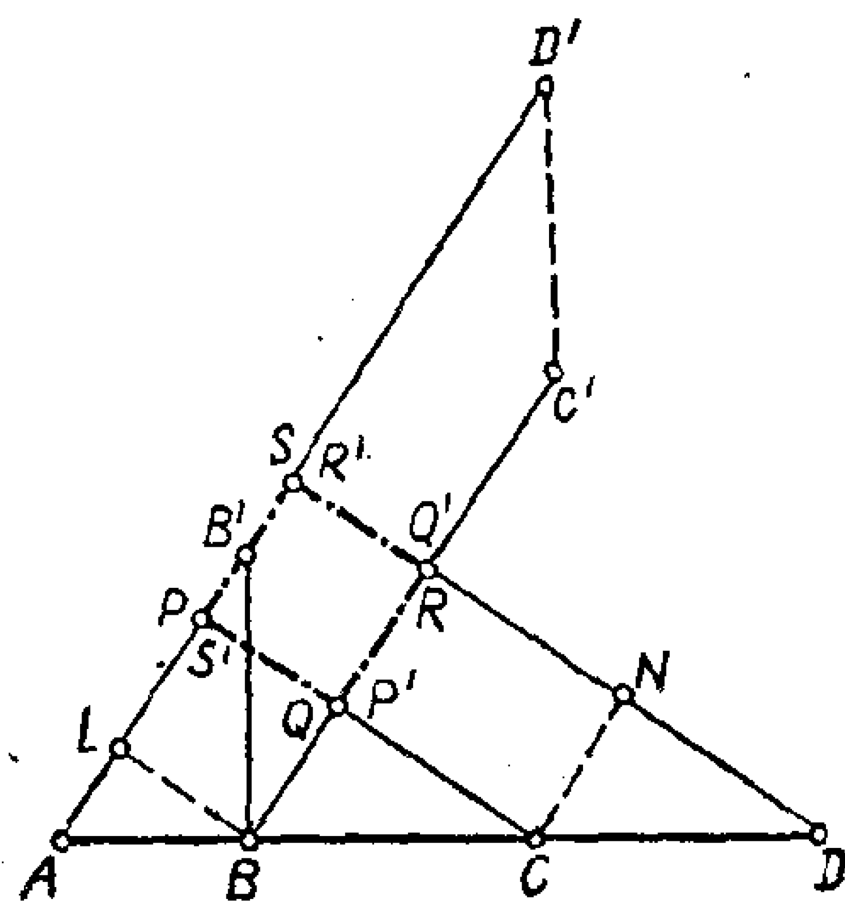


图 14

由此便可知道作正方形 $PQRS$ 的步骤. 由点 B 作垂直于 CD 的直线并在其上取线段 $BB' = CD$. 作直线 AB'，过点 B 作直线和直线 AB' 平行，由点 C 和 D 作直线垂直于直线 AB'，这些直线所交成的便是正方形 $PQRS$.

因为由点 B 可以向两个方向作垂直于直线 CD 的直线，所以有两个正方形满足本题条件. 这两个正方形关于点 A，B，C，D 所在的直线是对称分布的. 在图14中仅仅作出一个正方形.

论证 由点 B 作 $BL \perp AB'$，由点 C 作 $CN \perp DS$. 在直角三角形 BLB' 和 CND 中，根据作图，$BB' = CD$，而 $\angle LBB' = \angle NCD$（分别垂直的边所夹的锐角）. 因此，$\triangle BLB' \cong \triangle CND$，所以 $BL = CN$，从而所作的四边形的边相等且彼此垂直，故是一个正方形.

注. 对于任意给定的四个点，所要求的正方形也可以作（图15）.

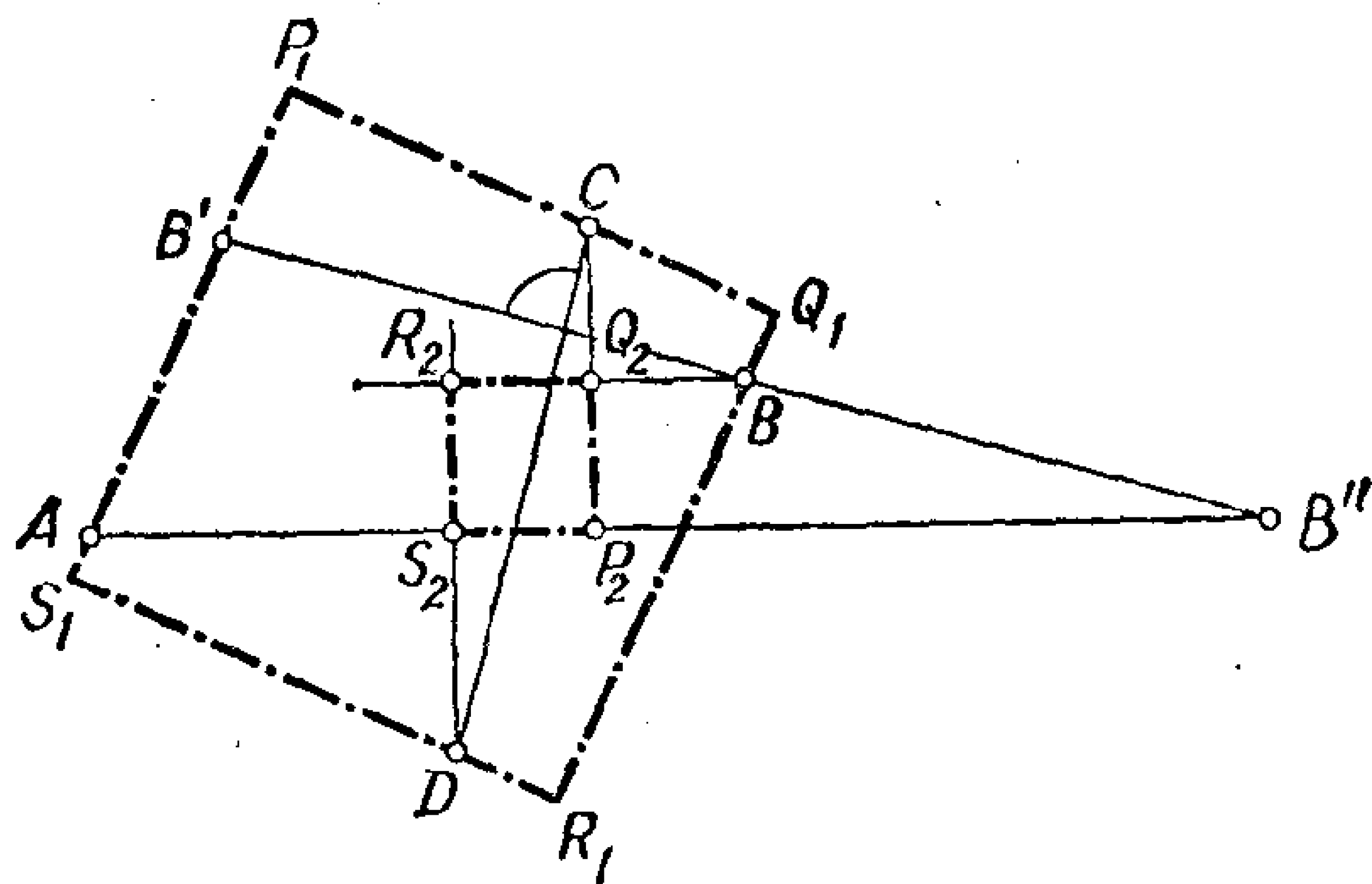


图 15

五、1899年试题及解答

16. 单位圆被点 A_0，A_1，A_2，A_3，A_4 分成五个等弧. 证明：弦 A_0A_1 和 A_0A_2 之长满足等式

$$(A_0A_1 \cdot A_0A_2)^2 = 5.$$

【证法1】单位圆的弦长等于它所对的圆心角的一半的正弦的两倍. 因此（图16和17）

$$A_0A_1 = 2\sin 36° = 4\sin 18° \cos 18°,$$
$$A_0A_2 = 2\sin 72° = 2\cos 18°$$

和

$$A_0A_1 \cdot A_0A_2 = 8\sin 18° \cdot \cos^2 18°.$$

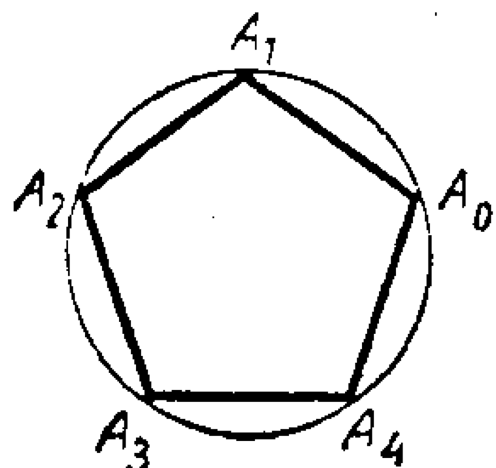


图 16

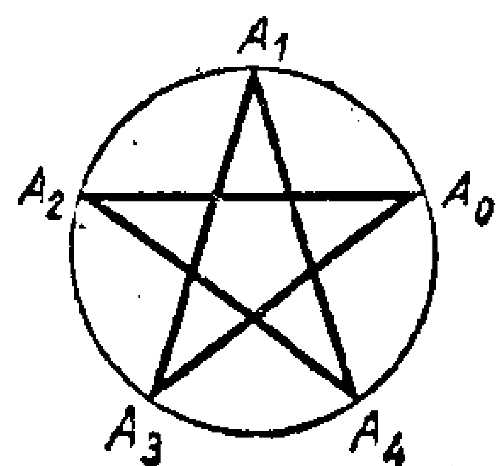


图 17

但是角 18° 的正弦的两倍等于内接于单位圆的正十边形的边长，大家知道，这个边长等于

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

因此

$$\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

和

$$\cos^2 18° = 1 - \sin^2 18° = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{5+\sqrt{5}}{8} = \sqrt{5}\frac{\sqrt{5}+1}{8}.$$

由此求得

$$8\sin 18° \cos^2 18° = \sqrt{5}\frac{5-1}{4} = \sqrt{5},$$

于是

$$(A_0A_1 \cdot A_0A_2)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5,$$

这就是要证明的★.

【证法2】这个证法不需要预先知道正凸十边形的边长.

边 A_0A_1 和 A_0A_2 的长度可以很简单地用角 φ 的余弦来表示，这里的 φ 是这样的角，5φ 等于 $90° \cdot k$，其中 k 是奇整数，即 $\cos 5\varphi = 0$. 不失一般性，可以认为所研究的仅仅是包含在 0° 到 180° 的范围内的角. 事实上，对于任何超过 180° 的角，总可以在上面所限定的范围内找

到另一个角，使得两个角的余弦相等.

即，仅仅研究下面的角:

$$\cos\frac{1}{5}90^\circ=\cos 18^\circ=\sin 72^\circ=\frac{1}{2}A_0A_2\text{ ,}$$

$$\cos\frac{3}{5}90^\circ=\cos 54^\circ=\sin 36^\circ=\frac{1}{2}A_0A_1\text{ ,}$$

$$\cos\frac{5}{5}90^\circ=\cos 90^\circ=0\text{ ,}$$

$$\cos\frac{7}{5}90^\circ=\cos 126^\circ=-\sin 36^\circ=-\frac{1}{2}A_0A_1\text{ ,}$$

$$\cos\frac{9}{5}90^\circ=\cos 162^\circ=-\cos 18^\circ=-\frac{1}{2}A_0A_2.$$

在三角方程 $\cos 5\varphi=0$ 中做替换 $x=\cos\varphi$，我们可以得到能够求出所有上面的余弦值的方程. 为此，利用可通过 $x=\cos\varphi$ 来表示

$$\cos n\varphi \quad 和 \quad \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

的递推关系式，$n=0$，1，2，…（用比 $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$ 来代替 $\sin(n+1)\varphi$，是为了避免二次根式）. 对应的表达式用 $T_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 来表示★.

当 $n=0$ 和 $n=1$ 时，我们得到

$$\cos 0=T_0(x)=1\text{ ,}\qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}=U_0(x)=1\text{ ,}$$

$$\cos\varphi=T_1(x)=x\text{,}\qquad \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}=2\cos\varphi=U_1(x)=2x.$$

为了继续计算，利用公式

$$\cos(n+1)\varphi=\cos\varphi\cos n\varphi-\sin\varphi\sin n\varphi=$$

$$=\cos\varphi\cos n\varphi-(1-\cos^2\varphi)\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\text{,}$$

即

$$T_{n+1}(x)=xT_n(x)-(1-x^2)U_{n-1}(x) \tag{1}$$

和类似的表达式

$$\frac{\sin(n+2)\varphi}{\sin\varphi}=\frac{1}{\sin\varphi}[\sin\varphi\cos(n+1)\varphi+\cos\varphi\sin(n+1)\varphi]\text{ ,}$$

即

$$U_{n+1}(x)=T_{n+1}(x)+xU_n(x). \tag{2}$$

轮流利用公式（1）和（2），我们求得

$$T_2(x)=xT_1(x)-(1-x^2)U_0(x)=x\cdot x-(1-x^2)=2x^2-1\text{ ,}$$
$$U_2(x)=T_2(x)+xU_1(x)=(2x^2-1)+x\cdot 2x=4x^2-1\text{ ,}$$
$$T_3(x)=x(2x^2-1)-(1-x^2)2x=4x^3-3x\text{,}$$
$$U_3(x)=4x^3-3x+x(4x^2-1)=8x^3-4x\text{,}$$

$$T_4(x)=x(4x^3-3x)-(1-x^2)(4x^2-1)=8x^4-8x^2+1,$$
$$U_4(x)=8x^4-8x^2+1+x(8x^3-4x)=16x^4-12x^2+1,$$

和

$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x=x[(2x)^4-5(2x)^2+5].$$

方程$T_5(x)=0$的根是数

$$0,\quad \pm\frac{1}{2}A_0A_1,\quad \pm\frac{1}{2}A_0A_2.$$

舍去方程左边对应于零根的因式x，用u表示$(2x)^2$，我们得到方程

$$u^2-5u+5=0,$$

它的根等于$(A_0A_1)^2$和$(A_0A_2)^2$.

根的乘积等于常数项. 因此

$$(A_0A_1\cdot A_0A_2)^2=5,$$

这就是所要证明的. ★

§14. 关于正星形多边形

弦A_0A_1和单位圆的内接正凸五边形的边重合（图16），而弦A_0A_2和这个圆的正星形五边形的边重合（图17）.

在更广泛的意义下，我们把每一个那样的图形叫做正内接n边形，这些图形是这样得到的，如果从圆上任意一点A_0开始，可以引n个等长的弦，而且第n个弦的末端和A_0重合，所有其它弦的端点彼此不同，和A_0也不同.

对于给定的n，如果选取所对的圆心角为

$$\frac{k}{n}360^\circ$$

的弦，这里k是小于$\frac{n}{2}$的任何一个和n互素的正整数，那么我们得到所有的内接正n边形（各种不同形状的）. 如果数k和数n不互素，那么在作出n个弦之前就回到了原来的点A_0. 例如，如果$n=10$，$k=4$，那么得到星状的正五边形，而其余的分点仍然空着.

当$k=1$时，我们得到正凸n边形. 当$k>1$时，内接正n边形叫做星形的.

如果$n=p$是奇素数，那么k可以取1到$\frac{p-1}{2}$的所有的值. 因此，在这种情况下，有$\frac{p-1}{2}$个不同的正p边形.

在一般情况下，不同的正n边形的个数小于$\frac{n-1}{2}$. 例如，当$n=24$时，只有4个不同的正24边形.

§15. 契比雪夫多项式

16题的断言是下面比较一般的定理的特殊情况：

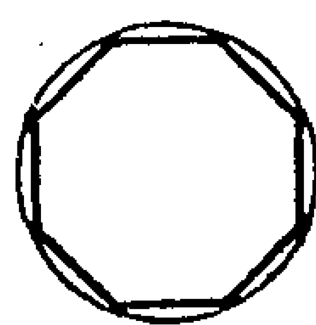
如果n等于任何一个素数p或这个素数的乘幂，那么内接于单位圆的不同正n边形的边长乘积的平方等于p.

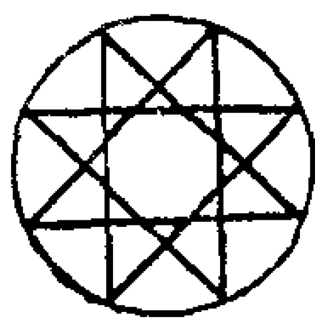
例如，内接于单位圆的正八边形（图18和19）的边长分别等于

$$2\sin\frac{45^\circ}{2} \quad 和 \quad 2\sin\frac{135^\circ}{2}=2\cos\frac{45^\circ}{2}.$$

而它们的乘积等于

$$4\sin\frac{45^\circ}{2}\cos\frac{45^\circ}{2}=2\sin 45^\circ=\sqrt{2}.$$


图 18


图 19

为了证明一般的定理，只要比较详细地研究相应的方程

$$T_1(x)=0, \quad U_1(x)=0, \quad T_2(x)=0, \quad U_2(x)=0, \cdots$$

的系数就行了．表达式 $T_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 叫做**第一类和第二类契比雪夫❶多项式**，它们是由

$$\cos n\varphi \quad 和 \quad \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$$

用变量替换 $x=\cos\varphi$ 而得到的．

§16. 复数的一个几何应用

在解16题时，我们可以利用下面的多边形的边长，对角线以及边的个数之间的关系式．**设 A_0，A_1，…，A_{n-1} 是内接于单位圆的正 n 边形的顶点．这时**

$$A_0A_1\cdot A_0A_2\cdot\cdots\cdot A_0A_{n-1}=n.$$

下面的简单证明，需要先熟悉复数．

我们将以平面上的点或矢量来表示复数．以坐标原点O为圆心画一个单位圆，并作它的内接正 n 边形，使得一个顶点和实轴上的点1重合（图20）．用 ε 表示 n 边形中最靠近1的顶点．这时其余的顶点将分布在点 ε^2，ε^3，…，ε^{n-1} 上．因为复数 ε 的绝对值（或模）等于1，所以 ε 的任意次幂的绝对值都等于1．实轴与由坐标原点O到点 ε 的方向之间的夹角是周角的 $1/n$．因此，指向 ε^2，ε^3，…，ε^{n-1} 的方向与实轴所夹的角分别等于周角的 $2/n$，$3/n$，…，$(n-1)/n$．由点 ε^k 到1的矢量对应于复数 ε^k-1（即这样一个数，将它加1得到 ε^k）．考虑到这一点，我们不难写出上面的断言中所说的所有对角线和边．定理所要证明的断言写成复数形式就成为

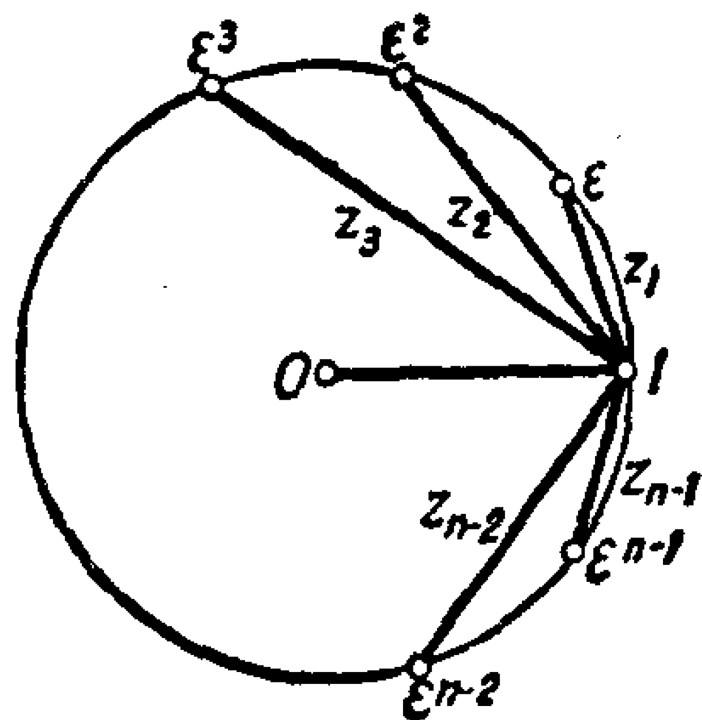


图 20

$$|(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{n-1})|=n. \qquad (1)$$

为了证明这个关系式，首先要注意到

$$\varepsilon^n=1,$$

于是对于任何整数 k

$$(\varepsilon^k)^n=(\varepsilon^n)^k=1.$$

因此，数1，ε，ε^2，…，ε^{n-1} 使多项式

$$z^n-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1)$$

---

❶ П.Л.契比雪夫（1821—1894）——杰出的俄国数学家．数论中经常提到的下述定理——以贝尔特兰假设的名字而著名——的证明是他作出的：

若 $x>1$，那么总可以找到这样一个素数 p，使得 $x<p<2x$．例如，如果 $x=1.1$，那么 $1.1<2<2.2$，而如果 $x=10$，那么 $10<11, 13, 17, 19<20$．

变成零. 因为右边第一个因子仅当$z=1$时为零，所以复数ε，ε^2，…，ε^{n-1}是多项式

$$f(z)=z^{n-1}+\cdots+z+1$$

的根. 这使$f(z)$可表示为乘积的形式

$$f(z)=(z-\varepsilon)(z-\varepsilon^2)\cdots(z-\varepsilon^{n-1}).$$

(见§17). 将$z=1$代入，我们求得

$$(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{n-1})=f(1)=n. \quad (2)$$

这样一来，不仅关系式（1）成立，而且更一般的关系式（2）也成立：不仅是乘积的绝对值等于n，而且乘积的本身也等于n.

§17. 关于将多项式分解成因式

1) **假设$f(z)$是任意选取的多项式，α是它的根。这时$f(z)$可表示成次数比$f(z)$低一次的多项式和一次因式$z-\alpha$的乘积.** ❶

证明. 假设

$$f(z)=a_0z^k+a_1z^{k-1}+\cdots+a_{k-1}z+a_k,$$

其中$a_0\neq0$，则

$$f(\alpha)=a_0\alpha^k+a_1\alpha^{k-1}+\cdots+a_{k-1}\alpha+a_k,$$

及

$$f(z)-f(\alpha)=a_0(z^k-\alpha^k)+a_1(z^{k-1}-\alpha^{k-1})+\cdots+a_{k-1}(z-\alpha). \quad (3)$$

利用恒等式

$$z^l-\alpha^l=(z-\alpha)(z^{l-1}+z^{l-2}\alpha+\cdots+z\alpha^{l-2}+\alpha^{l-1}),$$

将（3）式右边所有括号中的差都分解成两个因式：$z-\alpha$和比原来的差低一次的多项式. 提取因式$z-\alpha$以后，唯一的$k-1$次项是由第一个差产生的，且系数为a_0. 这样一来，

$$f(z)-f(\alpha)=(z-\alpha)f_1(z),$$

其中$f_1(z)$是比$f(z)$低一次的多项式，而且$f(z)$和$f_1(z)$的最高次项的系数相等.

于是我们证明了，如果$f(\alpha)=0$，那么

$$f(z)=(z-\alpha)f_1(z).$$

2) 如果α_1，α_2，…，α_r是多项式$f(z)$的不同的根，那么根据所证明的，$f(z)$可以表示成

$$f(z)=(z-\alpha_1)f_1(z).$$

因为α_2也使得多项式$f(z)$变成零，所以

$$0=f(\alpha_2)=(\alpha_2-\alpha_1)f_1(\alpha_2).$$

根据条件$\alpha_2\neq\alpha_1$，因此等式右边的乘积仅当第二个因式为零时才能为零. 这样一来，

$$f_1(z)=(z-\alpha_2)f_2(z), \qquad f(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)f_2(z).$$

如果$r>2$，那么不难看出，由$f_2(z)$可分解出因式$(z-\alpha_3)$，如此作下去，最后我们可把$f(z)$写成

$$f(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_r)g(z) \quad (1)$$

的形式.

每提出一个因式$(z-\alpha)$都使得剩下的多项式降低一次，因此多项式$g(z)$的次数等于

❶ 在我国的中学里，这个定理通常叫做**裴蜀定理**. ——俄译编辑注.

$k-r$. 显然，提取形如（$z-\alpha$）的因式并不会改变最高次项的系数，于是多项式 $g(z)$的最高次项的系数等于 a_0.

从上面的说明推出，如果多项式 $f(z)$不同的根的个数等于它的次数，那么它可以表示成因式 $z-\alpha_i$ 和某一个常数（零次多项式 $g(z)$）的乘积的形式，其中 α_i（$i=1, 2, \cdots, k$）是多项式的根. 因为多项式 $g(z)$的最高次项（是唯一的一项）的系数和多项式 $f(z)$的最高次项的系数重合，所以在这种情况下 $g(z)=a_0$. 这样一来，

$$f(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_k)a_0.$$

3）在上面所得出的公式（1）中 $r\leqslant k$, 因为分出对应于多项式 $f(z)$的根的一次因式只能在剩下的多项式 $g(z)$的次数未变成零时进行. 这样一来，任何一个多项式的不同的根的个数不能大于它的次数.

可能有这样的情况：$r<k$且 $g(z)$也有根，但这些根只能和多项式 $f(z)$的已经分出来的根相重合. 这就意味着在多项式 $f(z)$的分解式中，所包含的某些因式（$z-\alpha_i$）不是一次的，而是更高次的. 在剩下的多项式的次数未变成零时，尽最大可能重复提取相同的因式. 因此，在分解式

$$f(z)=(z-\alpha_1)^{l_1}(z-\alpha_2)^{l_2}\cdots(z-\alpha_r)^{l_r}\,g(z)$$

中，正整数 $l_1, l_2, \cdots, l_r$ 的和不大于 k（k是多项式 $f(z)$的次数）. 当 $l_1+l_2+\cdots+l_r=k$时，多项式 $g(z)$又化为 a_0.

例如，如果 $l_1>1$, 那么 α_1 叫做多项式 $f(z)$的**重根**（或 l_1 重根），而幂指数 l_1 叫做根 α_1 的**重数**. 利用这个概念，我们可以将所得到的关于多项式的根的个数的性质用下面的方式来叙述：**多项式的根的个数不能大于它的次数，即使每一个根按它的重数来计算也是如此.**

如果我们仅限于研究实根，那么多项式的根的个数可能小于它的次数. 例如，多项式 x^2+1没有任何一个实数根. 如果我们从实数根转到研究复数根，那么就是另外一回事了. 高斯证明了，**在复数域中，所有一次的和高次的多项式至少有一个根**. 由此推出,在复数域中，每一个多项式有和它次数一样多的根，这里在计算根的个数时是按它们的重数来计算的. 这个定理通常叫做**代数基本定理**，它在实质上概括了我们前面所说的关于多项式的根的个数的所有内容.

17. 假设 x_1 和 x_2 是方程

$$x^2-(a+d)x+ad-bc=0$$

的根. 证明：这时 x_1^3 和 x_2^3 是方程

$$y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3=0$$

的根.

【证明】对方程

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0 \qquad (1)$$

应用根与系数的关系得

$$a+d=x_1+x_2, \qquad ad-bc=x_1x_2,$$

因此

$$a^3+d^3+3abc+3bcd=a^3+d^3+3(a+d)bc=$$
$$=(a+d)^3-3(a+d)(ad-bc)=$$
$$=(x_1+x_2)^3-3(x_1+x_2)x_1x_2=x_1^3+x_2^3.$$

$$(ad-bc)^3=x_1^3x_2^3.$$

这样一来，方程

$$y^2-(a^3+d^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3=0 \qquad (2)$$

可以表示成

$$y^2-(x_1^3+x_2^3)y+x_1^3x_2^3=0$$

的形式，分解因式得

$$(y-x_1^3)(y-x_2^3)=0.$$

于是方程（2）的根等于x_1^3和x_2^3，这就是所要证明的.

§18. 关于去掉无理方程中的根号

我们引入新的记号：$p=-(a+d)$，$q=(ad-bc)$，第17题可以改述成下面的样子.

设y是一个数，它的立方根满足方程

$$x^2+px+q=0.$$

能否写出y的（有理）代数方程，如果可以，那么这个方程的系数和原来方程的系数有什么联系？这个问题还可以更简短地叙述作：能否去掉无理方程

$$\sqrt[3]{y^2}+p\sqrt[3]{y}+q=0 \qquad (1)$$

的三次根号，如果可以，那么用什么方法去掉？

答案包含在17题的条件中，只需验证一下它的正确性. 但是现在我们不直接利用所说的答案，而来说明去掉无理方程中的根号的一般方法.

将方程（1）乘以$\sqrt[3]{y}$，再将所得到的方程又乘以$\sqrt[3]{y}$：

$$p\sqrt[3]{y^2}+q\sqrt[3]{y}+y=0, \qquad (2)$$

$$q\sqrt[3]{y^2}+y\sqrt[3]{y}+py=0. \qquad (3)$$

首先从方程（1）和（2）中消去$\sqrt[3]{y^2}$，然后从方程（1）和（3）中消去$\sqrt[3]{y^2}$：

$$(q-p^2)\sqrt[3]{y}+y-pq=0,$$

$$(y-pq)\sqrt[3]{y}+py-q^2=0.$$

最后，从后两个方程再消去$\sqrt[3]{y}$，我们就得到方程

$$(py-q^2)(q-p^2)-(y-pq)^2=0,$$

按y的降幂排列即为

$$y^2+(p^3-3pq)y+q^3=0.$$

将$p=-(a+d)$，$q=(ad-bc)$代入到上面的方程，我们得到本题条件中所说的第二个方程.

在我们所研究的情况中，根号下仅仅是未知数y本身. 但是在更一般的情况下，只要根号下是由常系数和未知数通过算术运算以及开方运算所构成的任意表达式，去掉方程中的根号仍然是可以的. 如果方程含有表达式$\sqrt[n]{P}$，那么我们将方程多次地乘以$\sqrt[n]{P}$，以使我们得到足够的为消去乘幂$(\sqrt[n]{P})^k$所需的方程. 我们可以得到足够的方程，因为所有这些乘幂不外乎是通过$(n-1)$个不同的乘幂有理地表示的. 由所得到的方程一个一个地消去表达式$(\sqrt[n]{P})^k$，其中$k=1,2,\cdots,n-1$，最后我们得到不含有根号的方程.

如果这个方程还包含有其它的根式或根式的乘幂，那么只要把消去无理性的全部过程再重复进行一次，我们就可以去掉这种无理性，并且经过有限步以后，就可以得到根号下不再

含有未知数的方程.

于是我们看到，**每一个无理方程总可以变换成有理的形式，不管它含有多少个根式以及怎样的乘幂.** 我们不详细地证明这个断言了.

虽然上述方法可以去掉方程中的任意多个根式，把它化成为有理的形式，但是应该注意到，随着根式个数的增加或它们的乘幂的增长，运算的难度也将很快地上升.

18. 证明：对任意自然数 n，表达式

$$A=2903^n-803^n-464^n+261^n$$

能被1897整除.

【证明】 由解13题时所利用的恒等式可以推出，任意两个整数的 n 次幂之差总可以被这两个数之差整除.

考虑到这一点，我们将数 A 写成

$$A=(2903^n-464^n)-(803^n-261^n)$$

的形式，由此看出

2903^n-464^n 能被 $2903-464=2439=9\times 271$ 整除，

803^n-261^n 能被 $803-261=542=2\times 271$ 整除.

因此 A 能被271整除，即 $A=271\times B$，这里 B 是某一整数.

但是，数 A 还可以表示成

$$A=(2903^n-803^n)-(464^n-261^n)$$

的形式，由此看出 A 能被 7 整除，因为

2903^n-803^n 能被 $2903-803=2100=7\times 300$ 整除，

464^n-261^n 能被 $464-261=203=7\times 29$ 整除.

因为数271不能被素数 7 整除，那么 $A=271\times B$ 能被 7 整除，必须 B 能被 7 整除（见§2）. 这样一来 $B=7\times C$，这里 C 是某一整数. 这时 $A=271\times 7\times C=1897\times C$. 因此，$A$ 能被1897整除，这就是所要证明的.

六、1900年—1901年试题及解答

19. 假设 a, b, c, d 和 m 是这样的整数，使

$$am^3+bm^2+cm+d$$

能被 5 整除，且数 d 不能被 5 整除．证明：总可以找到这样的整数 n，使得

$$dn^3+cn^2+bn+a$$

也能被 5 整除．

【证明】 数 m 不可能被 5 整除．事实上，如果 m 能被 5 整除，那么由等式

$$am^3+bm^2+cm+d=m(am^2+bm+c)+d$$

看出，数 d 应该能被 5 整除，这与本题条件（d 不能被 5 整除）相违．

因此，数 m 可以表示成 $5k+r$ 的形式，其中 k 是某个整数，而 r 是小于 5 的正整数．当 r 等于 1，2，3，4 时，我们取 n 分别等于 1，3，2，4．这时乘积 mn 被 5 除总是余 1．

设
$$A=am^3+bm^2+cm+d,$$
$$B=a+bn+cn^2+dn^3.$$

从上二式消去 d 得

$$An^3-B=a(m^3n^3-1)+bn(m^2n^2-1)+cn^2(mn-1)=$$
$$=(mn-1)[a(m^2n^2+mn+1)+bn(mn+1)+cn^2].$$

这样一来，对于我们所选取的数 n，差 An^3-B 能被 5 整除（这是因为 $mn-1$ 能被 5 整除）．根据本题条件，A 能被 5 整除，所以由 An^3-B 能被 5 整除便可推出 B 能被 5 整除．

20. 已知边 AB，内切圆半径 r 以及与边 AB、边 CA 及 CB 的延长线相切的傍切圆的半径 r_C，求作 $\triangle ABC$．

【解】 1） 假设 D 是 $\triangle ABC$ 的内切圆 k 和边 BC 相切的切点，D' 是傍切圆 k' 和边 BC 的延长线相切的切点（图21）．

由 §8 中的关系式（1）和（2）知道，如果把所研究的三角形的边长记作 a, b, c，半周长记作 p，那么

$$CD=p-c, \qquad CD'=p,$$

这样一来，

$$DD'=p-(p-c)=c.$$

2） 圆 k 和 k' 不相交．这使 r, r_C 和 c 之间能够建立关系式．事实上，我们研究直角 $\triangle OPO'$．它的直角边 $OP=DD'=c$，$O'P=r_C-r$，而斜边 $OO'\geqslant r_C+r$．因此，根据勾股定理有

$$(r_C+r)^2\leqslant c^2+(r_C-r)^2,$$

即❶

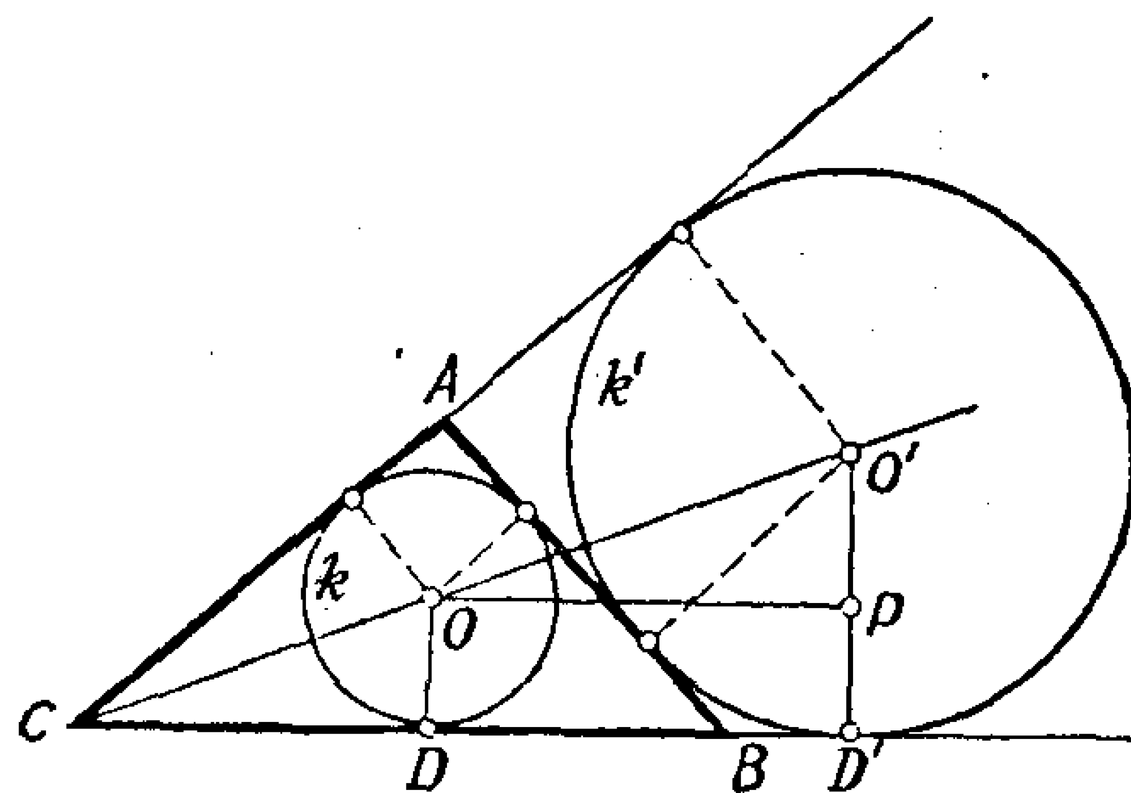


图 21

❶ 可见第93题的解答．

$$rr_C \leqslant \left(\frac{c}{2}\right)^2. \qquad (1)$$

3） 如果条件（1）满足，此外，还有 $r_C > r$，那么取长为 c 的线段 DD'，且由它的端点作垂线 $OD=r$ 和 $O'D'=r_C$. 以点 O 为圆心、以 r 为半径画圆 k，以点 O' 为圆心、以 r_C 为半径画圆 k'. 因为 $r_C > r$，所以直线 OO' 和直线 DD' 相交. 交点就是所要求的三角形的顶点 C.

圆 k 和 k' 不相交，这是因为从不等式（1）推出❶

$$OO'^2 = c^2 + (r_C - r)^2 = (r_C + r)^2 + c^2 - 4rr_2 \geqslant (r_C + r)^2.$$

作圆 k 和 k' 的内公切线. 过点 C 作两圆的两条外公切线，和内公切线分别交于点 A 和 B. 所得的 $\triangle ABC$ 满足本题的所有条件，这是因为根据1）中的证明有

$$AB = DD' = c.$$

21. 从高为300m的陡峭的峭壁上接连落下两个水滴. 当第一个水滴下落了0.001mm时，第二个水滴开始下落. 问当第一个水滴到达峭壁的山脚时，两个水滴之间的距离是多少？（答案要求精确计算到0.1mm；不计空气阻力.）

【解】 假设 σ 是当第二个水滴开始下落时两个水滴之间的距离，s 和 s' 是当第一个水滴到达峭壁的山脚时第一个水滴和第二个水滴所走过的距离（注意，两个水滴是从峭壁的顶点落下的）. 如果距离 σ，s 和 s' 是水滴在时间 τ，t 和 $t-\tau$ 内走过的，那么

$$\sigma = \frac{g\tau^2}{2}, \qquad s = \frac{gt^2}{2}, \qquad s' = \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

因此

$$s' = \frac{g}{2}\left(\sqrt{\frac{2s}{g}} - \sqrt{\frac{2\sigma}{g}}\right)^2 = s - 2\sqrt{s\sigma} + \sigma$$

和

$$s - s' = 2\sqrt{s\sigma} - \sigma.$$

在我们所研究的情形中，$\sigma = 1/1000mm$，而 $s = 300000mm$. 因此

$$s - s' = 34.6mm.$$

22. 证明：当且仅当指数 n 不能被 4 整除时，

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \qquad (1)$$

能被 5 整除，其中 n 是正整数.

【证法 1】 当 $n=4$ 时（1）中的每一项都可表成 $5k+1$ 的形式：

$$1^4=1, \quad 2^4=16=3\times5+1, \quad 3^4=81=16\times5+1, \quad 4^4=256=51\times5+1.$$

因此，如果 A 是 1，2，3，4 中的任何一个数，那么 A^{4l} 仍可表成 $5k+1$ 的形式，即 $A^{4l}-1$ 能被 5 整除. 事实上，由13题的解中所用的恒等式可知：$A^{4l}-1$ 能被 A^4-1 整除，而根据上面所说明的，A^4-1 是能被 5 整除的.

每一个正整数都可以表示成 $4l+r$ 的形式，其中 l 是正整数或零，r 是 0，1，2，3 中的

❶ 不难看出，条件 $r_C > r$ 对于本题有解是必须的. 两个点 O 和 O' 都在 $\angle C$ 的平分线上（图21），但 O' 离 C 远，由此推出 $r_C > r$. ——俄译者注.

某一个数. 因此

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$$

可以写成

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2^{4l}\times 2^r + 3^{4l}\times 3^r + 4^{4l}\times 4^r \\ &= 1 + (5k_1+1)2^r + (5k_2+1)3^r + (5k_3+1)4^r \\ &= 5m + R, \end{aligned}$$

其中 m 是正整数，而

$$R = 1 + 2^r + 3^r + 4^r.$$

因此，当而且仅当 R 能被 5 整除时，S_n 能被 5 整除.

如果 n 能被 4 整除，那么 $r=0$，$R=4$. 因此，这时 S_n 不能被 5 整除. 如果 n 不能被 4 整除，那么余数 r 等于1, 2或3中的一个数. 这时数 R 等于10，30或100，从而 S_n 能被 5 整除.

【证法 2】❶首先不难验证（见 §12）

$$1^4 = 1 \equiv 1 \pmod 5, \qquad 2^4 = 16 \equiv 1 \pmod 5,$$
$$3^4 = 81 \equiv 1 \pmod 5, \qquad 4^4 = 256 \equiv 1 \pmod 5 \bigstar.$$

假设 $n = 4k + r$，其中 k 是某个整数，而 $r = 0, 1, 2, 3$. 如果 a 表示数1, 2, 3, 4中的任何一个数，那么由前面所写的同余式推出 $a^4 \equiv 1 \pmod 5$，这意味着 $a^{4k} \equiv 1 \pmod 5$. 因此

$$a^n = a^{4k}\cdot a^r \equiv a^r \pmod 5.$$

由此得

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1^r + 2^r + 3^r + 4^r \pmod 5.$$

由此推出

当 $r=0$ 时，$S_n \equiv 4 \equiv 4 \pmod 5$，
当 $r=1$ 时，$S_n \equiv 10 \equiv 0 \pmod 5$，
当 $r=2$ 时，$S_n \equiv 30 \equiv 0 \pmod 5$，
当 $r=3$ 时，$S_n \equiv 100 \equiv 0 \pmod 5$.

因此，当而且仅当 n 不能被 4 整除时，S_n 能被 5 整除. 这就是所要证明的★.

§19. 费尔马小定理

22题的两个证法都基于下面的事实：

$$1^4 \equiv 2^4 \equiv 3^4 \equiv 4^4 \equiv 1 \pmod 5.$$

这是下面的费尔马❷小定理的特殊情况.

如果整数 a 不能被素数 p 整除，那么

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

---

❶ 证法 2 与证法 1 并无本质区别，只是在证法 2 中，应用了同余式运算，因而更简洁明了.
——中译者注.

❷ П. 费尔马（1601—1665）——法国数学家. 他以许多著名的定理丰富了数论. 按照那个时代的惯例，这些定理发表时是没有证明的. 所说的费尔马小定理后来被其他的数学家证明了，这在很大程度上促进了数论的发展.

费尔马小定理有许多证明. 现在最负名望的是欧拉提出的两个证明. 莱布尼兹早就证明了费尔马定理，但是他的证明直到1863年才发表在莱布尼兹著作集中. 另外高斯也独立地给出了类似的证明. 这里的证明实质上是莱布尼兹和高斯的证明的简化变形.

为了证明这一点，我们来研究任意 m 个元素的 p 位重复排列. 把所有 m^p 个排列分成类，使得属于同一类的是那些而且仅仅是那些在循环置换时由一个变到另一个的排列（见 § 4）. 构成任何一类的排列的个数和数 p 的一个约数重合，即或者等于 1，或者等于 p.

这样一来，由自己本身重复的某些排列构成单独的类，它是由唯一的一个元素组成的. 总共有 m 个这样的排列❶. 其余的 $m^p - m$ 个排列被分成类，每一类有 p 个排列. 因此，数 $m^p - m$ 等于素数 p 和这些类的个数的乘积，即

$$m^p \equiv m \pmod p.$$

现在假设 a 是任意一个整数，而 m 是这样一个正整数，使

$$a \equiv m \pmod p.$$

这时根据早先所证明的

$$a^p \equiv m^p \equiv m \equiv a \pmod p,$$

即

$$a(a^{p-1}-1) \equiv a^p - a \equiv 0 \pmod p.$$

但是两个整数的乘积要被素数 p 整除，只有当素数 p 能除尽其中一个因子时才有可能（见 § 2.1））. 因此，若 a 不能被 p 整除，那么所得到的同余式只有在 $a^{p-1}-1$ 能被 p 整除的条件下才是正确的，即

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

这正是费尔马定理的断言.

23. 证明：数

$$u = \mathrm{ctg}22.5^\circ$$

是二次方程的根，而数

$$v = \frac{1}{\sin 22.5^\circ}$$

是 4 次方程的根，且两个方程的系数都是整数，最高次项的系数等于 1.

【证明】 角22.5°是直角的四分之一，可用下面的方法作出（图22）. 在等腰直角三角形 ABC 的直角边 AC 的延长线上从顶点 A 往外取线段 $AD = AB$，连接点 D 和 B. 在等腰三角形 DAB 中，$\angle D$ 等于 $\angle BAC$ 的一半，于是我们作出了直角的四分之一.

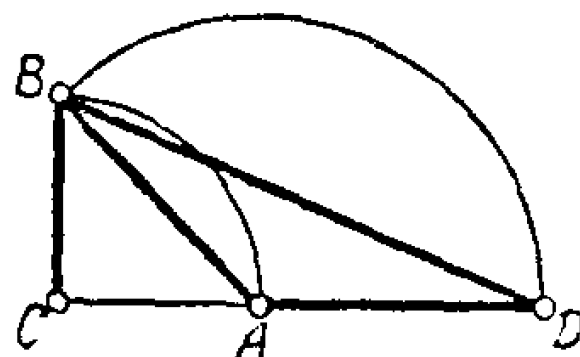


图 22

如果 $\triangle ABC$ 的每一个直角边的长度取作 1，那么

$$DA = AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2},$$
$$DC = DA + AC = \sqrt{2} + 1,$$

且

$$DB = \sqrt{DC^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2 + 1} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

由此我们求得

$$u = \mathrm{ctg}22.5^\circ = \frac{DC}{BC} = \sqrt{2} + 1,$$

❶ 事实上，如果某一个排列在循环置换时不变，那么在这个排列中，在 p 个位置的每一个位置上放的都是同一个元素，这就意味着，这样的排列和构成这些排列的元素是一样多的.

——俄译编辑注.

$$v=\frac{1}{\sin 22.5^\circ}=\frac{DB}{BC}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}.$$

因此

$$(u-1)^2=2$$

和

$$v^2=4+2\sqrt{2}, \quad 即 \quad (v^2-4)^2=8.$$

去掉括号，并将所得到的表达式按 u 和 v 的降幂排列，我们求得方程

$$u^2-2u-1=0, \qquad v^4-8v^2+8=0. \bigstar$$

§20. 代数数和超越数

如果 α 是具有**有理系数** a_1, a_2, …, a_n的代数方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

的根，那么 α 叫做**代数数**.

每一个有理数 a 是代数数，因为它满足有理系数的代数方程

$$x-a=0,$$

但是代数数集合并不只限于是有理数. 例如，数$\sqrt{2}$是代数数，因为它满足有理系数的代数方程 $x^2-2=0$，但是它是无理数.

并不是所有的数都是代数数. 不是代数数的实数或复数叫做**超越数**. 例如，最"有名的"数 e（自然对数的底）和π就是这样的数. 数 e的超越性首先被厄尔米特证明(1873)，数 π的超越性首先被林德曼证明(1882).（特别是，由数 π 的超越性推出，已知圆的半径，仅仅利用**初等几何**的工具，即**圆规和直尺**，不能实现**化圆为方**，换句话说，不可能作出一个线段，使线段的长等于圆的周长，或不能作出一个正方形和圆等积.）

在代数数中通常还划分出代数整数. 如果代数数 α 所满足的代数方程的所有系数都是有理整数❶，而最高次项的系数等于 1，则代数数 α 叫做**代数整数**. 例如

$$\alpha_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

是代数整数，因为它们是二次方程

$$x^2+x-1=0$$

的根，这个方程具有有理整数的系数，且 x^2的系数等于 1.

不难证明，两个代数数的和、差、积、商（如果除数不为零）仍然是代数数. 两个代数整数的和、差、积仍然是代数整数.

23题的解证明了：**22.5°角的余切和正弦的倒数（余割）是代数整数**.

24. 证明：如果 a 和 b 是正整数，那么等差数列

$$a, 2a, 3a, \cdots, ba$$

中能被 b 整除的项的个数等于数 a和 b的最大公约数.

❶ 为了和"代数整数"相区别，这里把通常的整数叫做"有理整数". ——中译者注.

【证明】假设 d 是数 a 和 b 的最大公约数★，这时

$$a = dr,\quad b = ds,$$

其中 r 和 s 是两个互素的数.

如果所有的数

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots,\ ba$$

用 b 去除，那么商可以写成

$$\frac{r}{s},\ \frac{2r}{s},\ \frac{3r}{s},\ \cdots,\ \frac{(ds)r}{s}.$$

但是 r 和 s 是互素的数. 因此★，在这些商中，能为整数的仅仅是那些数，这些数的分子关于 r 的系数

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ ds$$

能被 s 除尽，这样的系数的个数等于 d.

§21. 关于求任何一个正整数的约数

我们知道（见 §7），每一个正整数可以分解成素数乘幂的乘积. 知道了分解式，这个数的约数可用下面的方法求得.

如果在正整数 k 和 b 的分解式中，含有素数 p 的 χ 次幂和 β 次幂，那么在乘积 kb 的分解式中含有这个素数的 $\chi+\beta$ 次幂.

因此，任何一个正整数 a 当而且仅当在下面的情况下才能被某一个数 b 整除：如果在数 b 的分解式中，任一素数 p 的乘幂的指数不超过数 a 的分解式中 p 的指数.

例如，数 $2^m p$（这里的 p 是奇素数）的正约数具有下面的形式：

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{m-1},\ 2^m,$$
$$p,\ 2p,\ 2^2p,\ \cdots,\ 2^{m-1}p,\ 2^m p.$$

§22. 关于最大公约数和最小公倍数

假设在数 $a,\ b,\ \cdots,\ m$ 中至少有一个不为零，数 $a,\ b,\ \cdots,\ m$ 的公约数集合是有限的. 因此，在它们之中必有一个**最大的**，它一定是**正的**. 它就叫做给定数的**最大公约数**并记作 $(a,\ b,\ \cdots,\ m)$.

因为零可以被**任何一个**整数整除，所以在求一组给定数的最大公约数时，可以划去所有等于零的数. 此外，负数应该用它们的绝对值来代替. 这样一来，关于求**任何**整数的最大公约数的问题化为求**正**整数的最大公约数.

由上面的说明显然有：**若在正整数 $a,\ b,\ \cdots,\ m$ 的分解式中，含有任一素数 p 的 $\alpha,\beta,\ \cdots,\ \mu$ 次幂，那么在这些整数的最大公约数的分解式中，素数 p 的乘幂的指数等于指数 $\alpha,\ \beta,\ \cdots,\ \mu$ 中最小的数.** 例如，

$$(2^5\times3^{24}\times7^9\times11^{15},\ 2^9\times3^{10}\times13^8)=2^5\times3^{10}.$$

同时不难看出，**若一个数是数 $a,\ b,\ \cdots,\ m$ 的公约数，则这个数一定能除尽这些数的最大公约数**. 通常用到的多半是最大公约数的这一性质，因为从可除性的观点来看，它是最本质的.

类似的，如果 a，b，…，m 是不为零的整数，它们的最小公倍数是这样的正整数，首先，它能被数 a，b，…，m 中的每一个整除，其次，它是能被所有的数 a，b，…，m 整除的任何一个数的约数．显然，在最小公倍数的分解式中，每一个素数 p 的指数等于在数 $a, b, \cdots, m$ 的分解式中 p 的指数 α，β，…，μ 中最大的数．这样一来，对于任何一组不为零的整数 a，b，…，m 来说，最小公倍数是存在的，而且只有一个．由最小公倍数的定义推出，实际上它是给定一组数的倍数中最小的正整数（能被给定数整除的最大正整数是不存在的）．

§23. 关于互素的数

若两个或若干个整数的最大公约数等于 1，也就是说，如果除了 1 以外，给定的数不能同时被任何一个其它的正整数整除，那么说这些数是**互素的**.

例如，**如果 p 和 q 是两个互素的数，那么对于任何正整数 r 和 s，p^r 和 q^s 也是互素的数．**

证明24题时，实质上是利用了下面的定理：

如果 $a, b, \cdots, m$ 是不为零的整数，而 d 是它们的最大公约数，那么

$$a' = \frac{a}{d}, \quad b' = \frac{b}{d}, \cdots, \quad m' = \frac{m}{d}$$

是互素的整数．

事实上，如果数 $a', b', \cdots, m'$ 的最大公约数 d' 大于 1，那么数

$$a = a'd, \quad b = b'd, \cdots, \quad m = m'd$$

能被大于 d 的数 dd' 整除．因此与假设 d 是数 $a, b, \cdots, m$ 的最大公约数矛盾．

在证明24题时，我们还引用了定理：

如果 b 是不为零的整数，a 和 b 是互素的数，而且 a 和某一个数 k 的乘积能被 b 整除，那么 k 能被 b 整除．

事实上，我们假设 k 不能被 b 整除．这时至少存在这样一个素数 p，使得在数 b 的分解式中，它的指数为 β，而在数 k 的分解式中，它的指数 $\varkappa$ 小于 β（特别的，$\varkappa$ 可以等于零）．因为 a 和 b 是互素的，所以 a 不能被 p 整除．但这时在 $|ka|$ 的分解式中，p 的指数 $\varkappa < \beta$．因此，和假设相反，ka 不能被 b 整除．所得到的矛盾证明了定理的断言．

（如果 a 是任意的素数，那么上面所述的定理与 § 2 的 1）中的定理重合）．

注意到下面的定理也是有益的：

如果某一个整数 A 能被互素的数 a 和 b 中的每一个整除，那么它能被这两个数的乘积 ab 整除．

事实上，根据条件 $A = ak$，其中 k 是某一个整数．因为 a 和 b 是互素的数，根据上面所证明的定理，只有在 $k = bk'$，其中 k' 表示某一个整数的情况下 ak 才能被 b 整除．这时 $A = (ab)k'$，即 A 能被 ab 整除，这就是所要证明的．

七、1902年—1903年试题及解答

25. 证明：1) 具有给定的常数系数的任一二次三项式

$$Ax^2+Bx+C$$

可以表示成

$$k\frac{x(x-1)}{1\times 2}+lx+m$$

的形式，其中 k，l 和 m 有完全确定的数值.

2) 二次三项式

$$Ax^2+Bx+C$$

对所有的整数 x 都取整数值当而且仅当：如果把它表示成

$$k\frac{x(x-1)}{1\times 2}+lx+m$$

的形式时，系数 k，l 和 m 是整数.

【证明】 1) 因为

$$x^2=2\frac{x(x-1)}{2}+x,$$

所以二次三项式

$$Q=Ax^2+Bx+C$$

可以变成下面的形式

$$Q=k\frac{x(x-1)}{2}+lx+m,$$

其中 $k=2A$，$l=A+B$，$m=C$.

2) 如果二次三项式 Q 对所有的整数 x 都取整数值，那么，当假定 x 等于 0，1，2 时，我们得到二次三项式相应的值

$$r=m,\quad s=l+m,\quad t=k+2l+m,$$

它们应该是整数. 但这时数

$$m=r,\quad l=s-r,\quad k=t-2s+r$$

也是整数.

反之，如果 k，l，m 是整数，那么二次三项式对任何整数 x 只能取整数值.

事实上，如果 x 是整数，那么在两个连续的整数 x 和 $x-1$ 中，总有一个是偶数，因此 $\frac{x(x-1)}{2}$ 是整数. 如果系数 k，l，m 是整数，那么 Q 的所有三项都取整数值，因而二次三项式 Q 的本身也取整数值.

§ 24. 关于取整数值的多项式

用归纳法（由 n 到 $n+1$）来论证，不难证明25题的 1）中的断言的推广：

每一个 n 次多项式

$$F=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

可以表示成

$$F=b_0+b_1\binom{x}{1}+b_2\binom{x}{2}+\cdots+b_n\binom{x}{n} \qquad (1)$$

的形式，其中

$$\binom{x}{1}=x,\quad \binom{x}{2}=\frac{x(x-1)}{2},\quad \binom{x}{3}=\frac{x(x-1)(x-2)}{1\times2\times3},\cdots.$$

25题中 2）的断言也有如下的推广：

当而且仅当表示式（1）中所有的系数 b_0，b_1，…，b_n 都是整数时，多项式 F 对所有的整数 x 都取整数值．

如果我们能够证明量

$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+2)(x-k+1)}{1\times2\times3\times\cdots\times(k-1)\times k}$$

对所有的整数 x 只能取整数值，我们就不难得到这个断言的证明了．可用下面的方法来证实这一点．

如果 x 是正整数或者是零，那么 $\binom{x}{k}$ 可以看作是从 x 个元素中取出 k 个的组合数（没有重复）．因此，对于正整数 x 和 $x=0$，量 $\binom{x}{k}$ 取整数值〔当 $x<k$ 时，$\binom{x}{k}$ 的值等于零〕．

如果 x 等于某一个负整数 $-y$（$y>0$），那么

$$\binom{-y}{k}=\frac{(-y)(-y-1)\cdots(-y-k+2)(-y-k+1)}{1\times2\times\cdots\times(k-1)k}=$$

$$=(-1)^k\frac{(y+k-1)(y+k-2)\cdots(y+1)y}{1\times2\times\cdots\times(k-1)k}=(-1)^k\binom{y+k-1}{k}.$$

这里的 $y+k-1$ 是正整数，因此 $\binom{y+k-1}{k}$ 是整数，而它与 $\binom{-y}{k}$ 仅仅差一个符号（当 k 为奇数时）．

§ 25. 关于二项式级数

量 $\binom{x}{k}$ 通常叫做**二项式系数**．如果 z 是在从 -1 到 $+1$ 的区间中的任意一个数，而 t 是任意的幂指数（不一定是正整数），那么二项式 $1+z$ 的 t 次幂可以展开成下面的无穷级数

$$(1+z)^t=1+\binom{t}{1}z+\binom{t}{2}z^2+\cdots+\binom{t}{k}z^k+\cdots,$$

按照牛顿的说法，习惯上把它叫做**二项式级数**. 例如，当$t=-1$时，二项式级数变成无穷几何级数

$$1-z+z^2-z^3+\cdots,$$

当$-1<z<+1$时，它的和等于

$$\frac{1}{1+z}=(1+z)^{-1}.$$

如果t是正整数，那么无穷的二项式级数蜕化成有限项和，因为从第$(t+1)$项开始，所有的z的乘幂的系数都等于零. 如果在$t=n$时所得到的恒等式中，令$z=b/a$，然后将它的两边同乘以a^n，那么我们得到恒等式

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n, \qquad (1)$$

它叫做牛顿二项式.

关于恒等式(1)可以注意到下面一点:

它的右端可以这样得到，全部写出n个$(a+b)$的乘积所表示的多项式，并且合并同类项，可以看出其所有的项都具有形式$a^{n-k}b^k$，其中$0\leqslant k\leqslant n$.

对于确定的k，形如$a^{n-k}b^k$的项的个数等于从n个二项式$(a+b)$中取出k个的方法的个数（这k个二项式是字母b的“提供者”）. 因为选取k个二项式的次序无关紧要，所以我们感兴趣的数目等于从n个元素中取出k个的组合数（见§5）. 当$k\geqslant 1$时，它等于C_n^k. 因为项a^n只能得到一次〔如果从所有的二项式$(a+b)$中都选取字母a〕，于是恒等式(1)就这样被证明了.

在它里面令$a=b=1$，我们得到

$$2^n=1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n.$$

这个恒等式我们在§5的3)中提到过.

26. 假设O是球面K的中心，P和Q是K外的点. 以点P为中心，PO为半径作球面，以点Q为中心，QO为半径作球面. 证明：这两个球面在K内的面积相等.

【证明】通过球心为点P，半径为PO的球面K'的直径OT作一平面. 此平面和球面K和K'交得的圆为k和k'，k和k'相交于点M和N（图23）. 我们用S表示弦MN和直径OT的交点.

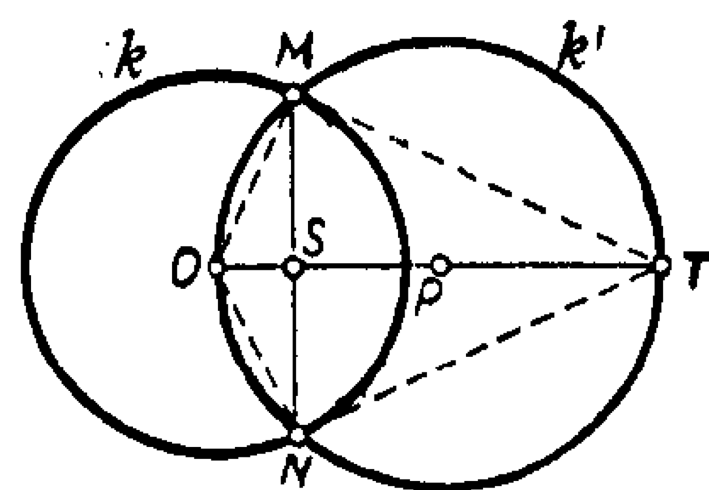


图 23

球面K'在球面K内的那一部分的面积F等于圆k'的周长乘以球冠的高OS，即

$$F=\pi OT\cdot OS.$$

但是$OT\cdot OS=OM^2=r^2$，这里r是圆k的半径. 因此

$$F=\pi r^2.$$

这样一来，球面K'在球面K内的那一部分的面积与点P的位置无关.

点P不一定要在给定球面K的外边. 只要它在以点O为球心，以$r/2$为半径的球面的外边就行了. 事实上，如果点P在这个球面内（即如果$OP<r/2$），那么球面K和K'没有公共点. ★

§26. 关于波约依几何学

题26中所证明的断言在不依赖于欧几里得平行公理的亚诺什·波约依几何中起着重要的作用. 我们打算稍微详细地说一下非欧几何和亚·波约依.

1) **平行公理**. 平行公理的问题起源于欧几里得的《几何原本》. 除了一般数学的基本概念的定义和某些公理之外，欧几里得在自己的著作中引进了五条公设作为整个几何学的基础，并且它们不能化为更基本的命题. 我们感兴趣的仅仅是最后的第V公设，它在欧几里得的《几何原本》中是第十一个公理. 这个公设的内容是:

当一条直线与另外两条直线相交，这条直线与两直线构成的同侧内角之和小于两直角时，这两条直线相交，而且在同侧内角之和小于两直角的那一侧相交.

通常公设V叫做**平行公理(公设)**，因为它正是整个平行理论的基础.

如果在一个平面上的两条直线，无论怎样延长也不相交，欧几里得就把这两条直线叫做平行的.

不利用公设V，欧几里得证明了：如果在一个平面上，两直线和第三条直线相交，并且同侧内角之和等于两直角，那么这两条直线平行（在上面所说的意义下）. 由此推出，通过任意取的直线e外的点A，至少可以引一条直线和e平行.

欧几里得还证明了：通过直线e外的点A只能引一条直线和e平行. 欧几里得对这个定理给出的证明依赖于公设V，从实质上来说，这个公设是为了使这个定理成为可能而引入的.

欧几里得几何学的所有其它公理是简单而明显的. 困难只是在研究平行公设时产生的，在欧几里得的公理体系中，这条公设是为了填补缺陷而人为地引进的. 古代希腊人就试图从欧几里得几何学的其它的公理推出平行公设.

2) **两个波约依——父与子**. 二千二百年以来，平行公设引起了最卓越的智者的注意，但是在他们之中，谁也没有像法尔卡什·波约依（亚诺什·波约依的父亲）那样热心埋头于解决平行问题.

法尔卡什·波约依于1775年生于波约，1856年死于马罗什瓦沙尔赫伊. 在纳季-埃尼叶德和科洛什瓦尔受中等教育. 法·波约依受邀和希蒙·克缅男爵一起在耶纳和哥廷根大学（1796——1799）学习同样的功课. 在居留哥廷根期间，法·波约依认识了当时在那里学习的高斯，他只比法·波约依小几岁. 认识不久就结下了亲密的友谊. 朋友之间的通信往来一直延续到法·波约依去世（诚然，从1816年到1831年有很长一段时间间断了）. 有一段时期波约依回到科洛什瓦尔当教员，然后迁居到他自己的在多马利德的世袭领地. 1804年他搬到马罗什瓦沙尔赫伊，在那里主持地方学校的数学、物理和化学教研室. 在这个职位上，波约依一直工作到1853年. 他有着多方面的才干，不仅写话剧，研究语言学的各种问题、绘画和弹奏乐器，而且有成效地致力于解决实际问题. 例如，在埃尔杰伊，法·波约依设计的经济炉子得到了广泛的推广. 但是法·波约依最感兴趣的是数学，特别是平行理论. 他的主要著作（用拉丁文写的）称之为《引导青年学习纯粹数学原理的经验》已经出版（马罗什瓦沙尔赫伊，卷I，1832; 卷II，1833). 高斯高度评价《经验》的作者的思想深刻和独创性. 除其它问题外，法·波约依在自己的著作中还涉及到了平行问题. 他试验了所有可能的那怕是只有微弱希望的各种途径来证明欧几里得的公设V. 但是，正像他的前辈一样，法·波约依每次

从某一个公设出发，但这个公设并不比所要证明的公设简单．亚诺什·波约依的研究真正弄清楚了所有这些试验不能成功的奇怪的原因．

亚诺什·波约依1802年生于科洛什瓦尔，1860年死于马罗什瓦沙尔赫伊．亚诺什很早就表现出来的非凡才干使他父亲非常高兴．1818年他被录取到匈牙利军事工程学院第四系，1822年以优异的成绩在那儿毕业．亚诺什作为士官生在学院见习一年．1823年9月被授予少尉军衔，1833年辞去了大尉军衔，从那时起一直住在马罗什瓦沙尔赫伊附近的不大的波约依-多马利德庄园．

当亚诺什·波约依还是孩子的时候，就听他父亲说过，许多杰出的数学家毫无成效地极力想证明平行公设．许多证明欧几里得平行公设的想法都带有间接的特点．他们不外乎力图证明每一个和平行公设相矛盾的假设迟早会导致逻辑上的矛盾．这种途径无异于在这领域里的最初的研究．平行理论的研究者们走着他们前辈所开创的老路．

仅仅是在年青的军官亚·波约依提出了解决平行问题的根本不同的途径之后，才把平行理论提高到了一个新的高度．非常复杂的现象开始渐渐地明朗起来，并且增添了越来越多的新内容．亚·波约依没有试图去证明公设Ⅴ，而是相反，他从假设这种证明是不可能的出发，换句话说就是，欧几里得平行公设不能从《几何原本》中所叙述的其它公理和公设推导出来．他成功地建立了一种几何学，除了平行公设以外，这种几何学满足欧几里得的所有其它公理．这种几何学——亚·波约依把它称之为S-几何学——和大家所知道的欧几里得几何学（亚·波约依用Σ-几何学来表示它）有很大的区别．波约依的S-几何学在逻辑上是没有矛盾的，虽然只是从纯粹数学的观点来看它才是有趣的❶．

3） **亚诺什·波约依的几何学**．为了指出Σ-几何学和S-几何学的区别，我们从研究下面的具有首要意义的问题开始：在直线e和e外一点A所确定的平面$[e,A]$上，通过点A可以引多少条直线不和直线e相交？

在两种几何学（S和Σ）中，至少总可以引一条这样的直线．事实上，将由点A到e所引的垂线AB绕点A旋转一个直角，那么直线AF和直线e不相交（图24）．

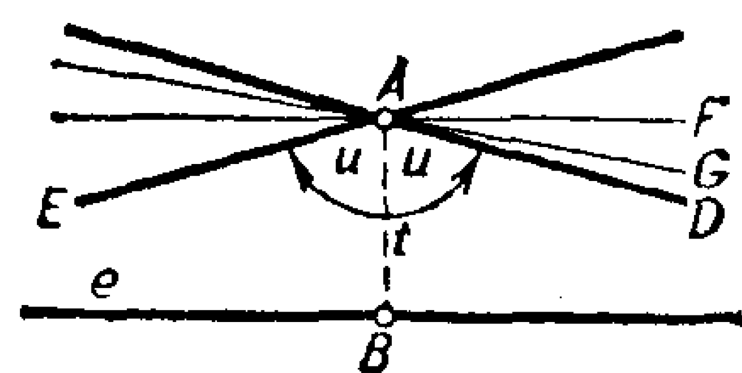


图 24

在欧氏几何Σ中，由公设Ⅴ推出，在平面$[e,A]$上，通过点A的任何其它的直线和直线e相交．

因为波约依的S-几何学不满足平行公设，所以根据这个几何学，至少能够找到一条这样的直线e和e外的一点A，使得在平面$[e,A]$上，除了AF以外，通过点A还可以引一条也不和直线e相交的直线AG．正像详细研究所表明的，甚至更强的断言（在法·波约依和亚·波约依之前就知道）也是对的：*aut semper*、*aut nunquam*（要么都可以，要么都不可以）．换句话说，如果存在一条直线e和e外一点A，通过点A可以引一条与AF不同的直线AG和e不相交，那么任何其它的直线e和e外的点A也都具有这种性质．

我们来比较详细地研究在S-几何学中任意选取的直线e和e外的点A的情况（图24）．作与直线e垂直的线段AB，我们将通过点A的直线绕着点A转动，一直到它和线段AB成直角时为止．无论是在哪一侧转动直线——沿着顺时针或反时针方向，这直线在和AB成直角之前就不再和直线e相交（"脱离"e）：从转动直线和直线AD（或AE）重合时开始就发生"脱离"．在S-几何学中，在通过点A的直线中，只有两条这样的脱离直线：AD和AE．它们被称为和直线e平行，直线AD（或AE）和垂线AB之间的夹角u叫做平行角．角u的量值依赖

❶ 见后面的§27．——俄译编辑注．

于垂线 AB 的长度：AB 越长 u 越小.

在 Σ- 几何学中，某些简单而重要的问题的解答是**直线**或**平面**，而在 S- 几何学中则导致某些**曲线**或**曲面**. 例如在 Σ- 几何学中，当半径无限增大时，圆和球面分别变为直线和平面. 在 S 中，相应的极限过程导致某个极限曲线（**极限圆**）或曲面（**极限球面**）. 任何两个极限圆是叠合的，就像任意两个极限球面是叠合的一样.

如果从平面直线上的每一点向平面的一侧引垂线，或者从平面的每一点向平面的一侧引垂线，而且在这些垂线上截取长度都等于 d 的线段，那么在 Σ 中，我们所作线段的自由端点的轨迹是和给定直线平行的直线，或者是与给定平面平行的平面. 在 S 中，所作垂线的端点的轨迹是某种曲线（**等距曲线**）或弯曲的曲面（**等距曲面**）. 两个这样的曲线或两个这样的曲面，当且仅当它们所对应的线段长度 d 相等时是叠合的.

在 S- 几何学中，平面三角形的三个角之和小于两直角. 在 S- 几何学中，如果两个三角形对应的角相等，那么对应角的对边也相等. 换句话说，在 S- 几何学中，对应角相等的两个三角形是**全等的**. 这样一来，在 S- 几何学中，没有相似的平面图形，而且三角函数不能用直角三角形的边的比来定义.

虽然如此，但是在 S- 几何学中存在这样一个曲面，对于这个曲面来说，三角形的角之和等于两直角，而且说相似三角形是有意义的：我们所指的是**极限球面**，在它上面画有以**极限圆**为边的三角形. 在 S- 几何学中，在这个曲面上作的直角三角形，就像在通常 Σ- 几何学的平面上的直角三角形那样，能够定义角的三角函数. 用这种办法计算的角 α 的三角函数值和用欧氏几何的法则计算出的值相同. 例如，无论是在 Σ- 几何学中或是在 S- 几何学中都有 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

在题26的解答中所证明的关于球面在另一个球面内的曲面大小的定理是很有趣的，而且具有重要的意义. 这不仅在 Σ- 几何学中是这样，而且在 S- 几何学中也是这样. 如果用**极限球面**来代替通过点 O 和 T 的平面，用**极限圆**来代替所作的直线，前面对 Σ- 几何学的情况所作的证明可以完全搬到 S- 几何学的情况中来.

亚诺什·波约依认为他自己最重要的发现是建立了平行角的量值 u 和垂线 AB 的长度 t 之间的依赖关系式：

$$\operatorname{ctg}\frac{u}{2} = e^{\frac{t}{k}},$$

其中 $e = 2.71828\cdots$ 是自然对数的底，而 k 是**绝对**（即与 t 无关的）**长度**，并称之为 S- 几何学的参数.

参数 k 可以无限制地改变. 换句话说，参数 k 可以具有任意的数值. 随着 k 的选取，我们将得到相应的 S- 几何（每一次都是另一种）. 因为 k 可以上升到无穷，所以不是有一个，而是有无穷多个带有不同 k 值的 S- 几何（就像有无穷多个不同半径的球面一样）.

Σ- 几何是 S- 几何在参数 k 趋向于无穷时的极限情况. 在这种情况下，$\frac{t}{k}$ 趋向于零，由上面所说的公式推出

$$\operatorname{ctg}\frac{u}{2} = e^0 = 1 .$$

这样一来，在 Σ- 几何学中，平行角 u 不再与垂线 AB 的长度有关，而且变成常数，它正好等于直角.

4） **结束语**

1823年亚诺什·波约依完成了自己的伟大发现．他在1823年11月3日从捷麦什瓦尔寄给父亲的信中说："从某种东西出发我建立了新的、另外的世界"．也许那时他已经导出了自己的公式，即确定平行角和垂线长度之间的依赖关系式（亚·波约依确实是在1823年导出了它）．1832年作为法·波约依的《经验》的第一卷的附录，用拉丁文发表了亚·波约依的篇幅不大的著作，称之为《附录：关于与欧几里得公理XI的真伪无关的真正空间的科学，任何时候也不可能先验地解决，几何上化圆为方问题的补充》．1831年6月还以单行本的形式发表了《附录》．

根据儿子的请求，法·波约依立即把28页的《附录》寄给了高斯．高斯1832年3月3日的回信给亚·波约依带来了不愉快的消息：高斯宣布他早就得到了同样的结果，但是没有发表，因为它没有特别的意义．对于渴望得到承认和荣誉的年青的匈牙利学者来说，当他得知俄国数学家尼·伊·罗巴切夫斯基几乎与他同时而且和高斯无关地研究出了非欧几何的时候，这确是一个巨大的打击．

看来，应验了法·波约依在1825年催促儿子发表他的发现时所说的话："某些思想等到它自己产生的时候，如果可以这样来形容的话，它们会立刻在几个地方被发现"。但是看来高斯是对的，他认为传播新的、非欧几里得的几何学的思想还为时过早．像亚·波约依用拉丁文写成的《附录》一样，甚至罗巴切夫斯基用一种生动的语言写成的著作也是没有读者的．然而，最勇敢的思想终究会取得公认的，如今罗巴切夫斯基－波约依几何学已被公正地认为是人类天才的光辉成就之一．

在罗巴切夫斯基－波约依几何学的创始人所生活的时代以后的一段时间内，数学家们阐明了，如果除了平行公设以外，放弃其它的习惯了的公理，我们将同样可以得到其它的逻辑上没有矛盾的几何学．

这就产生了一个问题：在许多几何学中，哪一种是合乎现实的呢？要回答这个问题不越出纯粹数学的范围是不可能的，因为对理论提出的唯一要求是这个理论是合乎逻辑的，也就是说不应该导致**逻辑上的矛盾**．研究现实空间（和时间）的性质是有趣而困难的**物理**问题．**所得到的每一个结果都会导致日新月异的探索．亚诺什·波约依和非欧几何的创始人的无可争辩的功绩在于：正是他们在科学上首先提出了什么样的几何学描述了现实空间的性质这个问题．在他们之前，任何人甚至想都没有想过可能存在某个另外的不同于欧氏几何学的几何学，连建立现实空间几何学这个问题的本身都没有产生．**

§27. 再论非欧几何[1]

前一节最后一段应该解释一下，尤其是它和第26节的2)中最后那句话"只是从纯粹数学的观点来看它才是有趣的"有些矛盾．

对亚·波约依来说，有决定意义的首先是非欧几何在逻辑上的无矛盾性，他是深信这一点的．而同时，高斯，特别是罗巴切夫斯基清楚地意识到了物理空间的几何学可能是非欧几里得的，而且这个问题不能从纯粹逻辑上来解决．他们试图用实验的方法得到答案，为了这个目的，他们测量很大的三角形的角之和（罗巴切夫斯基用天文观测的办法，高斯用大地测量的手段），但是他们的企图是没有成效的：在测量的精确度的范围内，要确定角之和是否等

[1] 俄译编辑所加．

于两直角看来是不可能的．虽然如此，但是作者是完全正确的，宣布存在有不同于欧几里得的几何学的可能性是非凡的，它引起了“物理学者的激动”，最后导致建立爱因斯坦的广义相对论（恰好相对论的基石之一——引力质量和惯性质量相吻合被匈牙利奥林匹克数学竞赛的创始人洛・爱德魏约希用实验证实了）．

根据爱因斯坦的广义相对论，现在我们知道，空间的几何学由空间中物质的分布所确定．远离引力质量时，空间是“平面的”，它的几何学以足够的精确度可看成是欧几里得的．重物的存在，例如星体的存在，使空间“变得弯曲”了，而且这个曲率一般来说是不均匀的．这种空间的数学模型是黎曼创立的，且称之为**黎曼的几何学**．罗巴切夫斯基–波约依的非欧平面处处有不变的负曲率（由这一点可以确定，在§26意义下的S–几何学对于它是成立的），其实，在欧氏平面上和在“极限球面”上曲率处处等于零（由此确定了Σ–几何学的存在）．还可能有不变的正曲率几何学，它叫做黎曼几何（不要和黎曼的几何学混淆，黎曼的几何学曲率可变化，而且是任意的）．

无论是高斯或波约依都没有像罗巴切夫斯基那样充分地研究非欧几何学（高斯有意地避免公开或发表这些结果）．新几何学的基础是罗巴切夫斯基1826年2月11日在喀山大学学术委员会的报告中叙述的，并且于1829年发表在《喀山公报》上．然后陆续发表了《虚几何学》(1835)，《虚几何对一些积分的应用》(1836)，《具有完整平行理论的几何学的新原理》(1835—1838)，《平行线理论的几何研究》(1840)和《泛几何学》(1855)．但是，还没有等到自己的发现被公认，伟大的几何学家于1856年去世了．

无论是波约依或是罗巴切夫斯基，都相信他们所发现的几何学在逻辑上是没有矛盾的，即当一个接一个地导出它的定理，并且把它们排成任意长的一串时，我们在任何时候都不会遇到逻辑上的矛盾（这恰好意味着可以证明欧几里得的平行公设仅在欧氏几何中可能成立）．但是他们谁也没有严格证明这一点（其实，正是这一点使得罗巴切夫斯基曾试图用实验来解决问题）．到十九世纪末，通过许多数学家的努力，首先是贝尔特拉米，克莱因，庞卡莱和希尔伯特，证明了两种几何学——欧几里得的和罗巴切夫斯基–波约依的——的无矛盾性是等同的：一种几何学逻辑上矛盾的存在不可避免地引起另一种几何学逻辑上矛盾的存在．而且如果算术是无矛盾的话，也就是说，如果从皮亚诺公理系统（见§3）出发，我们永远不会导致逻辑上矛盾的话，还可证明两种几何学是无矛盾的．这个前提至今仍然悬而未决，但“这完全是另一回事”了…….

27．已知三角形的面积S和顶角γ．相交于顶点C的两边a和b在什么情况下能使顶点C所对的边c的长度最小？

【解法1】根据余弦定理

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma=(a-b)^2+2ab(1-\cos\gamma).$$

但是

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma=S,$$

因此

$$c^2=(a-b)^2+4S\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

上式右端第二项是常数，第一项当 $a=b$ 时变为零，而在所有其它的情况下都是正的．因此，如果三角形是等腰的，那么 c^2，从而 c，达到最小值．这时

$$a=b=\sqrt{\frac{2S}{\sin\gamma}}.$$

【解法 2】 我们证明：如果三角形是等腰的（$a=b$），那么边 c 有最小的长度．假设 $\triangle A_0B_0C$ 是满足本题条件的等腰三角形．作一任意的三角形，使其有同样的面积，且对于这两个三角形，角 γ 是公用的，新三角形的边 CA_1 比 $\triangle A_0B_0C$ 的边 CA_0 长．我们得到 $\triangle A_1B_1C$（图25）．因为点 A_1 在边 CA_0 的延长线上，所以点 B_1 应该在 $\triangle A_0B_0C$ 的边 B_0C 上．

$\triangle A_0A_1B_1$ 的面积和 $\triangle A_0B_0B_1$ 的面积相等，而边 A_0B_1 公用．因此点 A_1 和 B_0 到线段 A_0B_1 是等距的，即四边形 $A_0B_1B_0A_1$ 是梯形．此外，$\angle B_1B_0A_1>\angle B_1B_0A_0=\angle B_0A_0C>\angle B_0A_1A_0$（外角大于和它不相邻的内角）．

图 25

于是，我们将原题化为证明下面的引理．

引理．如果把不等腰梯形的角分成两组，靠上底的两个角为一组，靠下底的两个角为一组，那么在每一组角中，小角的顶点是梯形的两个对角线中较长的对角线的端点．

假设 $PQRS$ 是不等腰的梯形，$PQ/\!/SR$（图26），且 $\angle SPQ>\angle PQR$．

假设 S' 是顶点 S 关于底边 PQ 的中垂线的对称点．点 S' 位于底边 SR 的延长线上顶点 R 的外边．$\angle S'RP$ 是 $\triangle SRP$ 的外角，所以 $\angle S'RP>\angle S'SP>\angle S'SQ$．根据对称性，$\angle S'SQ=\angle SS'P$，由于在 $\triangle PRS'$ 中，$\angle S'RP$ 大于 $\angle RS'P$，所以 $S'P>RP$．因为根据对称性 $S'P=SQ$，所以由最后一个不等式得出：$SQ>RP$．

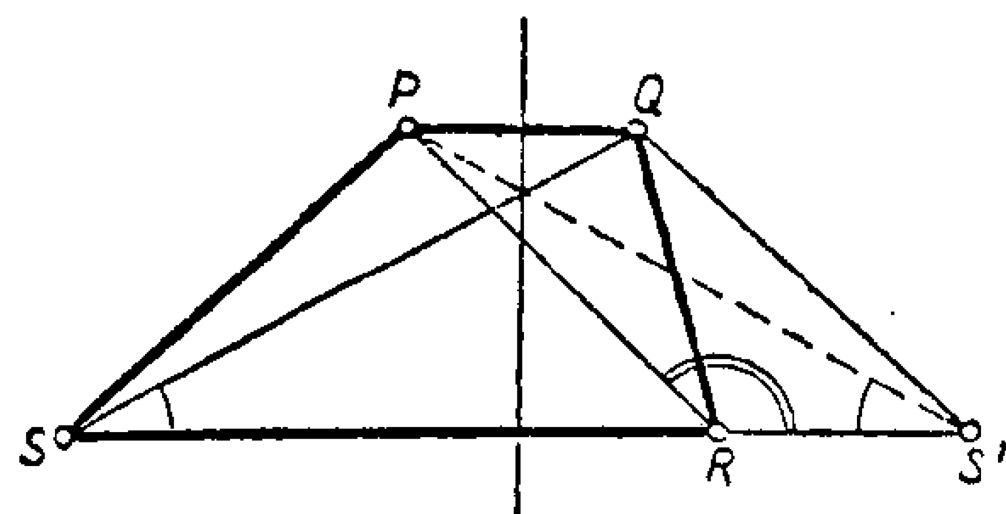


图 26

【解法 3】 我们研究所有面积为 S，一个角等于给定的角 γ 的三角形．如果在这些三角形中，能找到这样一个三角形，它的和角 γ 相对的边 c 比其它的三角形的对应边都短，那么我们将所有的三角形都缩小，使得在所有的三角形中，和角 γ 相对的边的长度都等于 c．显然，被“缩小”后的三角形的面积比原来面积 S 要小．

这样一来，我们原来的问题化成下面的问题：在所有具有公共边以及和它相对的角等于给定角 γ 的三角形中，求面积最大的三角形．

这种三角形的顶点 C 的轨迹是立于这一公共边的线段上且其张角为 γ 的圆弧．在所研究的三角形中，顶点 C 到公共边最远的三角形具有最大的面积，即顶点 C 为含角 γ 的圆弧与公共边的中垂线的交点时，三角形有最大的面积．显然，这个三角形是等腰三角形．

于是，在所有具有已知面积 S 和顶点 C 的顶角为 γ 的三角形中，等腰三角形的角 γ 所对的边具有最小的长度．

28．假设 $n=2^{p-1}(2^p-1)$，这里 2^p-1 是素数．证明：数 n 的所有不等于 n 本身的约数之和恰好等于 n．

【证明】 我们写出数 $n=2^{p-1}q$（这里的数 $q=2^p-1$ 是素数）的一切小于它自己的约数（见§21）：

$$1,\ 2,\ 2^2,\cdots,\ 2^{p-2},\ 2^{p-1},$$
$$q,\ 2q,\ 2^2q,\ \cdots,\ 2^{p-2}q\ .$$

无论是第一行的数，或是第二行的数，都构成一等比数列．计算这两个数列的和，我们得到

$$2^p-1=q \quad 和 \quad q(2^{p-1}-1)=n-q.$$

于是，数 n 的一切约数（除去本身之外）之和等于 n，这就是所要证明的．

§28. 关于完全数

如果正整数 n 的小于它自身的正约数之和等于 n，那么数 n 叫做**完全数**．欧几里得就研究过这种数（在他的《几何原本》，卷Ⅸ中）．最小的完全数等于 $2(2^2-1)=6=1+2+3$．

由公式 $n=2^{p-1}(2^p-1)$（其中 p 和 2^p-1 是素数）能够得到的只是**偶**完全数．进一步可以证明：这个公式可以得到**所有的偶**完全数．直到如今，下面的问题还没有解决：

1） 偶完全数的集合是有穷的还是无穷的？

2） 存在**奇**完全数吗？

29．如果值

$$x=\sin\alpha, \qquad y=\sin\beta$$

给定了，那么表达式

$$z=\sin(\alpha+\beta)$$

在一般情况下有四个不同的值．写出联系 x，y 和 z 的方程，但不许包含根式和三角函数．并求使 $z=\sin(\alpha+\beta)$ 有少于四个值的 x 和 y 的值．

【解】1） 如果 $\sin\alpha=x$，$\sin\beta=y$，那么

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-x^2}, \qquad \cos\beta=\pm\sqrt{1-y^2},$$

因此

$$z=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

具有下面四个值

$$\begin{aligned} z_1&=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2},\\ -z_1&=-x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2},\\ z_2&=x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2},\\ -z_2&=-x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

方程

$$(z-z_1)(z+z_1)(z-z_2)(z+z_2)=0$$

的根是 z_1，$-z_1$，z_2，$-z_2$，去掉括号并按 z 的降幂排列，我们得到

$$z^4-(z_1^2+z_2^2)z^2+z_1^2z_2^2=0, \tag{2}$$

其中

$$z_1^2+z_2^2=2[(x\sqrt{1-y^2})^2+(y\sqrt{1-x^2})^2]=2(x^2-2x^2y^2+y^2),$$
$$z_1z_2=(x\sqrt{1-y^2})^2-(y\sqrt{1-x^2})^2=x^2-y^2.$$

将这些表达式代入方程（2），我们得到

$$z^4-2(x^2-2x^2y^2+y^2)z^2+(x^2-y^2)^2=0, \tag{3}$$

它便是所要求的方程．

2）方程（3）有由公式（1）确定的四个不同的根（如图27所示）．如果

a）$z_1=\pm z_2$，

b）$z_1=-z_1$ 或 $z_2=-z_2$，

那么方程（3）的根的个数少于4．

由情形 a）得

$y\sqrt{1-x^2}=0$

或者 $x\sqrt{1-y^2}=0$．

第一个等式当 $y=0$ 或 $x^2=1$ 时成立，第二个等式当 $x=0$，$y^2=1$ 时成立．因此情况 a）当 x 或 y 取值 0，1 或 −1 时成立．

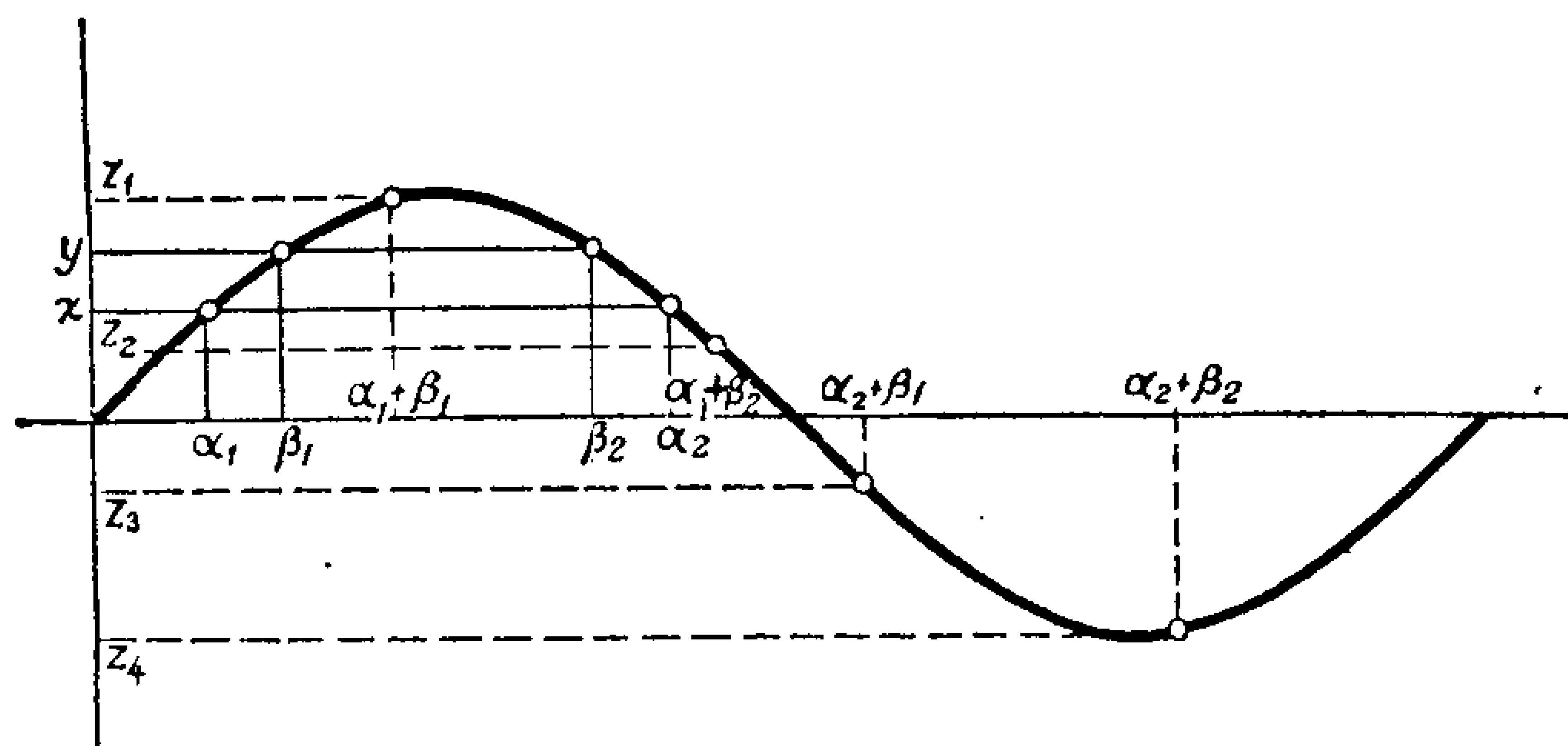


图 27

由情形 b）得

$$x\sqrt{1-y^2}=\pm y\sqrt{1-x^2},$$

即

$$x^2(1-y^2)=y^2(1-x^2).$$

因此 $x^2=y^2$ 或 $y=\pm x$．

30．假设 A，B，C，D 是菱形的顶点．我们用

k_1 表示通过顶点 B，C，D 的圆；

k_2 表示通过顶点 A，C，D 的圆；

k_3 表示通过顶点 A，B，D 的圆；

k_4 表示通过顶点 A，B，C 的圆．

证明：圆 k_1 和 k_3 在顶点 B 的交角等于圆 k_2 和 k_4 在顶点 A 的交角．

【证明】我们注意，**两曲线在交点处的夹角是指过这点所作曲线的切线之间的夹角**．

我们所要证明的断言不仅对菱形是正确的，而且对任何凸四边形❶（图28），甚至对非凸四边形（图29）也是正确的．可用下面的方法来证实这一点．

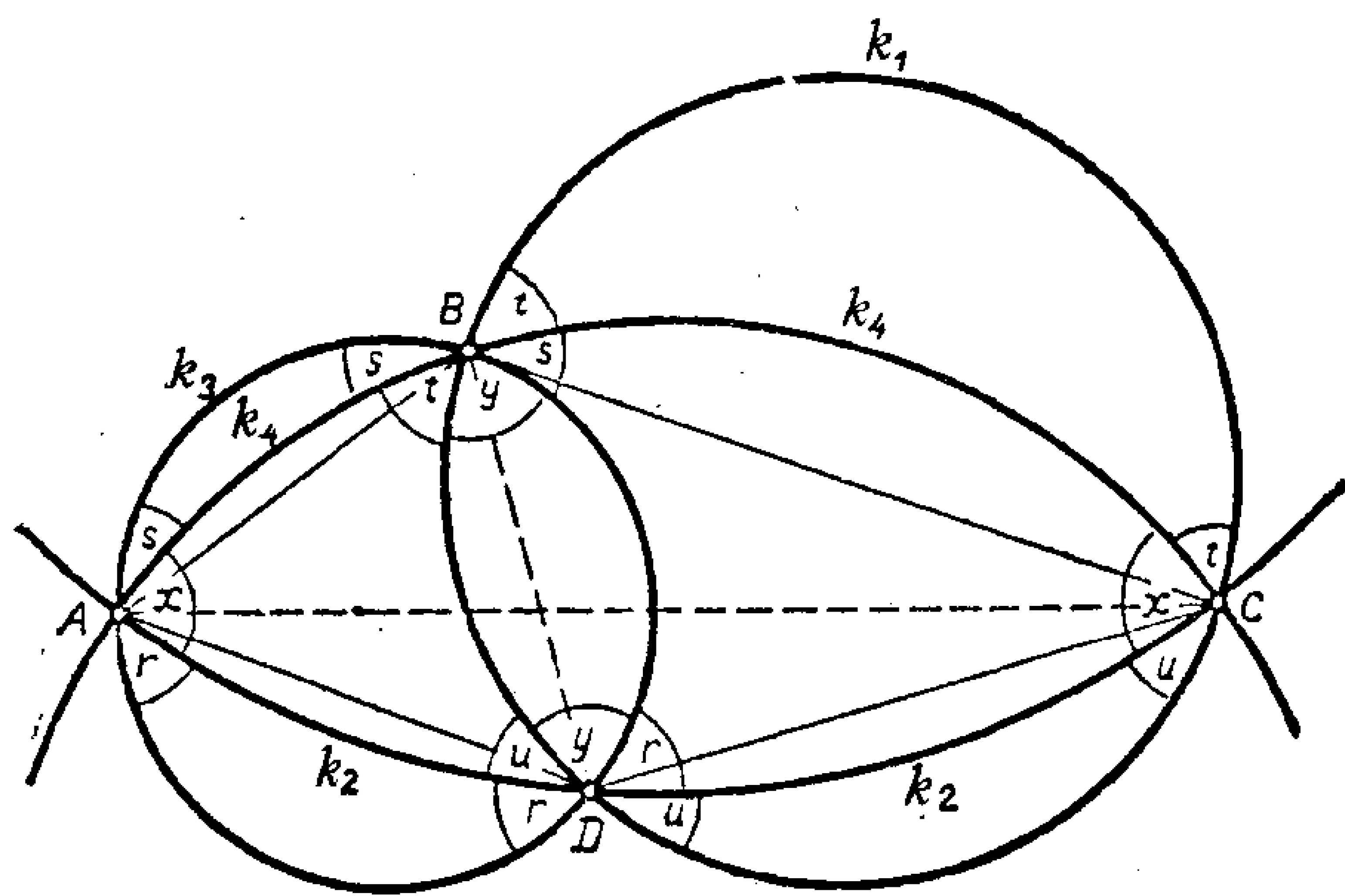


图 28

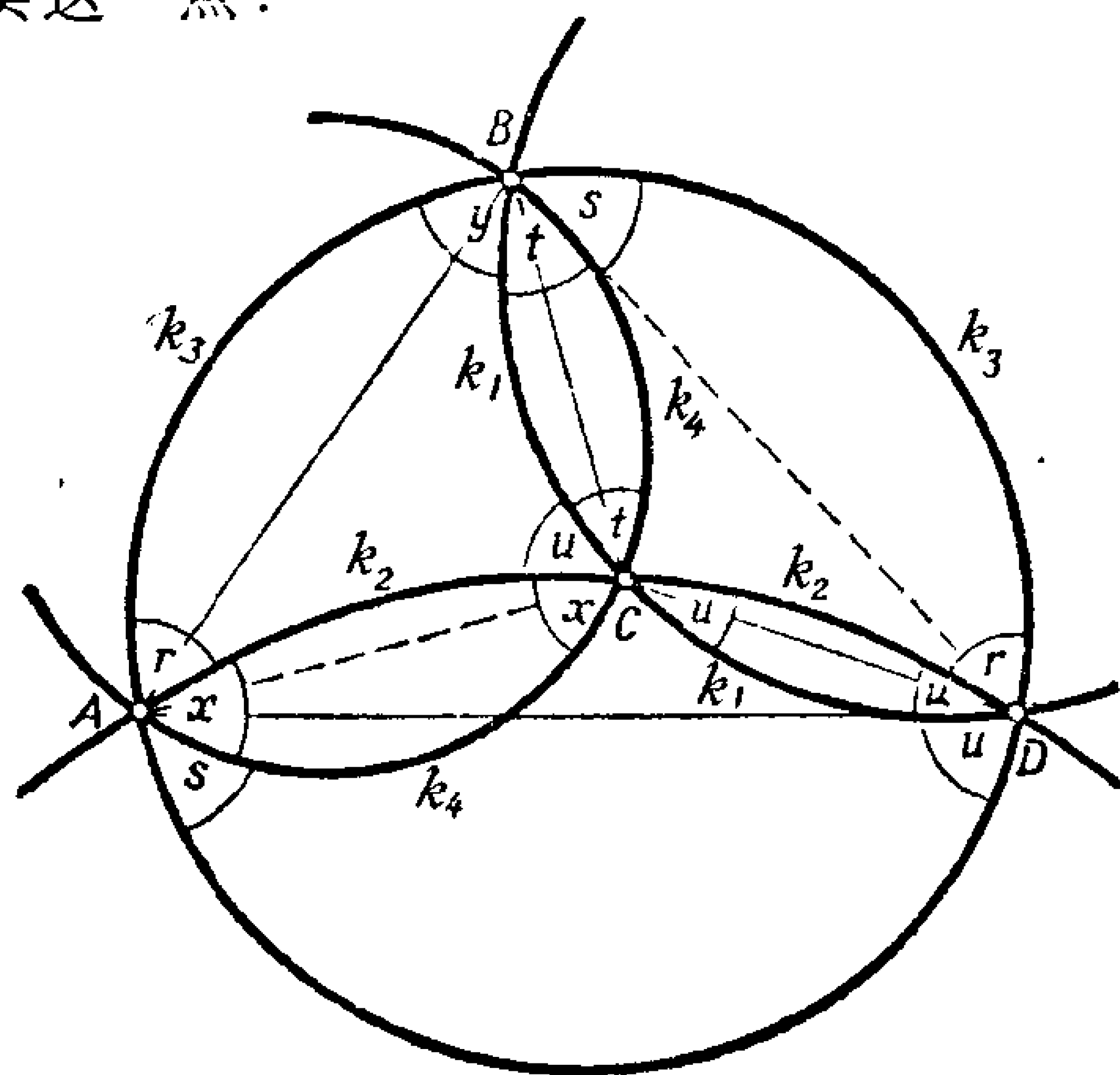


图 29

❶ 多边形叫做凸的，如果它完全包含了连接它的任意两点的线段．

在图28中，用相同字母表示的角是相等的．此外，在点 A，B，C，D 有下列关系式

$$r+x+s=180^\circ,\qquad s+y+t=180^\circ,$$
$$t+x+u=180^\circ,\qquad u+y+r=180^\circ.$$

因此
$$(r+x+s)-(s+y+t)+(t+x+u)-(u+y+r)=0.$$

去掉等式左边的括号，我们得到

$$2(x-y)=0.$$

由此得到 $x=y$，这就是所要证明的．

所有的论证对图29仍然有效．

八、1904年—1908年试题及解答

31．证明：对于圆内接凸五边形，如果它所有的角都相等，那么它的边也都相等.

【证明】 我们证明以五边形 $A_0A_1A_2A_3A_4$ 的顶点 A_0，A_1，A_2 和 A_3，A_2，A_1 为顶点的三角形是全等的（图30）.

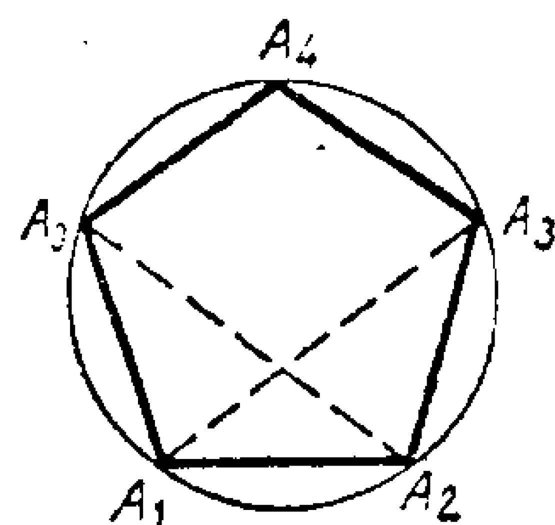


图 30

事实上，

$$A_1A_2=A_2A_1\ ,$$

此外，根据本题条件

$$\angle A_0A_1A_2=\angle A_3A_2A_1$$

和

$$\angle A_1A_0A_2=\angle A_2A_3A_1\ ,$$

因为它们是对应于同一圆弧的圆周角．从 $\triangle A_0A_1A_2$ 和 $\triangle A_3A_2A_1$ 全等推出

$$A_0A_1=A_2A_3\ .$$

用同样的办法证明，可以得到

$$A_0A_1=A_2A_3=A_4A_0=A_1A_2=A_3A_4\ .$$

所作的证明对于有奇数个边的多边形仍然有效．但是，对于有偶数个边的多边形，本题断言是不对的，矩形便是一例.

32．证明：当且仅当方程

$$y_1+2y_2+\cdots+ny_n=a-\frac{n(n+1)}{2}$$

没有非负整数解时

$$x_1+2x_2+\cdots+nx_n=a$$

没有正整数解（a 是正整数）

【证明】 数 x_1，x_2，…，x_n 满足方程

$$x_1+2x_2+\cdots+nx_n=a \qquad (1)$$

的必要充分条件是：数 $y_1=x_1-1$，$y_2=x_2-1$，…，$y_n=x_n-1$ 满足方程

$$(y_1+1)+2(y_2+1)+\cdots+n(y_n+1)=a.$$

不难看出，上式可变成下面的形式

$$y_1+2y_2+\cdots+ny_n=a-\frac{n(n+1)}{2}\ . \qquad (2)$$

因此，当且仅当 y_i 是非负整数时 x_i 是正整数.

这样一来，任何一组满足方程（1）的值（x_1，x_2，…，x_n）和满足方程（2）的某一组值（y_1，y_2，…，y_n）相对应．不仅如此，而且任何一组值（y_1，y_2，…，y_n），除了和满足方程（1）的某一组值（x_1，x_2，…，x_n）相对应的以外，都不是方程（2）的解．因此，方程（1）和（2）具有相同组数的解.

33．假设 A_1A_2 和 B_1B_2 是矩形的对角线，O 是它们的交点．确定（并用几何图形表示）：点 P 在什么位置时，才能同时满足不等式：

$$A_1P>OP,\quad A_2P>OP,\quad B_1P>OP,\quad B_2P>OP.$$

【**解**】不等式 $A_1P>OP$ 当且仅当点 P 和点 O 位于线段 A_1O 的中垂线的同一侧时成立（图31）．

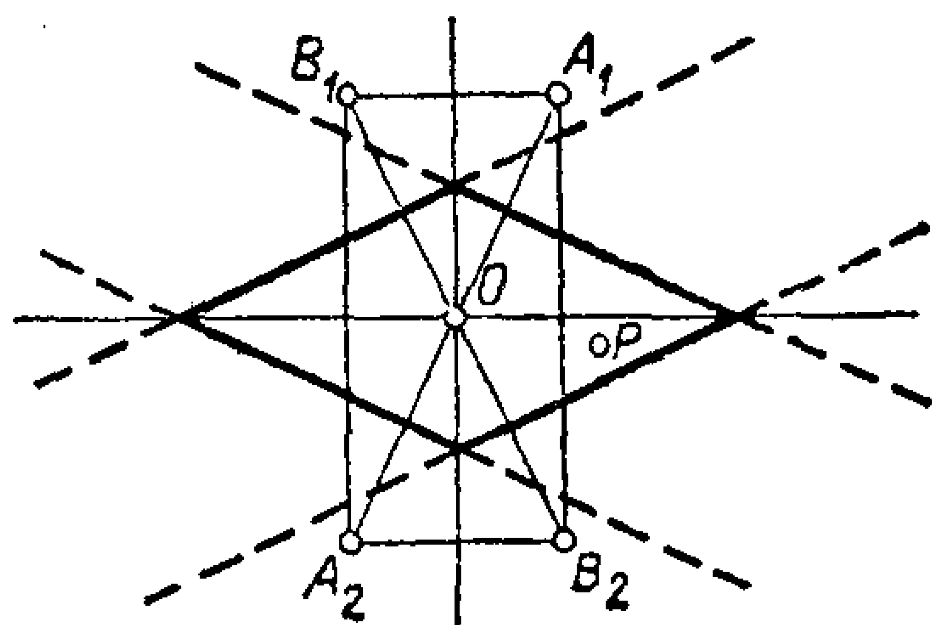


图 31

因此，满足本题条件所要求的所有不等式的点 P 的轨迹是以线段 OA_1，OB_1，OA_2，OB_2 的中垂线为边界且包含点 O 的半平面所交成的区域的内部．以线段 OA_1，OA_2 的中垂线为边界的半平面所交成的是以这两条直线为边界的带子．以线段 OB_1，OB_2 的中垂线为边界的半平面所交成的也是以这两条直线为边界的带子．因此，满足本题条件要求的所有不等式的点 P 充满了由两个带子相交而成的平行四边形的内部．根据作法，这个平行四边形关于它自己的对角线——矩形 $A_1B_1A_2B_2$ 的对称轴——是对称的．所以，所要求的点 P 的轨迹是一菱形的内部．

34．方程组

$$x+py=n,\qquad x+y=p^z,$$

（其中 n 和 p 是给定的自然数）有正整数解（x，y，z）的必要充分条件是什么？再证明：这样的解的个数不能大于 1．

【**解**】给定的方程

$$x+py=n,\qquad x+y=p^z$$

中的第二个方程仅当 $p>1$ 时有正整数解（x，y，z）．

于是，我们假定 $p>1$．满足原方程组的值 x 和 y 这时可以表示成下面的形式

$$x=\frac{p^{z+1}-n}{p-1}=\frac{p^{z+1}-1}{p-1}-\frac{n-1}{p-1}.\tag{1}$$

$$y=\frac{n-p^z}{p-1}=\frac{n-1}{p-1}-\frac{p^z-1}{p-1}.\tag{2}$$

对所有的正整数 z，

$$\frac{p^{z+1}-1}{p-1}=p^z+p^{z-1}+\cdots+1$$

及

$$\frac{p^z-1}{p-1}=p^{z-1}+\cdots+1$$

都具有整数值．由此根据关系式（1）和（2）推出：当且仅当数 $n-1$ 是 $p-1$ 的倍数时，x 和 y 具有整数值．

由关系式（1）和（2）得到的 x 和 y 仅在

$$p^{z+1}>n>p^z$$

时是正的．

换句话说，数 n 应该在数 p 的两个连续的乘幂之间，而 z 应该取数 p 的两个幂指数中最小的那一个．

于是原方程组有正整数解的必要充分条件是下列三个条件：

1） $p>1$；

2） $(n-1)$ 是 $(p-1)$ 的倍数（因此 n 不能小于 p）；

3） n 不等于数 p 或 p 的整数次幂.

如果所有这三个条件都满足，那么原方程组有且仅有一组解．为了得到这一组解，必须用上面所说的方法来选取 z，而 x 和 y 按关系式（1）和（2）算出.

35．单位正方形被平行于边的直线分成相等的 9 部分，并且删去正中间的一部分．剩下的 8 个小正方形每一个也被平行于边的直线分成相等的 9 部分，正中间的部分也删去．然后，对剩下的每一个正方形进行类似的做法．假设这样的做法重复 n 次．问

1） 边长为 $\frac{1}{3^n}$ 的正方形有多少？

2） 当 n 无限增加时，在 n 次之后所删去的正方形的面积之和的极限等于什么？

【**解**】1） 在第一次划分并从所得到的 9 个正方形中删去一个正方形后，剩下 8 个正方形（图32）．第二次划分后得到 8×9 个正方形，从它们之中删去 8 个正方形剩下 8^2 个正方形（图32）．如果这样重复 n 次，那么将剩下 8^n 个正方形．它们每一个的边长等于 $1/3^n$.

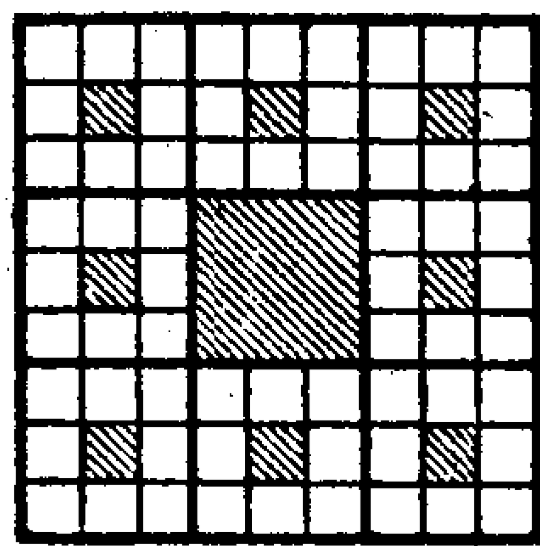


图 32

2） 在第 n 步之后所剩下的正方形的面积之和为

$$8^n\left(\frac{1}{3^n}\right)^2=\left(\frac{8}{9}\right)^n,$$

而删去的正方形的面积之和为

$$1-\left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

当 n 充分大时，量 $\left(\frac{8}{9}\right)^n$ 可为任意小．为了证实这一点，我们来研究 $\frac{8}{9}$ 的倒数．数 $\frac{9}{8}$ 大于 1．数 $\frac{9}{8}$ 的任一次乘幂是由前一次乘幂乘上 $(1+\frac{1}{8})$ 得到的，即当幂指数 n 增加 1 时，量 $\left(\frac{9}{8}\right)^n$ 比它上一次乘幂增加 $\frac{1}{8}$ 倍．因此，量 $\left(\frac{9}{8}\right)^n$ 可以取任意大的值，它的倒数当 n 充分大时可以取任意小的值★.

于是，当 n 无限增加时，由原正方形所删去的正方形的面积之和趋向于 1.

§29. 贝努里不等式❶

在35题的解答中，所要证明的断言 $\left(\frac{8}{9}\right)^n\to 0$ 被并不是更明显的断言 $\left(\frac{9}{8}\right)^n\to\infty$ 所代替，从实质上来说后一个断言是未证明的．精确的论证可以借助于下面的初等不等式来进行.

如果 $\alpha>-1$ 且 $n\geqslant 1$，那么

$$(1+\alpha)^n\geqslant 1+n\alpha$$

❶ 俄译编辑所加.

（贝努里不等式）.

为了证明这个不等式，我们利用完全数学归纳法。对于 $n=1$，不等式成立（归纳基础）.假设它对 $n-1$ 成立（归纳假设），即

$$(1+\alpha)^{n-1}\geqslant 1+(n-1)\alpha .$$

将这个不等式两边乘以正数 $1+\alpha$，我们得到

$$(1+\alpha)^n=(1+\alpha)(1+\alpha)^{n-1}\geqslant(1+\alpha)[1+(n-1)\alpha]$$
$$=1+\alpha n+\alpha^2(n-1)\geqslant 1+\alpha n,$$

即所要证明的不等式对于 n 也是成立的. 根据数学归纳原理（见§3），贝努里不等式对所有的自然数 n 都成立.

现在我们有：当 $n\to\infty$ 时，

$$\left(\frac{9}{8}\right)^n=\left(1+\frac{1}{8}\right)^n\geqslant 1+\frac{n}{8}\to\infty.$$

36．在 $\triangle ABC$ 的边 AB 上取一点 C_1，它在顶点 A 和 B 之间，连接线段 CC_1．过顶点 A 作平行于线段 CC_1 的直线，和边 BC 的延长线相交于点 A_1，过顶点 B 作平行于线段 CC_1 的直线，和边 AC 的延长线相交于点 B_1．证明：

$$\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}=\frac{1}{CC_1}.$$

【证明】因为线段 AA_1，BB_1 和 CC_1 平行（图33），所以 $\triangle CAC_1$ 和 $\triangle B_1AB$ 相似，$\triangle CBC_1$ 和 $\triangle A_1BA$ 相似.

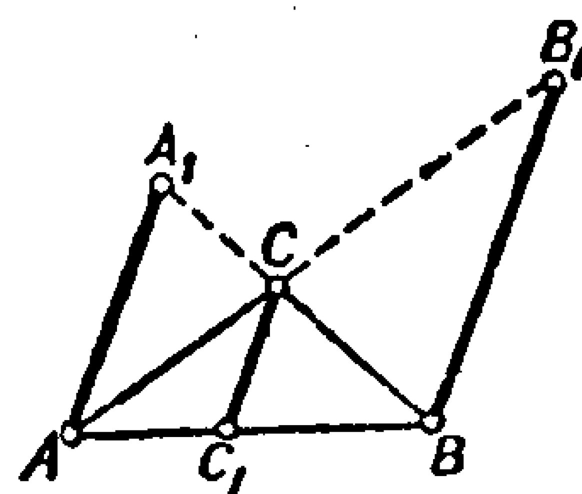


图 33

由对应边的关系

$$CC_1:B_1B=AC_1:AB,$$
$$CC_1:A_1A=C_1B:AB$$

得到

$$\frac{CC_1}{A_1A}+\frac{CC_1}{B_1B}=\frac{AC_1+C_1B}{AB}=\frac{AB}{AB}=1.$$

于是

$$\frac{1}{A_1A}+\frac{1}{B_1B}=\frac{1}{CC_1},$$

这就是所要证明的.

37．证明：任意一个角的正弦和余弦可以用有理数表示，在而且仅仅只有在下列情况下：这个角的半角的正切或者是有理数，或者是不确定的.

【证法1】因为

$$\sin\alpha=2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}, \tag{1}$$

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}, \tag{2}$$

$$1=\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}, \tag{3}$$

所以

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

如果$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$是确定的，因而$\cos\frac{\alpha}{2}$不为零，那么右边的表达式的分子分母可以用$\cos^2\frac{\alpha}{2}$除. 于是，在这种情况下，关系式

$$\sin\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \tag{4}$$

是正确的.

如果$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$取有理数值，即可以表示成两个整数的比$m/n$的形式，那么

$$\sin\alpha=\frac{2mn}{m^2+n^2},\quad \cos\alpha=\frac{n^2-m^2}{m^2+n^2}.$$

于是，如果$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$是有理数，那么$\sin\alpha$和$\cos\alpha$也是有理数.

如果$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$是不确定的，那么$\cos\frac{\alpha}{2}=0$，因此$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm1$. 将这些$\sin\frac{\alpha}{2}$和$\mathrm{con}\frac{\alpha}{2}$的值代入到关系式（1）和（2），我们得到$\sin\alpha=0$，$\cos\alpha=-1$. 于是，在这种情况下，和前一种情况一样，$\sin\alpha$和$\cos\alpha$也具有有理数值.

现在我们来证明逆命题. 由关系式（1）—（3）推出

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2} \tag{5}$$

和

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{6}$$

因此如果$\sin\alpha$和$\cos\alpha$具有有理数值，且$1+\cos\alpha$不等于零，那么$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$也具有有理数值.

如果$1+\cos\alpha=0$，那么由关系式（5）有$\cos\frac{\alpha}{2}=0$，因而$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$不确定.

【证法2】 我们借助于单位圆来确定角的三角函数. 这时$\cos\alpha=x$，$\sin\alpha=y$，其中x和y是单位圆周上的点P的坐标（图34）.

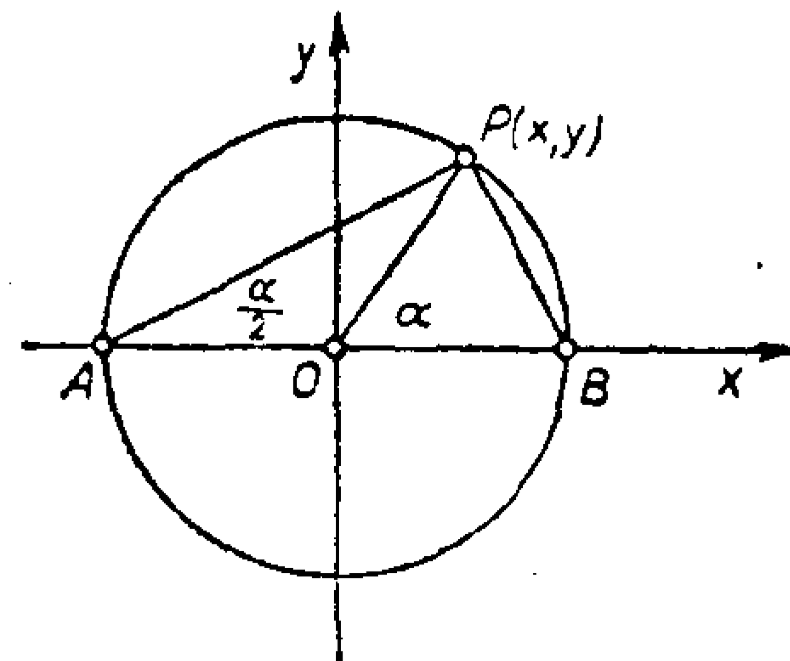


图 34

由圆心角和圆周角之间的关系得$\angle PAO=\frac{\alpha}{2}$. 如果直线$AP$的斜率等于$m$（即如果$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=m$），那么直线$BP$的斜率等于$-\frac{1}{m}$. 如果$\sin\alpha$和$\cos\alpha$是有理数，那么直线$AP$的斜率（即$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$）也是有理数. 反之，如果$m$是有理数，那么当写出直

线 AP 和 BP 的方程

$$y=m(x+1) \text{和} \quad y=-\frac{1}{m}(x-1)$$

时，不难求出它们的交点 P 的坐标是有理数．因此，$\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 是有理数．

38．在菱形的边上向外作正方形，这些正方形的中心是 K、L、M、N．证明：四边形 $KLMN$ 是正方形．

【证法1】菱形以及和在它边上向外作的正方形所构成的图形关于菱形的对角线是对称的，即关于两个相互垂直的轴是对称的，于是四边形 $KLMN$ 对于这两个轴也是对称的．因为它的顶点不在对称轴上，所以四边形 $KLMN$ 是矩形，并且它的中心和对称轴（菱形的对角线）的交点 O 相重合．

为了完成证明，只须证明矩形 $KLMN$ 的对称中心 O 和顶点 K 的连线和菱形的任一对角线构成 $45°$ 的角（图35）．这实际上是对的，因为四边形 $AKBO$ 的对角 $\angle BOA$ 和 $\angle BKA$ 都是直角，于是 $AKBO$ 内接于一圆，因此 $\angle BOK=\angle BAK=45°$．

【证法2】我们证明更一般的断言．代替菱形，我们研究任意的平行四边形 $ABCD$．在它的一个边上，例如在 BC 上，作一个正方形，而在这个正方形的每一个边上作和平行四边形 $ABCD$ 全等的平行四边形，如图36所示．正方形的一个顶点发出的但又不和正方形的边重

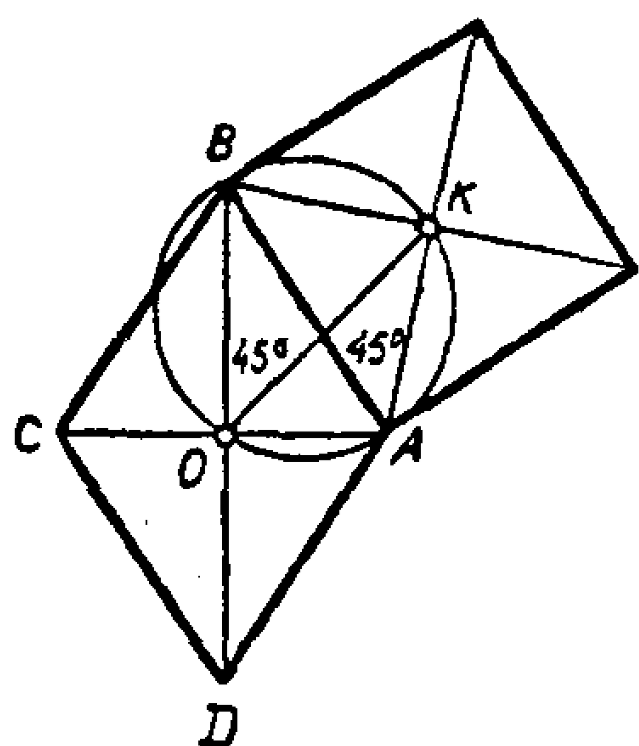


图 35

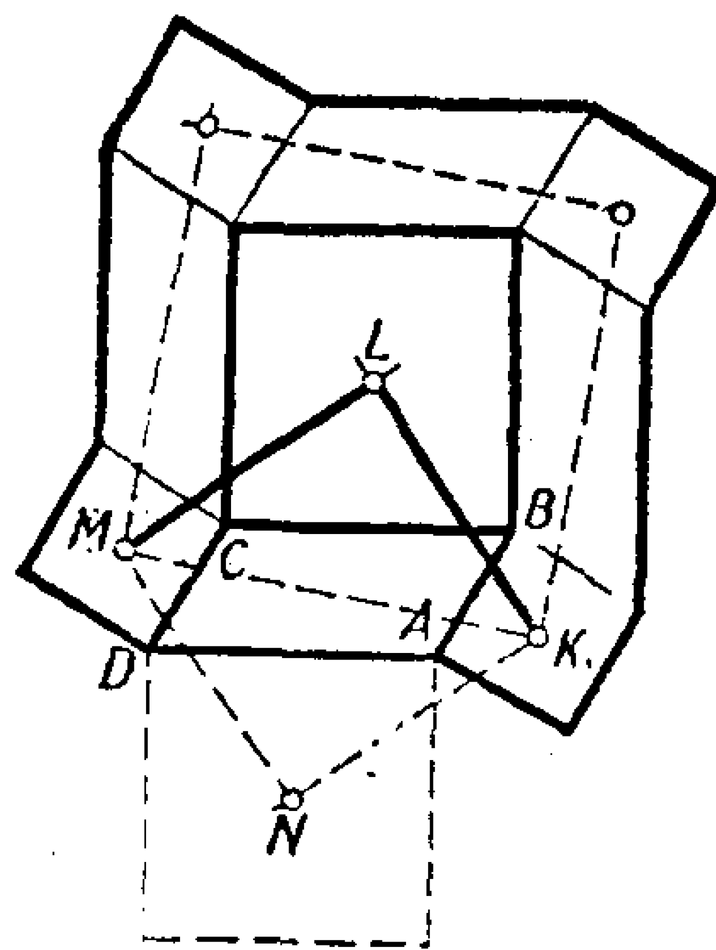


图 36

合的两个平行四边形的边相等且相互垂直．我们将这些由正方形的一个顶点发出的每一对边，补充成一个正方形．在边 BC 上作正方形所得到的图形当绕着中心 L 旋转 $90°$ 时，又得到了它自身，而在平行四边形的边 AB 上所作的正方形的中心 K 旋转到在边 CD 上所作的正方形的中心 M．这样一来，$\triangle KLM$ 是等腰直角三角形．当围绕平行四边形的中心旋转 $180°$ 时，$\triangle KLM$ 和 $\triangle MNK$ 重合．因此，四边形 $KLMN$ 是正方形，这就是所要证明的．

【证法3】❶我们仍对 $ABCD$ 是平行四边形的情形来证明本题．设 AC 与 BD 相交于 O，L、M、N、K 是以边 BC，CD，DA，AB 向外作的正方形的中心（图37）．

在 $\triangle CAP$ 中，点 O 和 L 分别是边 CA 和 CP 的中点，所以 $OL \underset{=}{\parallel} \frac{1}{2}AP$．在 $\triangle DRB$ 中，

---

❶ 系中译者所加．

点N和O分别是边DR和DB的中点，所以$ON \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}RB$.因为$AR \underline{\underline{/\!/}} PB$，所以$APBR$是平行四边形，于是$AP \underline{\underline{/\!/}} RB$．因此，线段$OL$和$ON$都和$RB$平行，于是$N$、$O$、$L$在一直线上，且

$OL=ON=\frac{1}{2}RB$，$NL \underline{\underline{/\!/}} RB$．同理可证，点$M$、$O$、$K$在一直

线上，$OM=OK=\frac{1}{2}DQ$，且$MK \underline{\underline{/\!/}} DQ$．

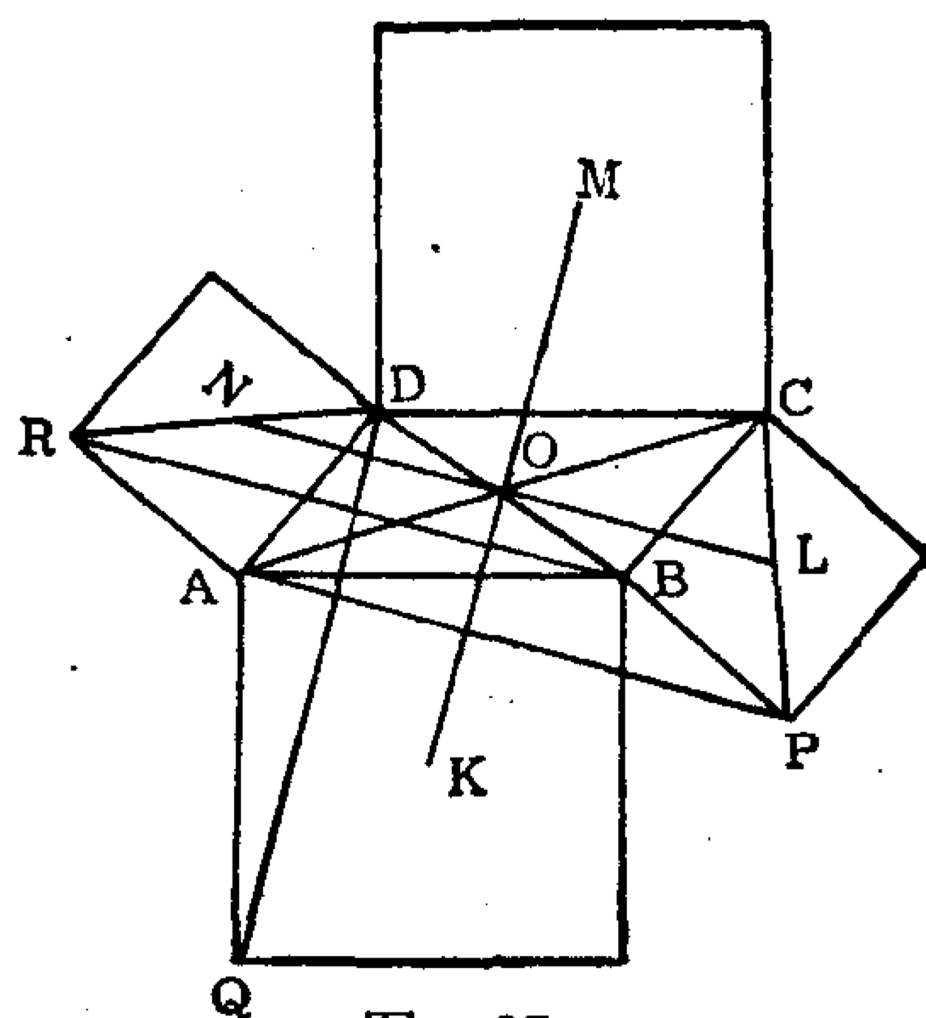


图 37

对于$\triangle AQD$和$\triangle ABR$来说，如果将$\triangle AQD$绕点A旋转90°便和$\triangle ABR$重合．于是$RB \perp DQ$，且$RB=DQ$．由上面的证明便可推出，$MK \perp NL$，且$OL=OM=ON=OK$．于是四边形$KLMN$是正方形.

注．当$ABCD$不是平行四边形，而是任意四边形时，本题断言不再成立了．但是不管$ABCD$是凸四边形或非凸的四边形，仍然有$MK \perp NL$和$MK=NL$．

我们把它叙述成下面的命题.

命题．设$ABCD$是任一四边形（凸的或非凸的），分别以边BC，CD，DA，AB为边长作正方形，而且这些正方形是这样作的，当我们沿着正方形的边从B走到C，再从C走到D，D走到A，A走到B时，所作的正方形总在我们的右（左）手边．如果这些正方形的中心顺次为L，M，N，K，那么LN和MK垂直且相等.

我们简单给出证明如下.

设BD是四边形$ABCD$的一条对角线，而且完全落在$ABCD$内（图38、39）．设点O是BD的中点，于是$OK /\!/ DQ$，且$OK=\frac{1}{2}DQ$，$ON /\!/ RB$，且$ON=\frac{1}{2}RB$．由于将$\triangle ADQ$旋转90°后，将和$\triangle ARB$重

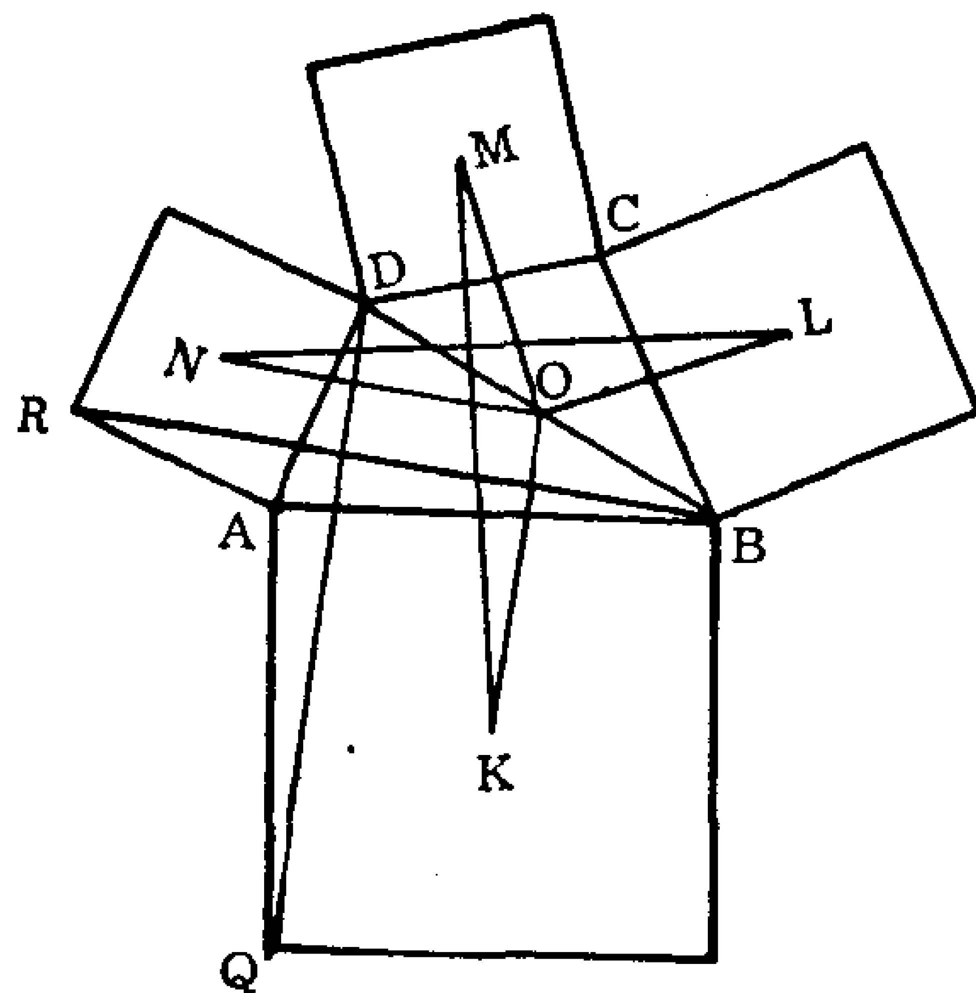


图 38

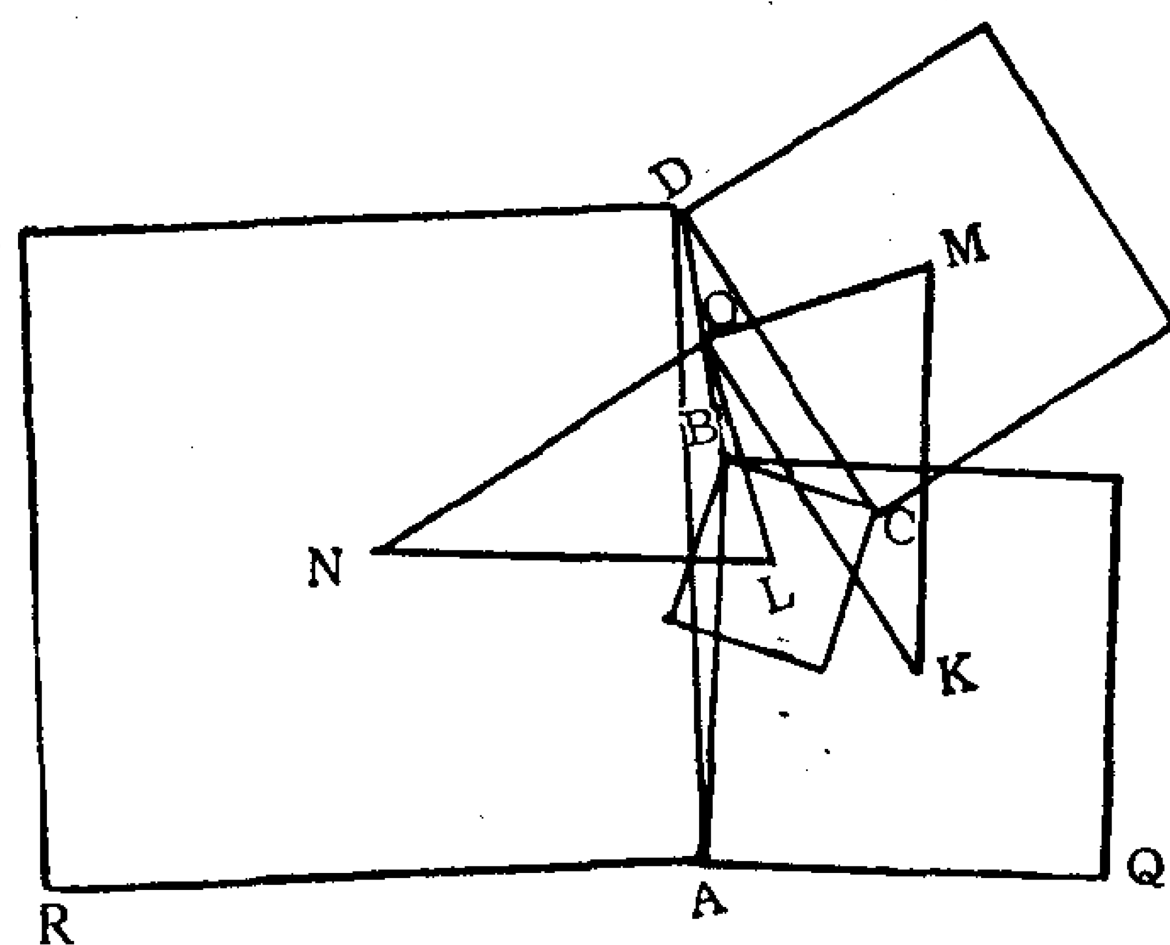


图 39

合，所以$DQ \perp RB$，且$DQ=RB$，于是$OK \perp ON$，且$OK=ON$．同理可证，$OM \perp OL$，且$OM=OL$.

由于我们对这些正方形的作法的规定，于是当OK绕点O按某一方向旋转90°和ON重合时，OM绕点O也按这一方向旋转90°和OL重合．这就是说，将$\triangle OKM$旋转90°时，它和$\triangle ONL$重合，于是MK和LN垂直且相等.

39．假设a_1，a_2，…，a_n是数1，2，…，n的某种排列．证明：如果n是奇数，则乘

积

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$$

是偶数.

【证法1】 设$n=2k+1$(k是某一个整数)表示乘积

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$$

的因子的个数.

每一个因子包含两个数：被减数和减数. 在这些数中有多少个奇数呢？

在被减数中和减数一样，都有 $(k+1)$ 个奇数，即

$$1=2\times1-1,\quad 3=2\times2-1,\ \cdots,\quad n=2(k+1)-1.$$

这样一来，在所研究的表达式中，总共有 $2(k+1)=n+1$个奇数. 但是由于只有 n 个因子，所以至少有一个因子包含两个奇数：奇被减数和奇减数. 这样的因子是偶数，因而整个乘积是偶数，这就是所要证明的. ★

【证法2】 因子的总个数是奇数，而这些因子的和等于零$(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_n-n)=0$,零为偶数. 如果所有的因子都为奇数，那么它们的和应该是奇数. 因此，至少有一个因子是偶数，于是因子的乘积是偶数.

§30. 狄里希利原理❶

在解题时（例如在39题证法1中）常用到一个原理，它可直观地叙述如下：如果有多于三根的火柴，那么无论我们怎样把它们装到三个火柴盒中去，至少有一个火柴盒装有多于一根的火柴. 这个原理（所谓狄里希利原理）可比较抽象地叙述成下面的形式：如果把多于n个的物体放在 n 个位置上，那么至少在一个位置上有多于一个的物体.

40. 假设p和q是两个奇整数. 证明：方程

$$x^2+2px+2q=0$$

不可能有有理根.

【证明】 1) 若p和q是奇数，则方程

$$x^2+2px+2q=0$$

的根不可能是奇数.

事实上，当x是奇数时，二次三项式$x^2+2px+2q$的最高次项x^2具有奇数值，而它的线性部分$2px+2q$是偶数. 因此，当x是奇数时，二次三项式$x^2+2px+2q$取奇数值，因此不可能为零.

2) 二次方程

$$x^2+2px+2q=0$$

的根不可能是偶数.

事实上，如果x是偶数，那么x^2+2px能被4整除，而这时常数项被4除时余2. 因此，$x^2+2px+2q$被4除时也余2，从而不可能变为零.

3) 二次方程

❶ 在我国常称为“抽屜原则”. ——中译者注

$$x^2+2px+2q=0$$

的根不可能是有理分数.

事实上，给定的方程不难变成下面的形式

$$(x+p)^2=p^2-2q.$$

如果 x 是有理分数，那么 $x+p$ 也是有理分数，它的平方不可能等于整数 p^2-2q.★

§31. 整系数代数方程

40题的后一部分证明基于下面的事实：有理分数的平方不可能是整数. 它是下述结论的特殊情况：

如果代数方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

的系数都是整数，那么它的有理根也都是整数.

下面的证明适用于任意次的方程. 为了简单起见只研究它在二次方程的情形.

设具有整系数 a 和 b 的方程

$$x^2+ax+b=0$$

有有理根，它（按照定义）可以表示成 $x=\frac{r}{s}$，其中 r 和 s 是整数，而且 s 不为零. 我们约定，r 和 s 是互素的，即除 1 外，没有其它正的公约数（如果不是这样，数 r 和 s 可约去不为 1 的公约数）.

将 $x=\frac{r}{s}$ 代入到给定的二次方程且乘以 s^2，我们得到

$$r^2+ars+bs^2=0\ , \qquad (1)$$

由此

$$r^2=-(ar+bs)s. \qquad (2)$$

如果 s 的绝对值大于 1，那么存在一个素数 p，它能整除数 s. 但这时由于关系式(2)，数 r^2 也能被 p 整除. 像 § 2 中所表明的，这只有在 r 能被 p 整除时才有可能. 这样一来，素数 p 便是数 r 和 s 的公约数，这与 r 和 s 互素的假设矛盾.

于是，s 的绝对值不可能大于 1，s 又是整数，因而只能等于 1. 这样一来，$x=\frac{r}{s}$ 只能是整数.

41. 证明：▱$ABCD$ 内任一点 P 到平行四边形最近的顶点的距离不超过△ABC的外接圆半径 R.

【**证法1**】因为▱$ABCD$ 关于自己的中心是对称的，所以，不失一般性，可以假定点 P 在△ABC 内，或在边 AC(平行四边形的对角线)上. 如果我们能证明线段 PA，PB，PC中最短的一个不超过△ABC 的外接圆的半径 R，那么原来的断言便被证明了. 于是，如果我们证明了下面的定理，问题便解决了.

三角形内或三角形的一边上的任一点 P 到离它最近的顶点的距离不超过外接圆的半径 R.

我们先证明如下的引理：

位于直角三角形内或它的边上的任一点 P 到斜边的两个端点中的任意一点的距离不超过斜边的长.

如果点 P 在直角 $\triangle ABC$ 的斜边上，引理的断言显然成立.

如果点 P 在直角 $\triangle ABC$ 内（图40）或在它的一个直角边上，那么在 $\triangle ABP$ 中，$\angle PAB$ 与 $\angle PBA$ 之和不大于 $90°$. 因此，$\triangle ABP$ 中最大的角是 $\angle APB$，它所对的边 AB 大于边 AP 和 BP.

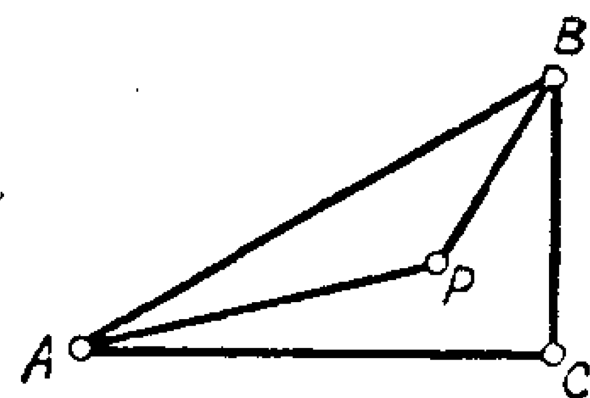


图 40

现在我们利用引理来证明前面的关于任意三角形 ABC 的定理.

假设 A，B，C 是所研究的三角形的顶点（图41和42），A'，B'，C' 是对边的中点，O 是外接圆心. 位于 $\triangle ABC$ 内或它的边上的点 P 分布在直角三角形 AOB'，$B'OC$，COA'，

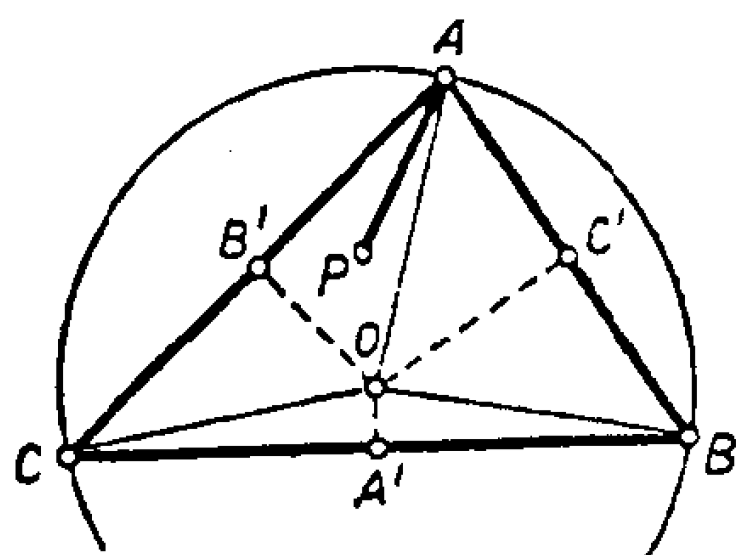


图 41

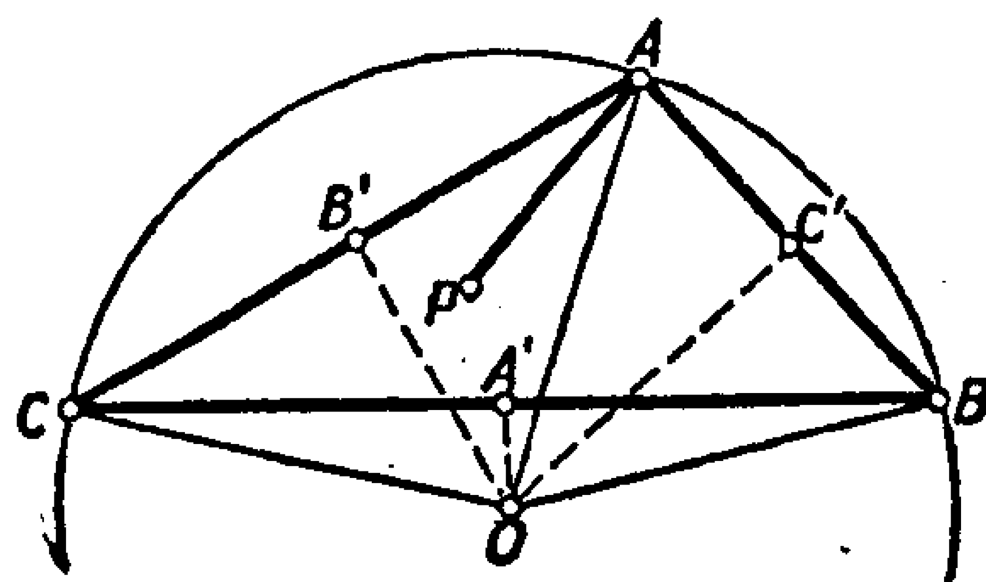


图 42

$A'OB$，BOC'，$C'OA$ 内或在这些三角形的某一个的边上. 例如，假设点 P 在直角 $\triangle AOB'$ 内，这时，根据我们所证明的引理得

$$AP \leqslant AO = R.$$

【证法 2】 只要证明证法 1 中的定理就行了.

假设 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆心. 如果点 P 和点 O 重合，那么定理的断言显然成立. 如果点 P 异于点 O，那么作线段 PO 的中垂线. 这条直线或者把三角形分成两部分（图43），或者

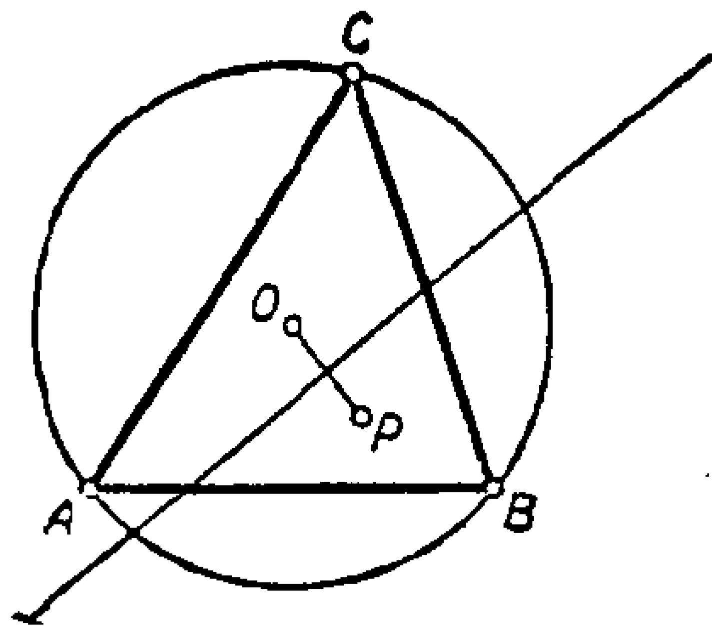


图 43

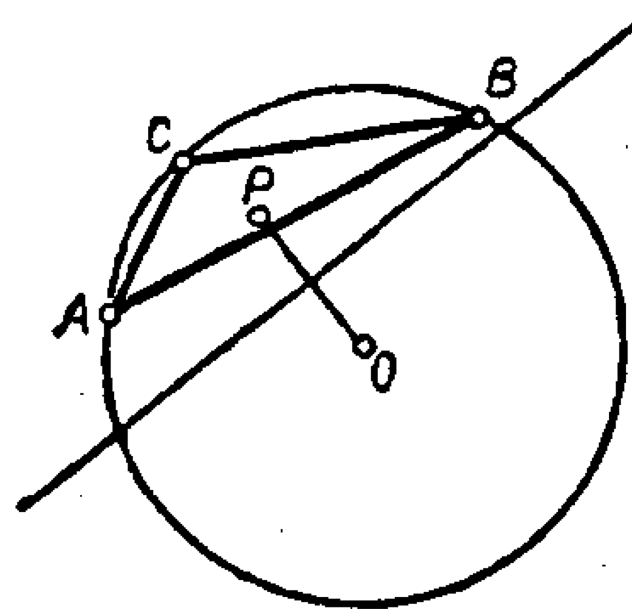


图 44

是两个半平面的边界，其中一个半平面完全包含了三角形（图44）. 在这两种情况下，点 P 至少和 $\triangle ABC$ 的一个顶点分布在线段 PO 的中垂线的同一侧. 这个顶点到点 P 的距离小于这个顶点到外心 O 的距离. 这就是所要证明的.

42. 假设有理数 $\frac{r}{s}$ 的十进制小数形式是

$$\frac{r}{s} = 0.k_1k_2k_3\cdots.$$

证明：在数列

$$\sigma_1 = 10\frac{r}{s} - k_1, \qquad \sigma_2 = 10^2\frac{r}{s} - (10k_1 + k_2),$$

$$\sigma_3 = 10^3\frac{r}{s} - (10^2k_1 + 10k_2 + k_3),\ \cdots$$

中至少有两个重合.

【证明】我们取表示有理数 r/s 的无穷十进制小数 $0.k_1k_2k_3\cdots$ 的 m 位. 因此数

$$0.k_1k_2\cdots k_m = \frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \cdots + \frac{k_m}{10^m}$$

不大于 r/s，而这个数加上 $1/10^m$ 则显然超过 r/s，即

$$0 \leqslant \frac{r}{s} - \left(\frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + \cdots + \frac{k_m}{10^m}\right) < \frac{1}{10^m}.$$

将不等式乘以 10^m，我们得到非负数

$$\sigma_m = \frac{10^m r - s(10^{m-1}k_1 + 10^{m-2}k_2 + \cdots + k_m)}{s}$$

小于1. 因此，σ_m 的分子只能取数 0，1，2，…，$s-1$ 中的某一个. 换句话说，序列 σ_1，σ_2，…，σ_m，…的每一项可以视它的分子等于数 0，1，2，…，$s-1$ 中的哪一个来分成 s 类. 但这时，在前 $s+1$ 项中一定能找到两个相等的. ❶

43. 证明：如果 a 和 b 是两个奇整数，那么，在而且仅仅只有在 $a-b$ 能被 2^n 整除时，a^3-b^3 才能被 2^n 整除.

【证明】1） 大家知道，a^3-b^3 可以表示成数 $A=a^2+ab+b^2$ 和数 $B=a-b$ 的乘积. 如果 B 能被 2^n 整除，那么乘积 AB 也能被 2^n 整除.

2） 因为 a 和 b 是奇数，所以 $A=a^2+ab+b^2$ 也是奇数. 因此 A 和 2^n 是互素的(见§23). 但这时乘积 AB 可以被 2^n 整除仅仅在 B 能被 2^n 整除的时候才有可能.

44. 证明：当 $n>2$ 时，任意直角三角形的斜边长的 n 次幂大于直角边的 n 次幂之和.

【证明】由于斜边 c 大于直角边 a 和 b 中的任何一个. 因此

$$c^n = (a^2+b^2)c^{n-2} = a^2c^{n-2} + b^2c^{n-2} > a^n + b^n.$$

45. 在圆内有两个不同类型的内接正十边形. 一个十边形（正凸的）是这样作的：圆周被分成十个相等的部分以后，用直线段连接相邻的分点. 另一个十边形（正星形的）这样作：首先圆周被分成十个相等的部分，然后将每一个分点和与它相距3/10圆周的分点相连接. 证明：星形正十边形的边长和正凸十边形的边长之差等于圆的半径.

【证明】在四边形 $ABOK$ 和 $DEHK$（图45）中，对边彼此平行. 因此

$$AB=KO,\quad HE=KD,$$

由此得到

$$HE-AB=KD-KO=OD.$$

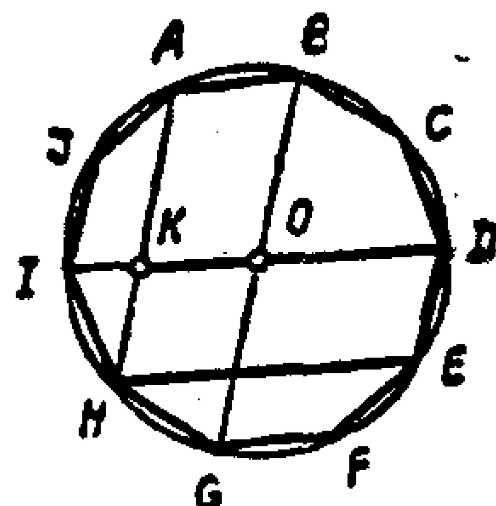


图 45

❶ 最后这句话可由§30的狄里希利原理推出.

九、1909年—1911年试题及解答

46．证明：在三个连续的自然数中，最大的数的立方不可能等于其它两个数的立方和．

【证明】★假设$n-1$，n，$n+1$是三个连续的自然数．如果其中最大的数的立方等于前面两个数的立方和，那么

$$(n+1)^3=n^3+(n-1)^3,$$

或者同样的，

$$n^3+3n^2+3n+1=n^3+n^3-3n^2+3n-1,$$

由此得到

$$2=n^2(n-6).$$

等式右边的数仅当$n>6$时才是正的，但这时它不可能等于2，因为

$$n^2(n-6)>36>2.$$

§32. 关于费尔马大定理

46题的断言是费尔马给出的（未加证明）下述定理的特殊情况，这个定理是：

对任意的自然数$n>2$，方程

$$x^n+y^n=z^n$$

没有正整数解．

已经证明了这个（以**费尔马大定理**而著称的）定理对于所有$n<5500$是成立的，但是在一般情况下证明费尔马大定理的所有尝试至今始终是毫无成效的．对于某些特殊的情形却不难证明费尔马大定理．46题的下述推广就是如此．

任何三个构成等差数列的整数x，y，z不满足方程

$$x^n+y^n=z^n,$$

这里的指数$n>1$是奇整数．

设$x=y-d$，$z=y+d$，其中y和d是某整数．将方程

$$(y-d)^n+y^n=(y+d)^n \tag{1}$$

所有的项除以d^n且用t来表示有理数$\frac{y}{d}$，方程（1）变成

$$(t-1)^n+t^n=(t+1)^n,$$

去掉括弧并合并同类项，得

$$t^n-2C_n^1t^{n-1}-2C_n^3t^{n-3}-\cdots-2=0. \tag{2}$$

因为这个方程最高次项的系数等于1，而其余的系数都是整数，所以方程（2）的一切有理根只能是整数（见§31）．

但是（与40题所研究的方程一样）无论是奇整数或偶整数的t都不满足方程（2）．因此，方程（2）在有理数范围内无解，故无任何整数y满足方程（1）．

47．证明：任何一个锐角的弧度值小于这个角的正弦和正切的算术平均值．

【证明】假设φ是单位圆的弧AB的量值．我们过点A作弧AB的切线．用D表示这个切线和半径OB的延长线的交点，用C表示这个切线和过点B所作的弧AB的切线的交点（图46）．因为单位圆的扇形OAB和$\triangle OAB$，$\triangle OAD$的面积分别是

$$\frac{1}{2}\varphi,\quad \frac{1}{2}\sin\varphi,\quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi,$$

那么必须证明

$$S_{扇形OAB}<\frac{1}{2}(S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OAD}).$$

四边形$OACB$包含扇形OAB．因此，如果我们能证明

$$S_{OACB}<\frac{1}{2}(S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OAD}),$$

那么问题的断言便是正确的了．

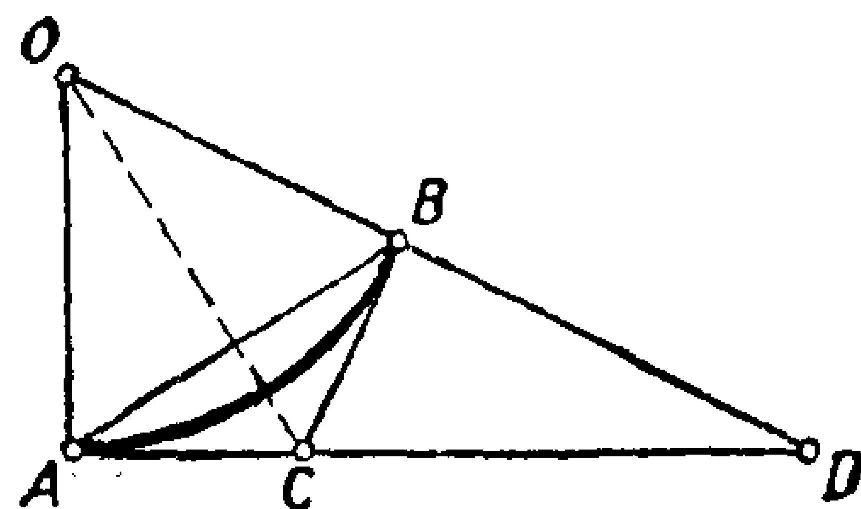


图 46

将不等式两边乘以2并将S_{OACB}移到右边，$S_{\triangle OAB}$移到左边，我们将不等式变为

$$S_{OACB}-S_{\triangle OAB}<S_{\triangle OAD}-S_{OACB}$$

或同样的

$$S_{\triangle ACB}<S_{\triangle CDB}. \qquad (*)$$

$\triangle ACB$和$\triangle CDB$具有公共顶点B，且底边AC和CD在同一直线上．因此，这两个三角形从公共顶点所作的高是相等的．于是为了证明不等式（*）(从而证明原来的不等式)，必须证明$AC<CD$．但这个不等式是正确的，因为在直角$\triangle CDB$中，斜边CD大于直角边CB，而$CB=AC$．

从我们所引的解答中不难证明如下的更一般的定理：**任意一个锐角的弧度值小于这个角的正弦和正切的调和平均值**．这个断言比47题所证明的断言要强，因为两个不同正数的算术平均值大于它们的调和平均值．★

因为$\sin\varphi$和$\operatorname{tg}\varphi$的调和平均值可以变成

$$\frac{2}{\frac{1}{\sin\varphi}+\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}}=\frac{2\sin\varphi}{1+\cos\varphi}=\frac{4\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}=2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

那么必须证明

$$\varphi<2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

但是这个不等式可由不等式

$$S_{扇形OAB}<S_{OACB}$$

推出，因为扇形OAB的面积等于$\frac{1}{2}\varphi$，而四边形$OACB$的面积等于$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$．这是由于四边形$OACB$的面积的一半等于$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$，即是$\triangle ACO$的面积．

§33. 关于两个数的调和平均值

数$\frac{1}{a}$和$\frac{1}{b}$的算术平均值的倒数叫做两个数 a 和 b 的调和平均值 h. 由这个定义有

$$\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

即

$$h=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2ab}{a+b}.$$

在47题的证明中我们利用了：**两个不同正数的算术平均值大于它们的调和平均值.**

这个断言的正确性可如下推出：因为（根据假设）$a\neq b$，$a+b>0$，所以差

$$\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$$

是正的.

48. 假设A_1，B_1和C_1是三角形ABC的边BC、CA和AB上的高的垂足，M是高的交点. 证明：如果$\triangle ABC$不是直角三角形，那么和三角形$A_1B_1C_1$所有三边（或它们的延长线）都相切的四个圆的圆心分别和点A，B，C，M重合. 当三角形ABC是钝角三角形和三角形ABC是锐角三角形时有什么不同?

【证明】如果$\triangle ABC$是直角三角形，那么它的两个高的垂足和直角顶点相重合，且对$\triangle A_1B_1C_1$来说，本题的断言是不对的.

如果$\triangle ABC$是锐角或钝角三角形，那么断言的证明已详细叙述在第 9 题的解答（Ⅰ. 和 Ⅱ.）和 § 8 中.

49. 如果

$$a^2+b^2+c^2=1,$$

且a、b，c是实数. 试证：

$$-\frac{1}{2}\leqslant ab+bc+ca\leqslant 1.$$

【证明】我们来证明不等式

$$-(a^2+b^2+c^2)\leqslant 2(ab+bc+ca)\leqslant 2(a^2+b^2+c^2) \qquad (1)$$

对任何实数a，b，c都成立. 当把关系式$a^2+b^2+c^2=1$代入（1）并将三个括号前的系数除以 2，我们便可得到本题的断言.

不等式（1）不难从下面两个明显的不等式推出：

$$2(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2\geqslant 0,$$

$$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0.$$

50．假设 a，b，c，d 是整数，且数

$$ac,\quad bc+ad,\quad bd$$

都能被某整数 u 整除．证明：数 bc 和 ad 也都能被 u 整除．

【证法1】我们已经知道：每一个正整数可以分解为素数乘幂的乘积，而且每一个正整数仅有一个（如果不计因子的排列顺序）这样的分解式．素数 p 在给定的数的分解式中的最高次幂是这个给定数的因子（见§7）．

如果考虑到这个说明并注意到§21中所说的，那么50题的断言可以用下面的方式来叙述：**如果在数**

$$ac,\quad bc+ad,\quad bd \tag{1}$$

的任何一个公约数 u 的标准分解式中，某个素数 p 的指数是 r，那么在数 bc 和 ad 的分解式中，数 p 的指数不小于 r．

因为（1）中的每一个数都能被 u 整除，而 u 能被 p^r 整除，所以

$$ac=p^r A,\quad bc+ad=p^r B,\quad bd=p^r C, \tag{2}$$

其中 A，B，C 是整数．因此

$$(bc)(ad)=(ac)(bd)=p^{2r}AC.$$

后一个等式仅仅在那种情况下才可能成立：如果在数 bc 和 ad 的分解式中，至少有一个数的分解式包含素数 p 的指数不小于 r．

但根据关系式（2）中间那个关系式，这将意味着数 bc 和 ad 中的**每一个**都能被 p^r 整除，即在数 bc 和 ad 的每一个的分解式中，素数 p 的指数都不小于 r．

【证法 2】将恒等式

$$(bc-ad)^2=(bc+ad)^2-4abcd$$

左右两边用 u^2 除，我们得到

$$\left(\frac{bc-ad}{u}\right)^2=\left(\frac{bc+ad}{u}\right)^2-4\frac{ac}{u}\cdot\frac{bd}{u}. \tag{1}$$

由本题条件推出，在变换后的恒等式（1）的右端是整数．左边的**有理数**的平方仅在数

$$\frac{bc-ad}{u}$$

的本身是整数的情况下才能为整数（见40题的证明和§31）．

此外，由关系式（1），整数

$$s=\frac{bc+ad}{u},\quad t=\frac{bc-ad}{u}$$

的平方差等于偶数．因此，数 s 和 t 或者同为偶数，或者同为奇数．这就意味着

$$\frac{bc}{u}=\frac{s+t}{2} \text{ 和 } \frac{ad}{u}=\frac{s-t}{2}$$

是整数．这样一来，数 bc 和 ad 都能被 u 整除，这就是所要证明的．

51．在三角形 ABC 中，$\angle C$ 等于120°，夹这个角的两边 CB 和 CA 的长度等于 a 和 b．求 $\angle C$ 的平分线长（用边 a 和 b 的长来表示）．

【解法1】假设在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 用 γ 来表示，β_c 是 $\angle C$ 的平分线 CD 的长（图47）．$\triangle ABC$ 的面积等于组成它的 $\triangle ACD$ 和 $\triangle DCB$ 的面积的和，因此

$$ab\sin\gamma = a\beta_c \sin\frac{\gamma}{2} + b\beta_c \sin\frac{\gamma}{2},$$

即

$$2ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \beta_c\,(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}.$$

因为$\gamma\neq 0$，所以

$$\frac{1}{\beta_c}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

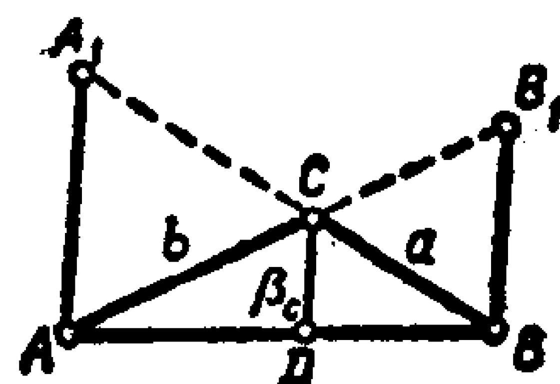


图 47

当$\gamma = 120°$时，我们得到

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

和

$$\frac{1}{\beta_c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

即

$$\beta_c = \frac{ab}{a+b}.$$

【解法2】假设D是任意的$\triangle ABC$的边AB上的一点（图47）．通过顶点A作平行于线段CD的直线和边BC的延长线相交于点A_1，通过顶点B作平行于线段CD的直线和边AC的延长线相交于点B_1．这时（见36题）

$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1}. \qquad (1)$$

如果顶点C的顶角γ等于$120°$，CD是这个角的平分线（图47），那么

$$\angle B_1BC = \angle BCD = 60°,$$
$$\angle BB_1C = \angle DCA = 60°.$$

因此，$\triangle BCB_1$是等边三角形，且$BB_1 = BC$．类似地可以证明$AA_1 = AC$．所得到的等式可将关系式（1）化为下面的形式

$$\frac{1}{CD} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC}, \qquad (2)$$

或

$$\frac{1}{\beta_c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}. \ \bigstar$$

§34. 关于诺模图

1） **计算透镜焦距的诺模图**. 关系式

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\beta_c}$$

与透镜公式具有相同的形式．透镜到物体的距离r_1，透镜到所成的像的距离r_2和透镜的焦距f之间的依赖关系式为

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{f}.$$

在51题中所求得的关系式和透镜公式之间的类似，可以使我们用直观而且非常简单的方法来描述r_1，r_2和f之间的依赖关系.

在120°的角的两边和它的角平分线上画好刻度（即进行划分），使得能取r_1，r_2和f的不同的值（图48）．有了这样的图，就可以根据任意两个量的值毫无困难地求得第三个量的值，例如知道了r_1和f，要求r_2．事实上，为此只要在r_1和f的刻度线上取读数对应于物距和焦距的线段，通过两线段的端点引一直线，读出直线和r_2刻度线的交点的r_2值．例如，从图48看到，如果$f=2$，$r_1=3$，那么$r_2=6$.

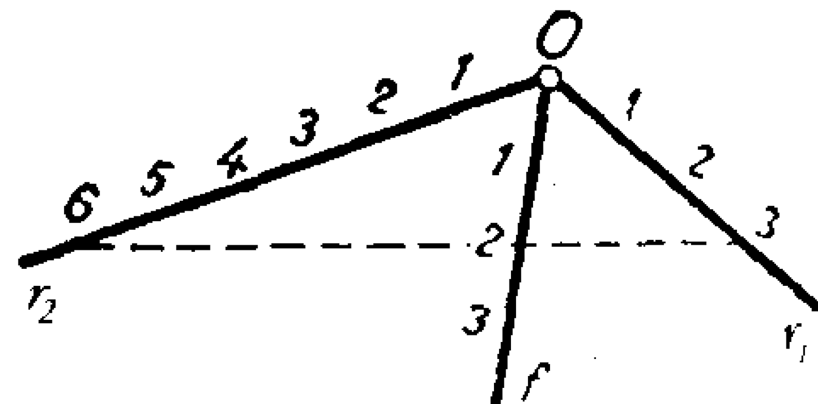


图 48

为了提高读数的精确度，直尺可以用画在任何一张透明材料上的直线来代替.

这种描述不同的依赖关系并且由一些量的数值可以容易地求得其它量的数值的图叫做**诺模图**（来源于希腊词νόμοσ——规律和γραμμχ——所有画上的或写上的）．数学的一个专门分支——**诺模术**——从事诺模图的研究.

在描述三个量的依赖关系的诺模图中，特别方便的是使所有三个量彼此对应的值总是在一直线上的那样一种诺模图．图48所表示的正是这种诺模图.

2）**关于计算二次方程的根的诺模图**．图49所画的诺模图能够对给定的系数p和q的值

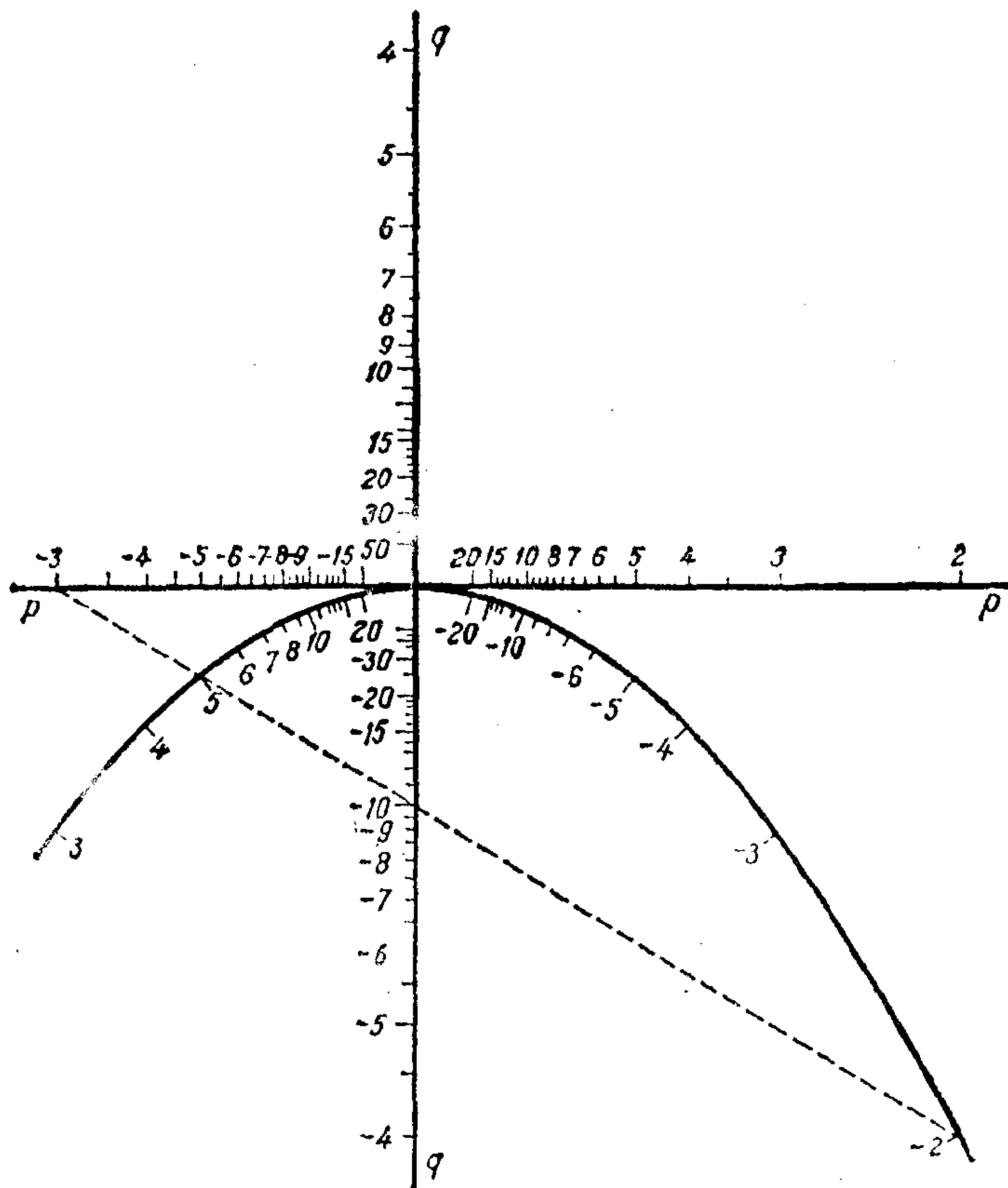


图 49

计算二次方程

$$z^2+pz+q=0 \tag{1}$$

的实根.

为了了解怎样作诺模图，我们从下面的说明开始.

从解析几何知道，在坐标轴上截距为 a 和 b 的直线的方程具有形式

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{2}$$

换句话说，点 $(a, 0)$ ，$(0, b)$ 以及其坐标满足方程（2）的点 (x, y) **在一直线上**.

方程（1）经过不太复杂的变换以后可以写成

$$-p\frac{1}{z}-q\frac{1}{z^2}=1$$

或者表示成更一般的形式

$$-\frac{p}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{z}-\frac{q}{\beta}\cdot\frac{\beta}{z^2}=1,$$

其中 α 和 β 是任意选取的**常数**.

写成这种形式的方程（1）和方程（2）的区别仅仅是 a, b, x 和 y 分别用 $\frac{\alpha}{p}$, $\frac{\beta}{q}$, $-\frac{\alpha}{z}$ 和 $-\frac{\beta}{z^2}$ 来代替. 换句话说，诺模图的方程是这样构作的，使点

$$\left(\frac{\alpha}{p}, 0\right), \left(0, \frac{\beta}{q}\right), \left(-\frac{\alpha}{z}, -\frac{\beta}{z^2}\right)$$

在一直线上.

这样，为了计算方程（1）的实根，可以作有三种刻度的诺模图，这些刻度使在它们上面的相应变量的值总是在一直线上. 可以用下面的方法来作这些刻度.

这样来画 p 的刻度，使 p 的值标在横坐标轴上坐标为 $\left(\frac{\alpha}{p}, 0\right)$ 的点.

这样来画 q 的刻度，使 q 的值标在纵坐标轴上坐标为 $\left(0, \frac{\beta}{q}\right)$ 的点.

这样来画 z 的刻度，使 z 的值标在平面上坐标为 $\left(-\frac{\alpha}{z}, -\frac{\beta}{z^2}\right)$ 的点. 使 z 取各种不同的值，我们得到某一条曲线.

由关系式

$$x=-\frac{\alpha}{z}, \quad y=-\frac{\beta}{z^2}$$

消去变量 z ，我们可以得到它的方程. 它具有形式

$$y=-\frac{\beta}{\alpha^2}x^2 \quad （抛物线方程）.$$

所有三种刻度表示在图49中（$\alpha=12$，$\beta=24$，取1cm作为长度单位）.

假设要求方程

$$z^2-3z-10=0$$

的根．借助于诺模图，可以这样做，在 p 和 q 刻度线上找出标着 $p=-3$，$q=-10$ 的点，连接这两点成直线，看看所作的直线和 z 刻度线的交点的值是多少，它们就是我们所感兴趣的方程的根（在我们所研究的情形，$z_1=5$，$z_2=-2$）．

如果二次方程的系数的值（精确的或近似的）为

$$p=-6.4, \quad q=4.9,$$

那么利用诺模图，我们得到一个根的近似值 $z_1=5.5$．因为这个方程的根之和等于 6.4，所以另一个根的近似值是 $z_2=0.9$．在图49所表示的诺模图中，它所在的那一部分没有画进去，因此由诺模图直接求出 z_2 是不可能的．

所作的诺模图可以做数的乘法．例如，用下面的办法可以求出数 $z_1=-2$ 和 $z_2=5$ 的乘积．连接 z 刻度线上标明 $z_1=-2$ 和 $z_2=5$ 的两点成直线，并确定这直线和 q 刻度线的交点所对应的 q 的刻度值是多少，这个数值就是乘积 z_1z_2．（在所研究的例子中，$q=z_1z_2=-10$.）

使诺模术成为独立学科的创始人是法国的数学家多卡尼（1862—1938）．

52．证明：如果 a，b，c 和 A，B，C 是满足关系式

$$aC-2bB+cA=0 \quad \text{和} \quad ac-b^2>0$$

的实数，那么

$$AC-B^2\leqslant 0.$$

【证明】 显然我们只要证明等式

$$aC+cA=2bB \tag{1}$$

和不等式

$$ac>b^2, \quad AC>B^2 \tag{2}$$

不能同时成立即可．

事实上，从不等式（2）推出

$$acAC>b^2B^2.$$

关系式（1）可将所得到的不等式变成下面的形式

$$4acAC>(aC+cA)^2,$$

或同样的

$$0>(aC-cA)^2,$$

但这个不等式是不能成立的．因为实数的平方总是非负的．

53．在正八边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 的外接圆上任取一点 Q．证明：点 Q 到八边形的对角线 P_1P_5，P_2P_6，P_3P_7，P_4P_8 的距离的四次方之和与点 Q 在圆周上的位置无关．

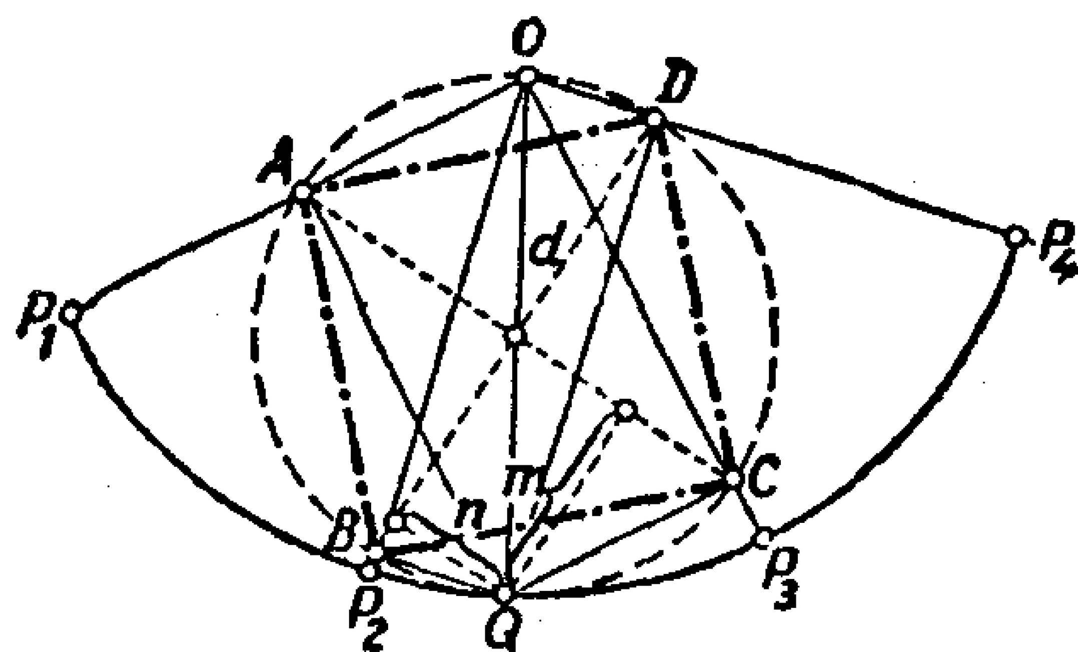


图 50

【证法1】 假设点 Q 在正八边形的外接圆的弧 P_2P_3 上（图50）．假设 O 是八边形的中心，而点 A，B，C，D 是从点 Q 作对角线 P_1P_5，P_2P_6，P_3P_7，P_4P_8 的垂线的垂足．四边形 $ABCD$ 是一个正方形，因为它们的顶点在以 OQ 为直径的圆上，而且它的边 AB，

BC，CD 对点 O 的张角为 $45°$．正方形的大小与点 Q 在圆上的位置无关，因为它的外接圆的直径 d 等于正八边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 的外接圆的半径．

于是，为了证明原来的断言只需要证明下面的断言就够了：**正方形外接圆上的点 Q 到正方形顶点的距离的四次方之和与点 Q 在圆上的位置无关．**

事实上，假设 S 是点 Q 到正方形顶点 A，B，C，D 的距离的四次方之和，那么

$$S=QA^4+QB^4+QC^4+QD^4=$$
$$=(QA^2+QC^2)^2+(QB^2+QD^2)^2-2[(QA\cdot QC)^2+(QB\cdot QD)^2].$$

根据勾股定理，$QA^2+QC^2=AC^2$，$QB^2+QD^2=BD^2$，因为 $AC^2=d^2$，$BD^2=d^2$（d 是正方形的外接圆的直径，也是正八边形外接圆的半径），所以前两个括号的和（等于 $2d^4$）不依赖于点 Q 在正方形 $ABCD$ 的外接圆上的位置．包含在方括号中的项等于直角三角形 AQC 和 BQD 的面积二倍的平方和．假设 m 和 n 是这两个三角形的由顶点 Q 所作的高．这两个高的垂足在边 AC 和 BD 上，AC 和 BD 都是正方形 $ABCD$ 的对角线．因此线段 AC 和 BD 的长等于正方形 $ABCD$ 的外接圆的直径 d．于是，包含在方括号中的项可以用下面的方式来表示

$$(AC\cdot m)^2+(BD\cdot n)^2=d^2(m^2+n^2)=d^2\left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

由此看出

$$S=2d^4-2\frac{d^4}{4}=\frac{3}{2}d^4$$

与点 Q 的位置无关．

【证法2】不失一般性，我们假设外接圆的半径等于 1．用 O 表示圆心，φ，α_1，α_2，α_3，α_4 表示半径 OQ，OP_1，OP_2，OP_3，OP_4 和半径 OP_1 之间的角（图51）．这时 $\alpha_1=0$，$\alpha_2=45°$，$\alpha_3=90°$，$\alpha_4=135°$．点 Q 到通过圆心且和半径 OP_1 的夹角为 α 的直线的距离等于

$$d=|\sin(\varphi-\alpha)|.$$

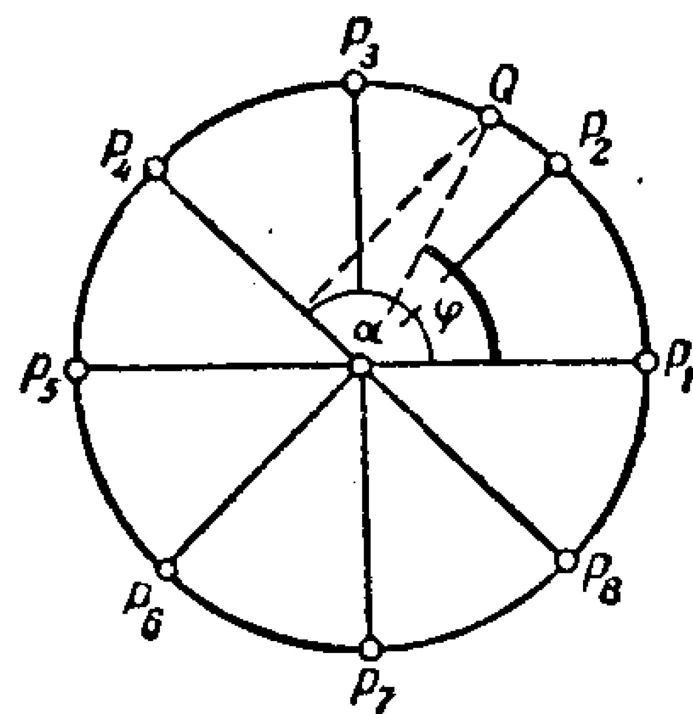


图 51

因此，本题条件中所说的那些距离的四次方之和可以表示成

$$f(\varphi)=\sin^4(\varphi-\alpha_1)+\sin^4(\varphi-\alpha_2)+$$
$$+\sin^4(\varphi-\alpha_3)+\sin^4(\varphi-\alpha_4).$$

正弦的四次方可以通过倍角的三角函数来表示（见 § 9）：

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\sin^4 x=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)=\frac{1}{4}\left[1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right].$$

这样一来

$$\sin^4 x=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$$

在所得到的表达式中，用

$$\varphi-0°,\ \varphi-45°,\ \varphi-90°,\ \varphi-135° \qquad (1)$$

来代替 x，分别用

$$2\varphi,\ 2\varphi-90°,\ 2\varphi-180°,\ 2\varphi-270°,$$
$$4\varphi,\ 4\varphi-180°,\ 4\varphi-360°,\ 4\varphi-540°$$

来代替 $2x$ 和 $4x$.

在 $f(\varphi)$ 中，第一排的角的余弦包含有系数 $-\frac{1}{2}$，第二排的角的余弦包含有系数 $\frac{1}{8}$. 但是，第一排的角的余弦之和与第二排的余弦之和一样，都等于零，因为有关系式 $\cos(x-180°)=-\cos x$，所以，在每一个和中，余弦相互抵消了. 因此，$f(\varphi)=\frac{3}{2}$ 且与 φ 无关，即与点 Q 在圆上的位置无关，这就是所要证明的.

§35. 三角多项式的一个性质

角 φ 的函数

$$f(\varphi)=a_0+a_1\cos\varphi+b_1\sin\varphi+\cdots+a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi$$

叫做 k **次三角多项式**. 53题所证明的关于四次三角多项式的断言是下面的定理的特殊情况：

如果 $f(\varphi)$ 是 k 次三角多项式，a_0 是 $f(\varphi)$ 的常数项，$\theta=\frac{2\pi}{n}$，$n>k$，那么

$$f(\varphi+\theta)+f(\varphi+2\theta)+\cdots+f(\varphi+n\theta)=na_0.$$

如果 $f(\varphi)=a_0$，定理必定成立. 此外，如果定理对于三角多项式 f_1，f_2 成立，C_1 和 C_2 是任意的常数，那么它对三角多项式 $C_1f_1+C_2f_2$ 也成立. 由此推出，对于我们所研究的定理只要对 $f(\varphi)$ 是三角函数 $\cos\varphi$，$\sin\varphi$，…，$\cos k\varphi$，$\sin k\varphi$ 中的任何一个进行验证就可以了. 这样一来，剩下的我们只要证明：如果 $\theta=\frac{2\pi}{n}$，$0<l<n$，那么

$$\cos l(\varphi+\theta)+\cos l(\varphi+2\theta)+\cdots+\cos l(\varphi+n\theta)=0,$$
$$\sin l(\varphi+\theta)+\sin l(\varphi+2\theta)+\cdots+\sin l(\varphi+n\theta)=0.$$

我们来证明，如果 l 是任意的整数，但不是数 n 的倍数，这些等式是成立的. 为了简单起见，记作 $l\varphi=\alpha$，$l\theta=\beta$，上面所说的断言可叙述如下：

如果 α 是任意的角，β 是不为 2π 整数倍的角，但 $n\beta$ 是 2π 的倍数，那么

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cdots+\cos(\alpha+n\beta)=0, \quad (1)$$
$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\cdots+\sin(\alpha+n\beta)=0. \quad (2)$$

为了证明，我们在平面上引进直角坐标系，并且从某点 P_0 出发沿着倾斜角为 $\alpha+\beta$ 的直线取一个单位长的线段 P_0P_1（图52），由线段 P_0P_1 的端点出发沿着倾斜角为 $\alpha+2\beta$ 的直线取单位长的线段 P_1P_2，然后沿着倾斜角为 $\alpha+3\beta$ 的直线取单位长的线段 P_2P_3，等等，一直到沿倾斜角为 $\alpha+n\beta$ 的直线上取单位长的线段 $P_{n-1}P_n$. 根据作法，点 P_{k-1} 和 P_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 的横坐标的差等于 $\cos(\alpha+k\beta)$，而纵坐标的差等于 $\sin(\alpha+k\beta)$. 这样一来，点 P_0 和 P_n 的横坐标的差和关系式（1）的左边的表达式相重合，而这两个点的纵坐标的差和关系式（2）的左边的表达式相重合. 必须证明点 P_0 和 P_n 重合.

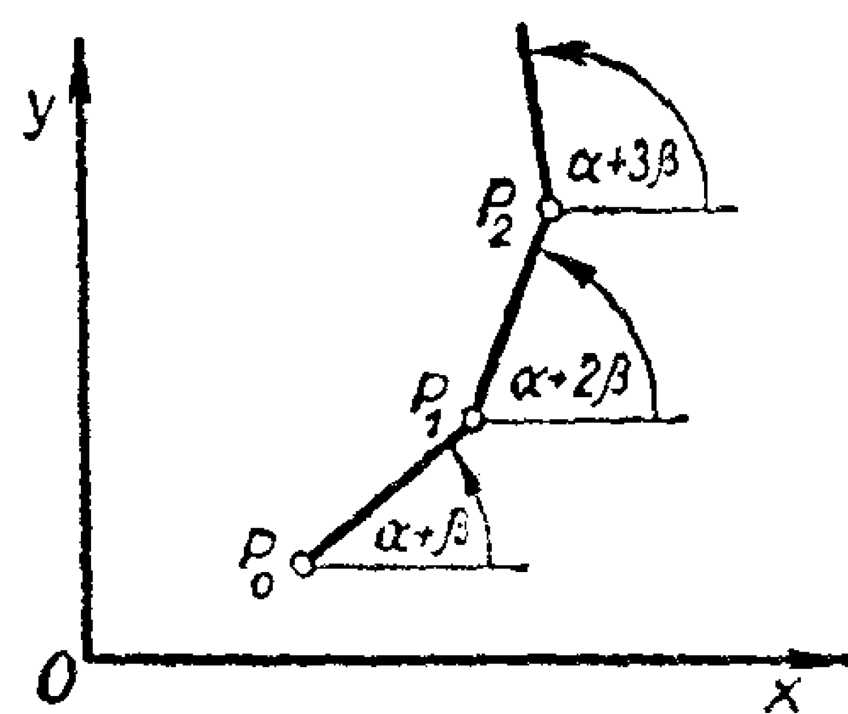


图 52

我们来研究任意的线段 AB. 如果它绕着点 A 沿着正方向旋转角 β，那么它和线段 AC 重合（图53）. 因为角 β 不是 2π 的整数倍，所以点 B 不会和点 C 重合. 因此，在把角 BAC 的边拉伸（或压缩）的同时，我们将它沿平面这样移动，使点 B 和点 P_0 重合，点 C 和点 P_1

重合（图53）. 这时点A变到这样一个点O，当绕着点O旋转角β时，点P_0和点P_1重合，而线段P_0P_1变到线段P_1P_2.

每绕着点O旋转角β一次，单位线段的倾斜角就增加β. 绕着点O旋转了角β，2β，…，$n\beta$以后，点P_0变到了点P_1，P_2，…，P_n. 但是因为角$n\beta$等于2π的整数倍，所以点P_n和P_0重合，这就是所要证明的.

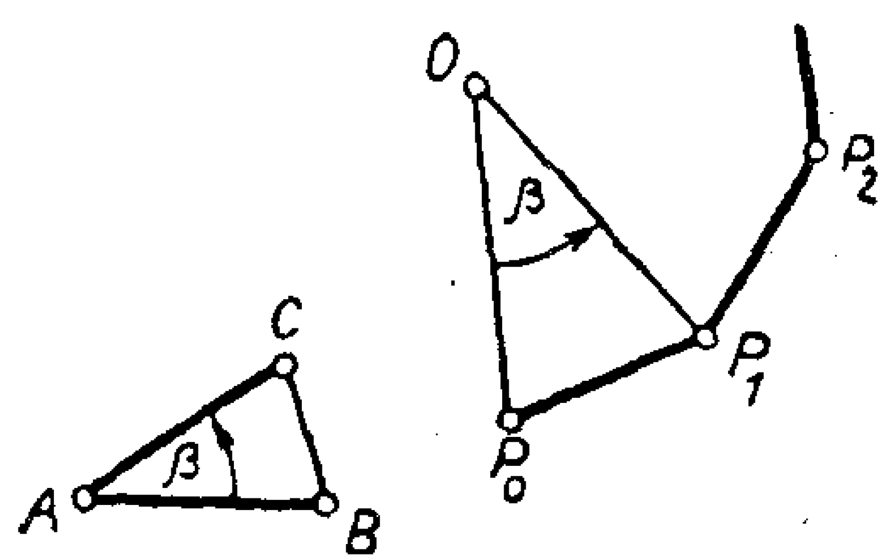


图 53

§ 36. 关于正多边形和它的重心 ❶

在§35中所证明的等式（1）和（2）有下面的几何解释. 就像在§16中那样，我们将利用复数. 数

$$z_k=\cos(\alpha+k\beta)+i\sin(\alpha+k\beta)$$

分布在圆心为O的单位圆周上$[\cos^2(\alpha+k\beta)+\sin^2(\alpha+k\beta)=1]$，且从点$z_k$到$z_{k+1}$的弦所对的弧的长度都为$\beta$. 因为$z_1$，…，$z_n$是正$n$边形——一般来说是星形的（见§14）——的顶点. 容易证实，通过点O和z_k的直线是这个n边形的对称轴. 如果我们关于这个轴作一镜像反射，那么n边形变到自身，因此它的重心仍然不变（关于重心见§56）. 因此，重心在每一根对称轴上，因而和点O重合. 因为重心由公式

$$z_c=\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}$$

确定（这就是§56中的公式（1），只是另一种表示方法），我们有

$$z_1+z_2+\cdots+z_n=0,$$

将z_k的值代入并且将实部和虚部分开，就得到§35中的（1）和（2）.

54. 证明：如果p是大于1的整数，那么3^p+1不可能被2^p整除.

【证明】我们证明较强的断言：数3^n+1，当n是偶数时，能被2整除，当n是奇数时，能被2^2整除. 但在两种情形中，都不能被数2的任何更高次幂整除.

为了证明这一点，只要证明下面的就行了：**任何奇数的平方被8除时余1**. 事实上，假设$a=2k+1$. 这时$a^2=4k(k+1)+1$. 这个等式的右边的第一项能被8整除，因为两个连续的自然数k和$k+1$中总有一个是偶数.

我们利用这个引理来解答本题. 如果n是偶数（$n=2m$），那么

$$3^n=3^{2m}=(3^m)^2=8a+1,$$

因此

$$3^n+1=2(4a+1).$$

如果n是奇数（$n=2m+1$），那么

$$3^n+1=3^{2m+1}+1=3(8a+1)+1=4(6a+1).$$

因为$4a+1$和$6a+1$是奇数，所以本题的（较强的）断言被证明了.

❶ 俄译编辑补加

十、1912年—1913年试题及解答

55． 由数字1，2，3组成n位数，且在n位数中，1，2，3的每一个至少出现一次.问这样的n位数有多少个?

【解】如果在所构成的数中，不要求数字1，2，3中的每一个至少出现一次，那么本题的答案等于3个元素重复n次的排列个数，即3^n(见§4).

但是本题的条件要求我们从所有只包含三个数字1，2，3的n位数的集合中除去下面的：

1） 仅由三个数字1，2，3中的两个数字组成的数.这样的数有$3(2^n-2)$个（见题4的解答）；

2） 仅由三个数字1，2，3中的一个数字组成的数．这样的数有3个.

因此，总共有
$$3^n-3(2^n-2)-3=3^n-3\times2^n+3$$
个满足本题条件的n位数★.

§37．包含和排除的公式

1） **关于将物体按某些特征分成类**．如果我们从研究下面比较一般的具有基本意义的问题入手，那么解答55题的基本思想就变得更清楚了.

我们假设有N个物体．用a,b,c表示这些物体中的某些物体所具有的特征．设N_a表示至少具有特征a(与它们是否具有特征b和c无关）的物体的个数.其次用N_{ab}表示至少具有特征a和b的物体的个数，用N_{abc}表示同时具有特征a,b,c的物体的个数.记号N_b，N_c，N_{ac}，N_{bc}具有类似的意思.我们打算回答的问题如下：**如果知道了数N，N_a，N_b，N_c，N_{ab}，N_{ac}，N_{bc}，N_{abc}．那么在给定的N个物体中，不具有特征a,b,c中任何一个特征的物体有多少个?**

这个问题可以作直观的几何解释（图54).假设所说的物体是平面上的点．特征a表示“点在曲线A内”(a的点也可在曲线A的本身上).类似地，特征b表示点在曲线B内，特征c表示点在曲线C内.我们感兴趣的问题用几何的语言可叙述如下：**如果知道有多少个点在曲线A、曲线B、曲线C内，有多少个点同时在曲线A和B，A和C，B和C内，有多少个点同时在所有的三个曲线内，那么在给定的N个点中有多少个点在曲线A，B，C外?**

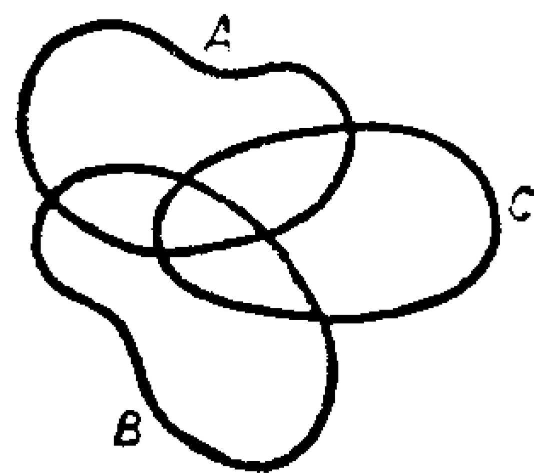


图 54

为了回答这个问题，把它分成若干部分是方便的：

1．在给定的N个物体中，有多少个物体不具有特征a?

答案是显然的：
$$N-N_a \qquad (1)$$
(在图54中，这些物体对应于曲线A以外的点).

2．在具有特征b的N_b个物体中，有多少个物体不具有特征a?

这个问题和前一个问题不同的仅仅是 N 要用 N_b 来代替，而数 N_a 对应于N_{ab}. 因此，N_b 个物体中不具有特征 a 的物体的个数为

$$N_b - N_{ab}. \tag{2}$$

（具有特征 b 但不具有特征 a 的物体所对应的点在平面（图54）的哪一部分？）

3. 在 N 个给定的物体中，有多少个物体既不具有特征 a，也不具有特征 b?

在除去具有特征 a 的物体以后，剩下 $N-N_a$ 个物体. 还必须从这些物体中除去具有特征 b 但不具有特征 a 的物体（在回答问题 2 时，我们求得了这种物体的个数）. 剩下

$$N-N_a-(N_b-N_{ab})=N-N_a-N_b+N_{ab} \tag{3}$$

个物体.（在图54中，对应的点分布在哪里？）

4. 在具有特征 c 的 N_c 个物体中，有多少个物体既不具有特征 a，也不具有特征 b?

从关系式(3)（用 N_c 代替 N）我们得到

$$N_c-N_{ac}-N_{bc}+N_{abc}\ . \tag{4}$$

（在图54中，对应的点分布在哪里？）

5. 这样一来，在 N 个物体中，有

$$N-N_a-N_b+N_{ab}-(N_c-N_{ac}-N_{bc}+N_{abc})$$

个，即

$$N-N_a-N_b-N_c+N_{ab}+N_{ac}+N_{bc}-N_{abc} \tag{5}$$

个物体不具有特征 a,b,c 中任何一个特征.

2） **将所得到的结果用于解答55题.** 我们取 n 位数作为给定的"物体"，在这些 n 位数的记法中只有数字1，2，3. 设特征 a 表示在数字中没有 1，特征 b 表示没有 2，特征 c 表示没有 3. 这时

$$N=3^n,\quad N_a=N_b=N_c=2^n,$$
$$N_{ab}=N_{bc}=N_{ac}=1,\quad N_{abc}=0.$$

利用关系式(5)，我们求得问题的答案：

$$3^n-3\times2^n+3.$$

3） **推广.** 公式(5)不难推广到有任意个特征的情况.

从推广的公式直接推出下面的断言：

有一个 n 位数的集合，在这些 n 位数的记数法中只有数字 1，2，…，k，而且每个数字至少出现一次，那么这个集合含有

$$k^n-C_k^1(k-1)^n+C_k^2(k-2)^n-\cdots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}$$

个元素.

当 $k>9$ 时，如果数不是在十进制系统中记的，而是在基数大于 k 的系统中记的，上述断言仍然成立.

当 $n=k$ 时，得到有趣的恒等式. 在这种情形中，每一个数字 1，2，…，$k(=n)$ 在数中出现一次且仅仅一次，而所有的 n 位数仅仅是数字 1，2，…，n 的排列次序不同. 这样一来，当 $n=k$ 时，所有的数字都不同的 n 位数的集合含有 $n!$ 个元素. 因此

$$n^n-C_n^1(n-1)^n+C_n^2(n-2)^n-\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}=n!.$$

56. 证明：对任意的自然数 n，数

$$A_n = 5^n + 2\times 3^{n-1} + 1$$

能被 8 整除.

【证法 1】当 $n=1$ 时，本题断言是正确的，因为

$$A_1 = 5+2+1=8.$$

因此，剩下的要证明：如果A_n能被 8 整除，那么 A_{n+1} 也能被 8 整除(即利用数学归纳法). 因为

$$A_n = 5^n + 2\times 3^{n-1} + 1,$$

$$A_{n+1} = 5^{n+1} + 2\times 3^n + 1 = 5\times 5^n + 6\times 3^{n-1} + 1.$$

所以

$$A_{n+1} - A_n = 4(5^n + 3^n).$$

数 5^n+3^n等于两个奇数之和，所以它自己为偶数. 因此乘积 $4(5^n+3^n)$ 能被 8 整除. 因为根据归纳假设，A_n能被 8 整除，所以 A_{n+1}也能被 8 整除，这就是所要证明的.

【证法 2】数A_n可以表示成下面两种形式：

$$A_n = (5^n+3^n) - (3^{n-1}-1), \quad (1)$$

$$A_n = 5(5^{n-1}+3^{n-1}) - (3^n-1). \quad (2)$$

当 n 是奇数时，利用关系式(1)，当 n 是偶数时，利用关系式(2). 在两个关系式中，两项中的第一项是数 $5+3=8$ 的倍数，第二项是数 $3^2-1=8$ 的倍数，因为当 k 是奇数时，和数 a^k+b^k能被 $a+b$ 整除，当 k 是偶数时，差数 $c^k-1=c^{2k'}-1$ 能被 c^2-1 整除. 因此，对任何 n，A_n都能被 8 整除.

57. 证明：四边形的对角线当而且仅当它的两对边的平方和等于四边形的其它两对边的平方和时才相互垂直.

【证法 1】本题断言：四边形 $ABCD$的对角线 BD 和它另一条对角线 AC 垂直，当且仅当

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + CB^2,$$

即

$$AB^2 - CB^2 = AD^2 - CD^2.$$

假设 A, B, C 是平面上三个固定的点. 我们研究满足上面所写出的关系式的点 D 的轨迹. 显然，点 B 本身属于这个轨迹. 这样一来，原来的问题（在改变表达方式的情况下）化成证明下面的引理.

假设在平面上给定两个点 A 和 B. 动点 P 满足条件：量PA^2-PB^2是一个常数. 则点 P 的轨迹是垂直于线段 AB 的直线.

由点 P 作 $PT\perp AB$，垂足为T. 我们来证明，差 PA^2-PB^2仅仅与点 T 的位置有关，而且当点 T 向线段 AB 的任一端点移动时，这个差 PA^2-PB^2的值也改变❶. 事实上，根据勾股定理（图55），

$$PA^2 - PB^2 = (TA^2 + PT^2) - (TB^2 + PT^2) = TA^2 - TB^2.$$

---

❶ 引理的断言意味着：

1） 对于过点 T 所引的 AB 的垂线上的所有点 P，量 $c=PA^2-PB^2$ 均相等；

2） 对于所有不在这个垂线上的点 Q，$QA^2-QB^2\neq c$.

第二点可如下证明：$PA^2-PB^2=TA^2-TB^2=2AB\cdot FT$ 随着 T 的改变而改变. ——俄译者注.

当点 T 在线段 AB 上两个不同的位置时，差 TA^2-TB^2 的值不可能相同. 事实上，设线段 AB 的中点是 F，那么对于和点 F 等距的点 T 来说，差 TA^2-TB^2 的绝对值相等，但是对于在点 F 的不同的两侧的点 T 来说，这个差具有不同的符号，并且在点 F，这个差变为0. 例如，若点 T 在线段 AB 的靠近点 B 的那一半上（图55），

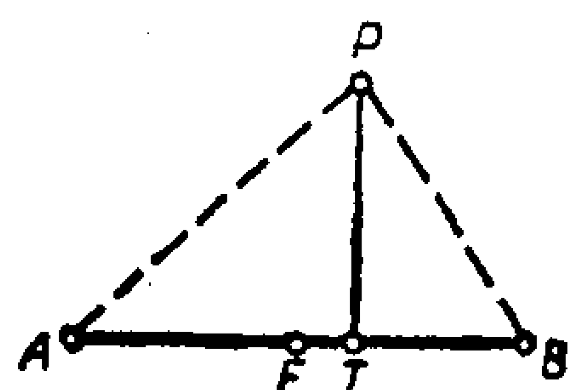


图 55

$$TA^2-TB^2=(AF+FT)^2-(AF-FT)^2=4AF\cdot FT,$$

因为 $BF=AF$. 如果考虑到线段 $AF=\frac{1}{2}AB$ 的长度不依赖于点 T 的位置，那么引理就被证明了.

本题原来的断言不难由引理推出. 四边形的边满足关系式 $a^2+c^2=b^2+d^2$ 当且仅当（图56）

$$a^2-b^2=d^2-c^2.$$

根据所证明的引理，这意味着顶点 B 和 D 应该位于和线段 AC 垂直的同一直线上. 换句话说，四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 和 AC 应该相互垂直.

由此推出，如果铰链四边形的对角线之间的夹角在某一个位置是直角，那么它在所有其余的位置也都是直角.

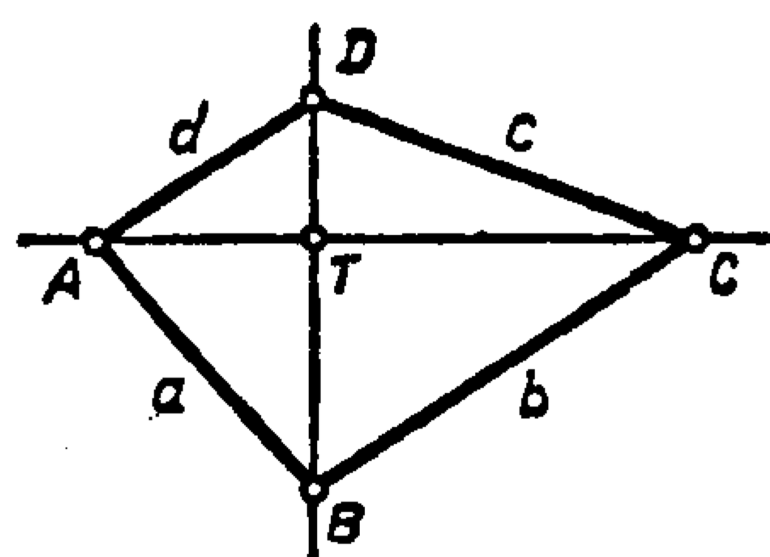


图 56

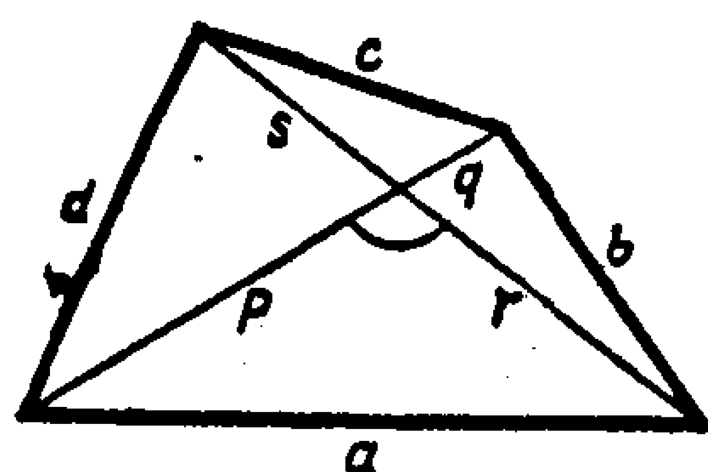


图 57

【**证法 2**】1) 首先仅对凸四边形来证明本题的断言. 为此利用下面的三角形的边长之间的关系: **在任何一个三角形中，锐角所对的边的平方小于其它两边的平方和，钝角所对的边的平方大于其它两边的平方和.**（这个不等式可由余弦定理推出，但也可以用纯几何的方法来证明它们，而不用三角学. 在§38中就正是这样做的.）

假设 a,b,c,d 是四边形的边，而 p,q,r,s 是对角线被其交点所分成的线段的长度(图57). 如果对角线不相互垂直，那么我们选取这样一种表示法，使线段 p 和 r 之间的夹角为钝角. 这时，由于三角形的边的平方之间的不等式

$$a^2>p^2+r^2, \qquad b^2<r^2+q^2,$$
$$c^2>q^2+s^2, \qquad d^2<s^2+p^2.$$

因此

$$a^2+c^2>p^2+q^2+r^2+s^2>b^2+d^2.$$

如果四边形的对角线相互垂直，那么由勾股定理，所有的不等式都变成等式，这样一来，四边形的对角线相互垂直当而且仅当它的边长满足关系式

$$a^2+c^2=b^2+d^2.$$

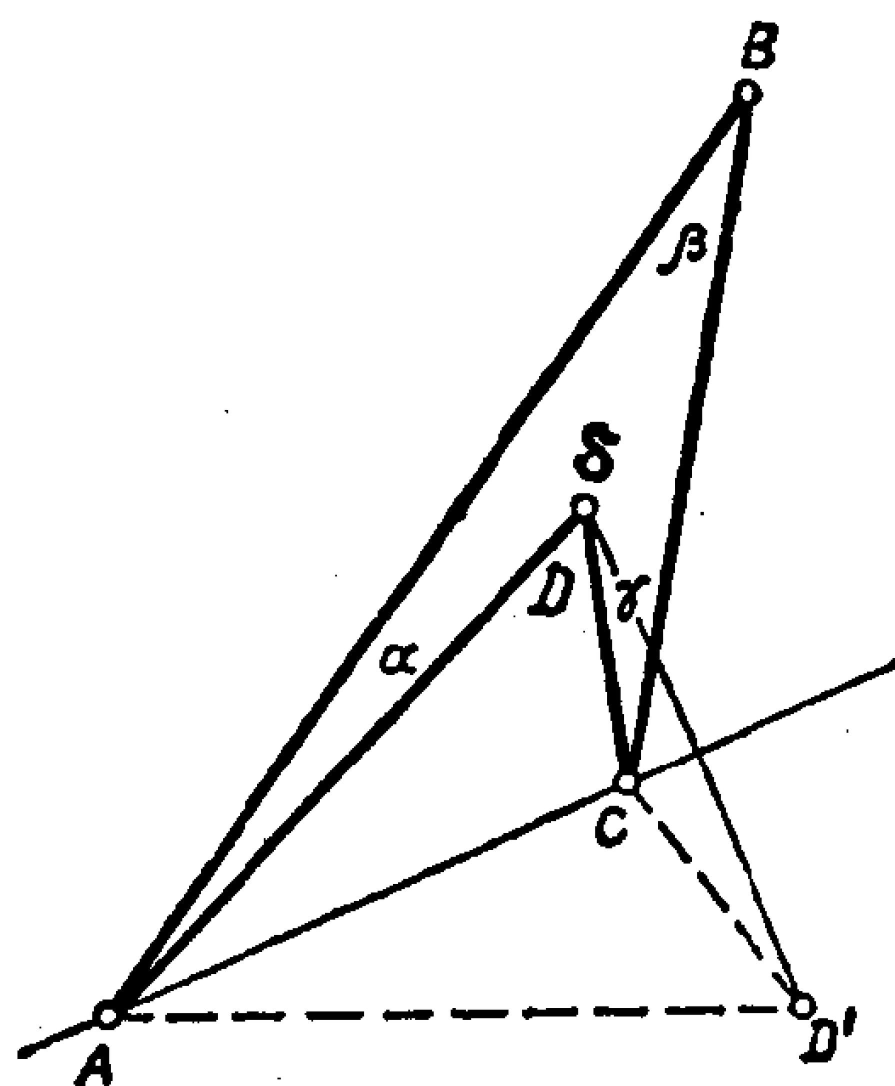


图 58

2) 现在假定 $ABCD$ 是给定的**非凸的**四边形. 用 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 来表示它的顶角，并假定 $\delta>180°$（图58）.

假设 D' 是顶点 D 关于对角线 AC 的对称点．四边形 $ABCD'$ 的边等于原来的四边形 $ABCD$ 的边．当且仅当顶点 B 在直线 DD' 上时，对角线 BD' 和对角线 AC 垂直，因为由于对称性，$DD'\perp AC$．因此，当且仅当原来的四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 垂直于 AC 时四边形 $ABCD'$ 的对角线 BD' 垂直于对角线 AC．这样一来，关于对角线作反射时，四边形的边长仍然不变，而且还保持它的对角线的垂直性（或不垂直性）．

考虑到这一点，只要证明经过有限次关于对角线的反射，每一个非凸的四边形可以变成凸四边形就行了．对于凸四边形，所要证明的断言已经证明了（见1））．由此便可得出结论，对于原来的四边形 $ABCD$，断言也是成立的．

我们研究四边形 $ABCD'$ 的凸角（即小于180°的角）．线段 AC 和边 AB 以及 CB 之间的夹角至少有一个应该是锐角．例如，我们假设 $\angle BAC$ 是锐角．这时

$$\angle BAD'=2\angle BAC$$

是凸角．因为根据问题的条件，$\delta>180°$，对于原来的四边形的顶点 D，外部所构成的 $\angle ADC$ 等于 $\angle AD'C$，它是凸的．它与角 δ 之和为360°，角 δ 与四边形 $ABCD$ 的其它三个内角之和也为360°，所以它与这个和相等．因此，新的四边形 $ABCD'$ 的凸角满足下面的关系式

$$D'AB>\alpha,\quad \angle ABC=\beta,\quad \angle CD'A=\alpha+\beta+\gamma>\gamma,$$

且

$$\angle D'AB+\angle ABC+\angle CD'A>\alpha+\beta+(\alpha+\beta+\gamma).$$

这样一来，在对于对角线作反射时，凸角之和所增加的量比原来四边形两个最小的角之和还大，而且无论哪一个凸角都不减小．因此，等于四边形凸角之和的角在经过有限次关于对角线的反射之后不再是凸的了．这意味着，原来的（非凸的）四边形 $ABCD$ 变成了凸的（还可见 § 51）★.

§ 38．关于三角形的边和角的一个关系

在57题中说到的四边形的对角线相互垂直的必要充分条件，可以由下面的常用的定理推出：

如果两个三角形有两边对应相等，那么第三边所对的角较大的三角形的第三边也较大．

我们将定理中所说的两个三角形这样来放：两个相等的边重合，而另两个相等的边从公共顶点出发，设 ABC 和 ABC' 是这样的三角形，且 $AC=AC'$（图59）．

我们假设 $\angle BAC>\angle BAC'$．这时边 AC' 通过 $\angle BAC$ 的内部，且 $\angle CAC'$ 的平分线和线段 BC 相交于某点 D．线段 CD 和 $C'D$ 关于 $\angle CAC'$ 的平分线是对称的，因此 $CD=C'D$．这样一来

$$BC=BD+DC=BD+DC'>BC',$$

这就是所要证明的．

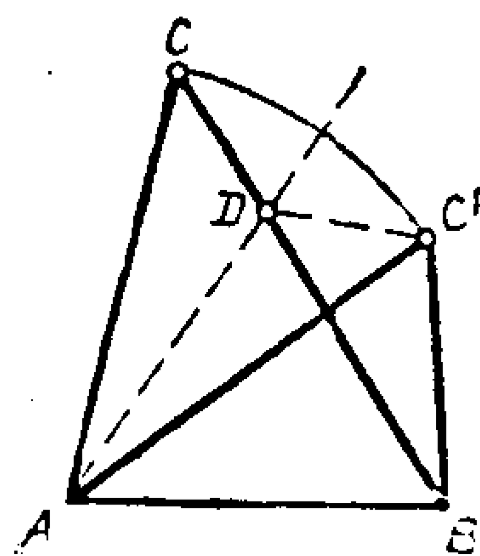


图 59

这就意味着，在边为 a,b,c 的三角形中，边 c 大于或小于以 a,b 为直角边的直角三角形的斜边，取决于 c 所对的角是钝角或是锐角．57题中所说的等式由勾股定理推出．

58．证明：如果 n 是任意大于 2 的自然数，那么

$$(1\times 2\times 3\times\cdots\times n)^2>n^n.$$

【证明】我们研究乘积

$$1\times n,\quad 2\times(n-1),\quad 3\times(n-2),\quad \cdots,\quad (n-1)\times 2,\quad n\times 1.$$

乘积中的任何一个，从第二个开始，到倒数第二个为止，都大于第一个（和最后一个）乘积：如果 $n-k>1$，那么

$$(k+1)(n-k)=k(n-k)+(n-k)>k\times 1+(n-k)=n.$$

由此推出，上面写出的所有乘积的积当 $n>2$ 时大于 n^n. 这就是所要证明的.

59. 假设 O 和 O' 是立方体两个相对的顶点. 将立方体的不包含点 O 和 O' 的六条棱的中点连接起来. 证明：立方体的这些棱的中点在一平面上且是正六边形的顶点.

【证明】假设 O 和 O' 是立方体的对角线相对的端点；A, B, C 是从顶点 O 发出的棱的端点，A', B', C' 是从顶点 O' 发出的棱的端点，因此 $OA /\!/ O'A'$，等等. L, M', N, L', M、N' 是棱 $B'C$, CA', $A'B$, BC', $C'A$, AB' 的中点（图60）.

线段

$$O'M,\ O'N',\ O'L,\ O'M',\ O'N,\ O'L',$$
$$OM,\ ON',\ OL,\ OM',\ ON,\ OL'$$

相等，因为立方体所有的侧面是全等的正方形，而这些线段是在每一个侧面中连接一个顶点和由这个顶点所相对的顶点发出的两个边的中点所得到的.

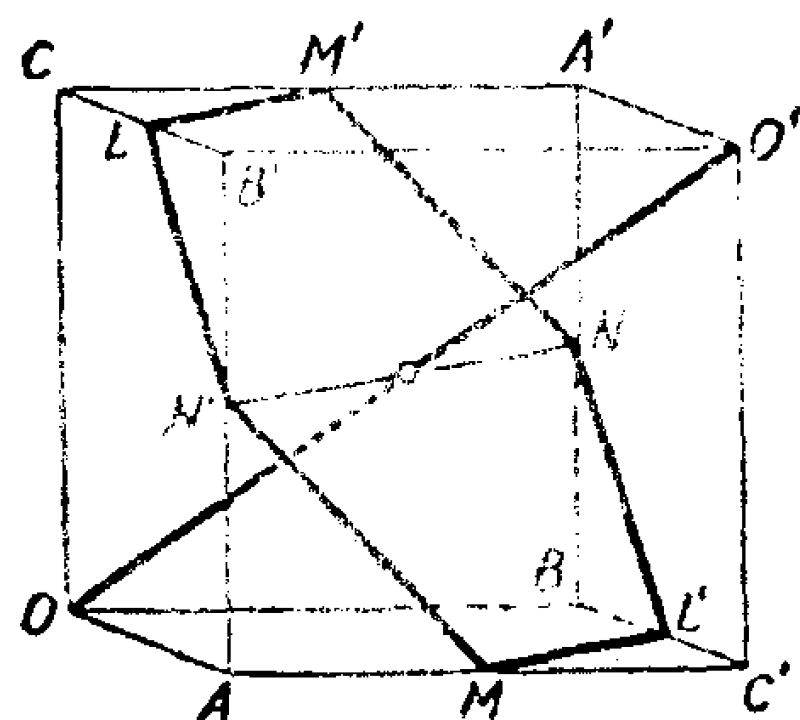


图 60

这样一来，点 M, N', L, M', N, L' 位于以立方体的顶点 O 和 O' 为中心，而半径相同的两个球面上，因此，这些点位于一个和线段 OO' 垂直的平面上，它们构成内接于两个球面所交成的圆内的六边形的顶点.

剩下的还要证明这个六边形的边相等. 这可如下导出，例如，线段 MN' 是 $\triangle B'AC'$ 的中点连线，从而等于侧面 $AC'O'B'$ 的对角线的一半. 类似的断言对于六边形其它的边也是成立的.

60. 假设 d 是正整数 a 和 b 的最大公约数，d' 是正整数 a' 和 b' 的最大公约数. 证明：数

$$aa',\quad ab',\quad ba',\quad bb'$$

的最大公约数等于 dd'.

【证法 1】假设：

$$a=a_1d,\quad b=b_1d,\quad a'=a_1'd',\quad b'=b_1'd'. \tag{1}$$

这时 a_1 和 b_1，同样 a_1' 和 b_1'，都是互素的数（见 § 23）.

由关系式（1）推出

$$aa'=dd'a_1a_1',\quad ab'=dd'a_1b_1',\quad ba'=dd'b_1a_1',\quad bb'=dd'b_1b_1'.$$

因此，dd' 是数 aa', ab', ba', bb' 的公约数. 其最大公约数大于 dd' 仅仅在数

$$a_1a_1',\quad a_1b_1',\quad b_1a_1',\quad b_1b_1' \tag{2}$$

有公共素约数的时候（见 § 22）. 我们假定这个素公约数是存在的，并用 p 来表示. 因为 a_1 和 b_1 是互素的数，所以它们两个之中能被 p 整除的数不会多于一个. 假定 a_1 不能被 p 整除. 因为乘积 a_1a_1' 能被 p 整除，所以它们之中的某一个因子一定能被这个素数整除（见 § 2. 1）中

所证明的定理)．因此，数 a_1' 应该能被 p 整除．对数 a_1b_1' 进行类似的讨论：它能被 p 整除仅仅在 b_1' 能够被 p 整除的情况下才有可能．但是，数 a_1' 和 b_1' 不可能同时被 p 整除，因为它们是互素的．这样一来，(2)中的数的最大公约数不可能大于1．

【证法2】 如果 $(l, m, \cdots)$ 是正整数 $l, m, \cdots$ 的最大公约数，那么(见§39的关系式(1))

$$(aa', ab', ba', bb') = ((aa', ab'), (ba', bb')).$$

但是(见§39的关系式(2))

$$(aa', ab') = a(a', b') = ad', \qquad (ba', bb') = b(a', b') = bd'.$$

因此

$$(aa', ab', ba', bb') = (ad', bd') = (a, b)d',$$

即

$$(aa', ab', ba', bb') = dd',$$

这就是所要证明的．★

§39. 关于最大公约数的两个定理

在解60题时，我们利用了最大公约数的下面两个性质：

$$(l, m, \cdots; l', m', \cdots) = ((l, m, \cdots), (l', m', \cdots)) \tag{1}$$

和

$$(kl, km, \cdots) = k(l, m, \cdots). \tag{2}$$

关系式(1)和(2)的成立是显然的，因为如果将正整数 $l, m, \cdots$ 的最大公约数分解成素数的乘幂，那么在分解式中，每一个素数 p 的幂指数等于在数 $l, m, \cdots$ 的分解式中 p 所具有的幂指数 $\lambda, \mu, \cdots$ 中最小的数．

关系式(1)意味着数

$$\lambda, \mu, \cdots; \quad \lambda', \mu', \cdots$$

中最小的数可以这样来求，先对两组数 $\lambda, \mu, \cdots$ 和 $\lambda', \mu', \cdots$ 分别确定每一组数中最小的数，然后再从得到的这两个数中取较小的数．

关系式(2)意味着，如果从数 $\lambda, \mu, \cdots$ 中选取最小的数，并将它加上 $\varkappa$ 就是数

$$\varkappa+\lambda, \quad \varkappa+\mu, \cdots$$

中最小的数．

十一、1914年—1918年试题及解答

61．点A和B位于圆k上，用另一个圆k'的弧连接A和B，此圆弧将圆k的面积分成两个相等的部分．证明：连接点A和B的圆k'的弧的长度大于圆k的直径．

【证明】圆k的所有直径都和圆k'的弧相交，因为要不然的话，弧AB不能把圆k的面积分成两个相等的部分（图61）．因此，圆k的圆心O在圆k'内（如果点O在圆k'外，那么通过它可以引一条不和弧AB相交的直线，即找到了一条不和弧AB相交的圆k的直径，这是不可能的）．

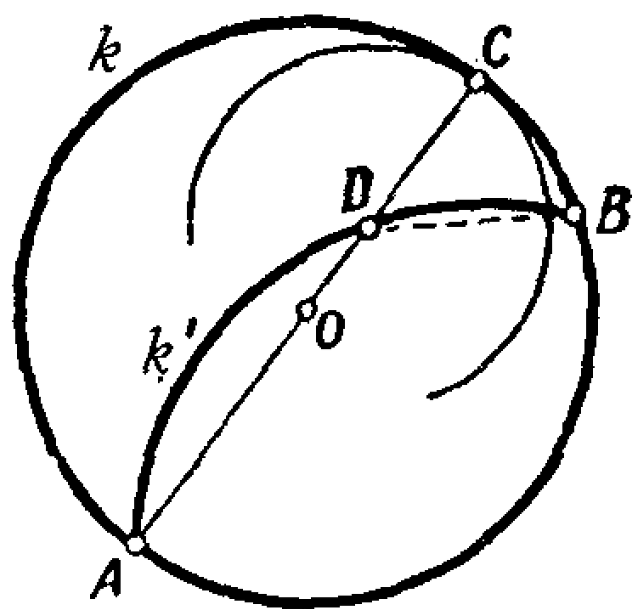


图 61

于是线段AO通过圆k'的内部，因此圆k的直径AC和弧AB相交于某点D，点D属于某一个半径OC．

因为弧AB的长度大于线段AD和DB的长度之和，所以我们只要证明$DB>DC$就行了．但这个不等式可如下推出：以D为圆心，DC为半径的圆在圆k内❶．

62．假设所有满足条件

$$-1\leqslant x\leqslant +1$$

的x满足不等式

$$-1\leqslant ax^2+bx+c\leqslant +1$$

（系数a，b，c是实数）．证明：对所有这些x，

$$-4\leqslant 2ax+b\leqslant +4.$$

【证明】二次三项式

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

的导函数

$$f'(x)=2ax+b$$

是线性函数，它的图形是直线．因此，函数$f'(x)$在闭区间$-1\leqslant x\leqslant 1$上的最大值和最小值在这个区间的端点上达到．这样一来，剩下的只要证明，值

$$f'(1)=2a+b,\qquad f'(-1)=-2a+b$$

中的任何一个都不可能大于4和小于-4．

根据本题的条件，当$-1\leqslant x\leqslant 1$时，$-1\leqslant ax^2+bx+c\leqslant 1$．在不等式中，令$x$等于1，$-1$，0，我们得到

$$-1\leqslant a\pm b+c\leqslant 1 \qquad (1)$$

和$-1\leqslant c\leqslant 1$，由此还可得到

$$-1\leqslant -c\leqslant 1. \qquad (2)$$

将不等式（1）和（2）两边分别相加，得到

❶ 还可指出：圆k'的弧AD和DB大于它们所对应的弦AD和DB，因此
$\overset{\frown}{ADB}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DB}>AD+DB=AO+OD+DB>AO+OB=AC$．——俄译者注．

$$-2\leqslant a\pm b\leqslant 2. \qquad (3)$$

将不等式(3)对于 $a+b$ 和 $a-b$ 的情形两边分别相加，我们得到

$$-4\leqslant(a+b)+(a-b)\leqslant 4,$$

即

$$-2\leqslant a\leqslant 2. \qquad (4)$$

由不等式(3)和(4)，我们得到 $-4\leqslant 2a\pm b\leqslant 4$，即

$$-4\leqslant 2a+b\leqslant 4, \qquad -4\leqslant -2a+b\leqslant 4, \qquad (5)$$

这就是所要证明的★

§40. 关于契比雪夫多项式的马尔科夫定理

将62题证明的断言应用到契比雪夫多项式

$$T_2(x)=2x^2-1$$

和它的导函数

$$T_2'(x)=4x.$$

两个函数的图形画在图62中.

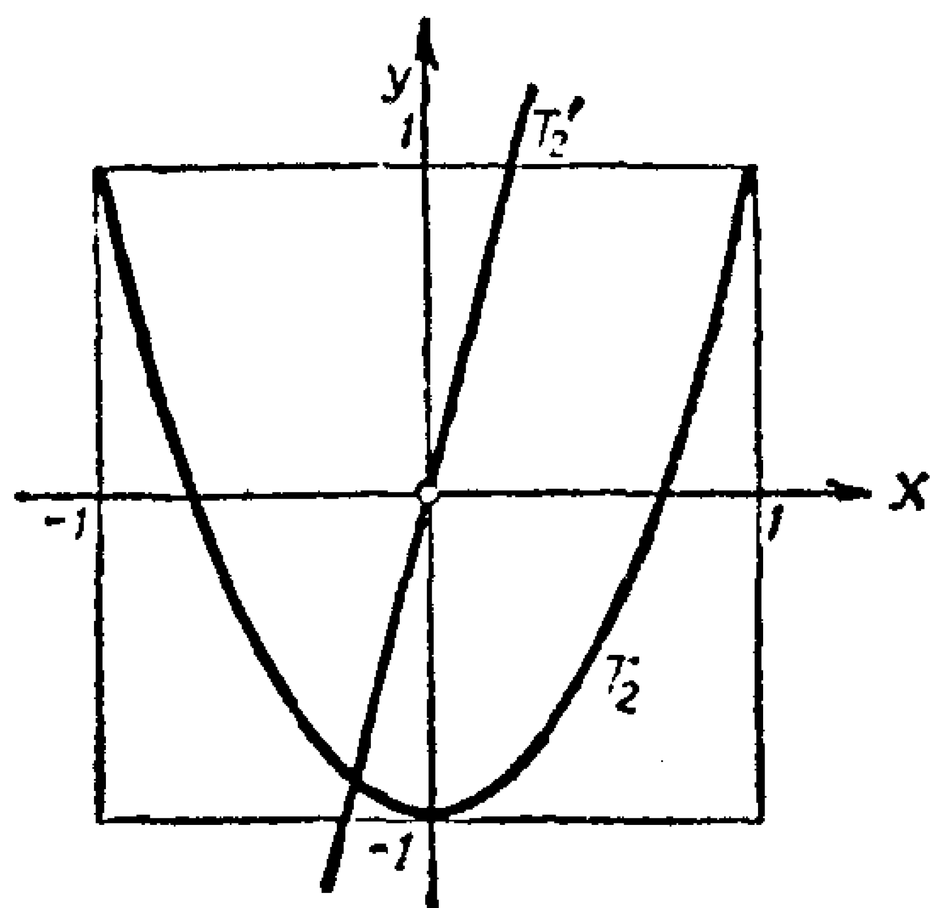


图 62

多项式 $T_2(x)$ 和 $-T_2(x)$ 不同于所有其它的当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时满足不等式 $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ 的**二次**多项式 $f(x)$.

和仅满足不等式

$$-4<f'(1)<4$$

的其它 $f(x)$ 的导函数不同，契比雪夫多项式 $T_2(x)$ 的导函数在区间的端点满足等式

$$T_2'(1)=-T_2'(-1)=4.$$

事实上，由于在题62的解答中所引出的不等式(3)和(4)，等式

$$f'(1)=2a+b=4$$

只可能在那种情况下成立：如果 $a\pm b=a=2$，即如果

$$a=2, \qquad b=0.$$

这时由不等式(1)我们得到 $2+c\leqslant 1$，即

$$c\leqslant -1.$$

因为我们知道 $c\geqslant -1$，所以 $c=-1$. 这样一来，如果 $f'(1)=4$，我们便得到契比雪夫多项式 $T_2(x)=2x^2-1$.

类似地，若初始的等式取作

$$f'(-1)=4, \qquad f'(1)=-4, \qquad f'(-1)=-4,$$

我们分别得到多项式 $-T_2(x)$，$-T_2(x)$，$T_2(x)$.

我们提一下，我们所证明的断言仅仅是下面的 $A\cdot A\cdot$ 马尔科夫（1856—1922）定理的特殊情况：

如果具有实系数的 n 次多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

对所有的$-1\leqslant x\leqslant 1$满足不等式

$$-1\leqslant f(x)\leqslant 1,$$

那么它的导函数满足不等式

$$-n^2\leqslant f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}\leqslant n^2.$$

仅当$x=+1$或$x=-1$而且仅仅当$f(x)$和契比雪夫多项式$T_n(x)$重合或者仅和它相差一个符号时，$|f'(x)|$可以达到自己的极限值.

63．圆和$\triangle ABC$的边BC，CA，AB交于A_1，A_2；B_1，B_2；C_1，C_2．证明：如果由点A_1，B_1，C_1作BC，CA，AB的垂线相交于一点，那么由点A_2，B_2，C_2所作BC，CA，AB的垂线也相交于一点．

【证明】我们假设由点A_1，B_1，C_1对$\triangle ABC$的边所作的垂线相交于一点M（图63）．

因为圆k的圆心O在线段C_1C_2的中垂线上，所以，若由点C_2作边AB的垂线，这个垂线和线段OM的延长线交于点N，那么$NO=OM$．类似的断言对于由点A_2和B_2所作的三角形的边的垂线也是成立的．

因此，由点A_2，B_2，C_2对三角形的三边所作的三根垂线相交于点M关于O对称的点N，这就是所要证明的．

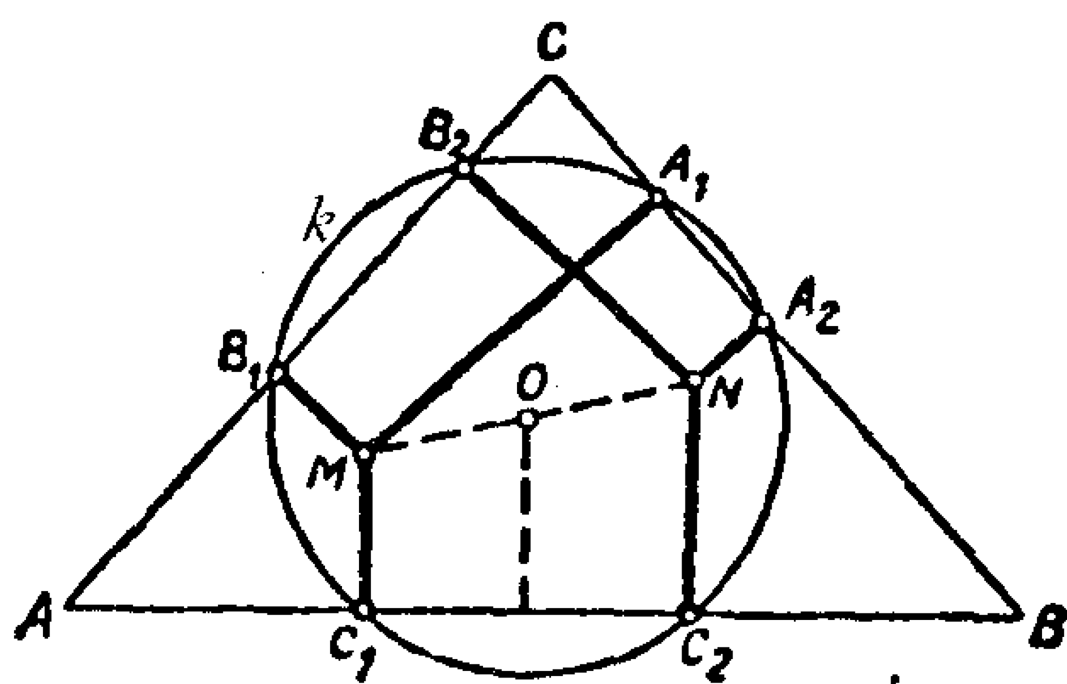


图　63

64．假设A，B，C是给定的实数．证明：总可以找到这样的数v，使得对于任何$n>v$，有不等式

$$An^2+Bn+C<n!$$

【证明】首先我们证明不等式

$$n!=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2\times 1\geqslant n(n-1)(n-2)$$

对任意的正整数n都成立．

事实上，如果$n\geqslant 4$，那么$n!$可以表示成两个正整数$n(n-1)(n-2)$和$(n-3)!$的乘积的形式，其中$(n-3)!\geqslant 1$．此外，不等式$n!\geqslant n(n-1)(n-2)$当n等于1，2，3时也成立，因为它左边的值为1，2，6，而右边的值为0，0，6．

这样一来，我们只要证明下面的事实就够了：存在这样的正整数v，使得当$n>v$时，差

$$D=n(n-1)(n-2)-(An^2+Bn+C)$$

是正的．

将右边的括弧去掉并合并同类项，可以将D变为

$$D=n^3-(Rn^2+Sn+T),$$

其中R，S，T是与n无关的系数．

如果正整数v这样选取，使它大于系数R、S、T中的任何一个，那么

$$Rn^2+Sn+T<v(n^2+n+1).$$

由此（因为$n^3>n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$）得到不等式

$$D>(n-1)(n^2+n+1)-v(n^2+n+1)=(n-1-v)(n^2+n+1).$$

这样一来，不等式 $D>0$ 对任何整数 $n>v$ 都成立.

65. 设三角形完全在某一个多边形内. 证明：三角形的周长不超过多边形的周长.

【证明】将三角形的边 AB，BC 和 CA 分别往顶点 A，B 和 C 的外边延长，使其与多边形的周界相交（图64）. 交点 L、M 和 N 把多边形的周界分成 (LM)，(MN)，(NL) 三部分.

大家知道，每一条折线都比和它具有公共端点的直线段长，因此

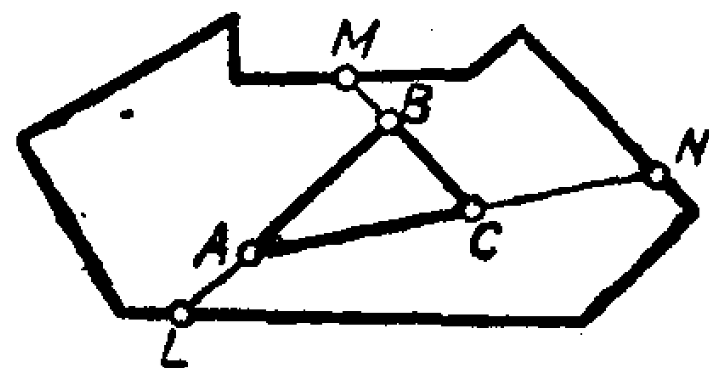


图 64

$$(LM)+MB>LA+AB,$$

$$(MN)+NC>MB+BC,$$

$$(NL)+LA>NC+CA.$$

将这些不等式两边分别相加并去掉同时包含在左边和右边的线段，我们得到不等式

$$(LM)+(MN)+(NL)>AB+BC+CA.$$

66. 证明：内接于平行四边形的三角形的面积不可能大于这个平行四边形的面积的一半.

【证明】第一种情形. 假设三角形的两个顶点 A 和 B 在平行四边形的一条边 KL 上（图65和66）.

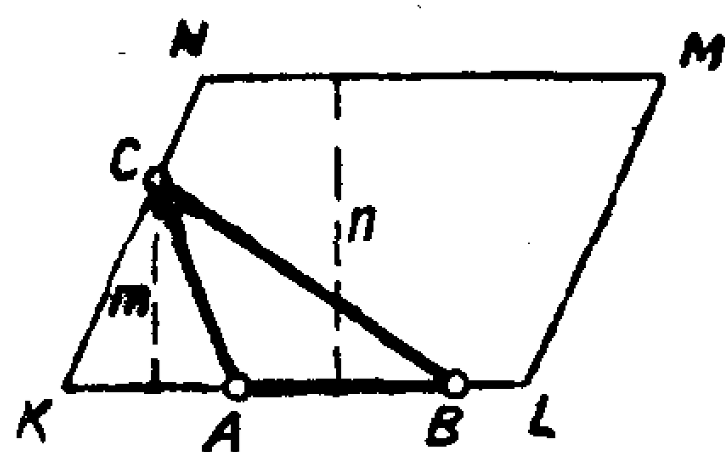


图 65

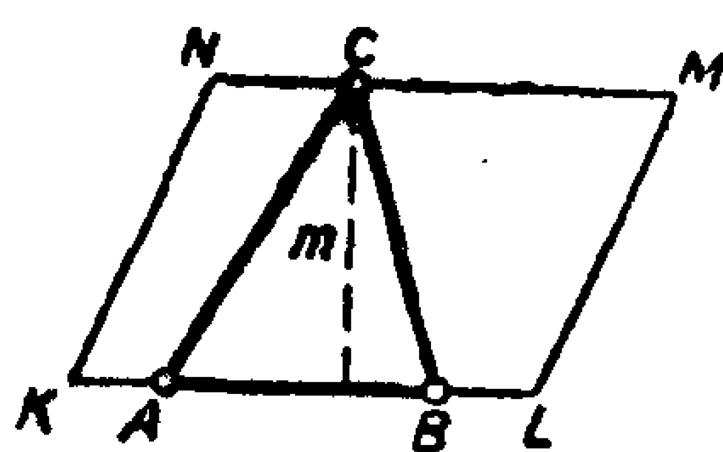


图 66

如果 S 是 $\triangle ABC$ 的面积，m 是边 AB 上的高，S' 是平行四边形的面积，n 是平行四边形的边 KL 上的高，那么

$$S=\frac{1}{2}m\cdot AB,\qquad S'=n\cdot KL,$$

因为

$$m\leqslant n,\qquad AB\leqslant KL,$$

所以

$$S\leqslant\frac{1}{2}S'.$$

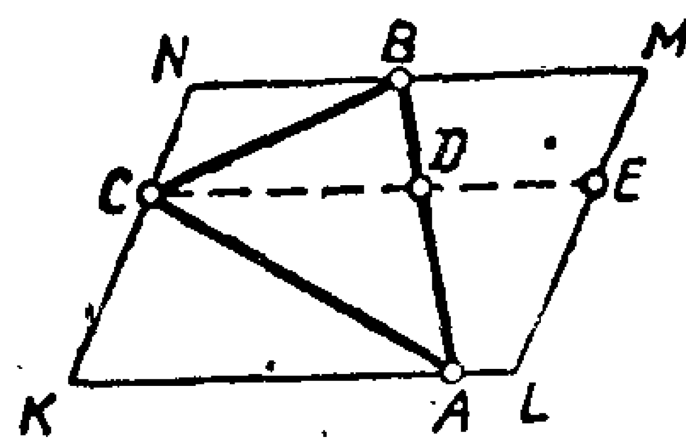


图 67

第二种情形. 假设三角形的顶点在平行四边形的不同的边上（图67）. 这时，在三角形的顶点之中，一定有两个顶点在平行四边形的两个相对的边上. 假设顶点 A 在边 KL 上，顶点 B 在对边 MN 上，顶点 C 在边 KN 上.

通过顶点 C 作一条和边 KL 以及 MN 平行的直线. 假设 D 是这条直线与三角形的边 AB 的交点，E 是它与平行四边形的边 LM 的交点.

根据上面（在第一种情形所研究的）的证明，$\triangle ACD$ 的面积不大于 $\square KLEC$ 的面积的一半，$\triangle CDB$ 不大于 $\square CEMN$ 的面积的一半．由此推出，整个 $\triangle ABC$ 的面积不超过 $\square KLMN$ 的面积的一半．

67．证明：方程

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=0$$

（其中 a 和 b 是正数）有两个实数根，而且一个根在 $\frac{a}{3}$ 和 $\frac{2a}{3}$ 之间，另一个根在 $-\frac{2b}{3}$ 和 $-\frac{b}{3}$ 之间．

【证明】 首先我们证明方程

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=0 \qquad (1)$$

有两个根．去掉分母以后，我们得到

$$f(x)=3x^2-2(a-b)x-ab=0. \qquad (2)$$

这个方程的负根大于数 $-b$，而正根小于数 a，因为当 x 等于 $-b$，0，a 时，二次三项式 $f(x)$ 的值

$$f(-b)=b(a+b), \quad f(0)=-ab, \quad f(a)=a(a+b)$$

的符号交替改变．这两个根是满足原来方程的，因为去掉分母时可能产生的增根只能等于 $-b$，0，a.[1]

将正根 x_1 代入到原方程，得到

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1+b}=\frac{1}{a-x_1}.$$

它左右两边所有的项都是正的．由于

$$\frac{1}{x_1}<\frac{1}{a-x_1},$$

所以 $x_1>\frac{a}{2}$，从而更加有 $x_1>\frac{a}{3}$.

另一方面，由于 $x_1<x_1+b$，所以 $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_1+b}$，且由方程

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1+b}=\frac{1}{a-x_1}$$

得到不等式

$$\frac{2}{x_1}>\frac{1}{a-x_1},$$

由此推出 $x_1<\frac{2a}{3}$.

用同样的方法不难证明对于负根 x_2 的不等式★

注[2] 在上面的解答中，在证明方程（1）有两个不同的实数根时，利用了连续函数的性质．现在我们仅仅用初等数学的知识来证明这一点．

---

[1] 在上面证明原方程有两个不同的实根时，用到了连续函数的性质．——中译者注．

[2] 系中译者所加．

首先，方程（2）和方程（1）是同解的，因为在去掉分母时可能产生的增根只可能是 $x=-b$，0，a，而我们不难验证这些值不是方程（2）的根.

方程（2）有两个不同的实数根，因为它的判别式

$$[2(a-b)]^2-4\times3\times(-ab)=4(a^2+ab+b^2)>0.$$

另外，由于方程（2）的常数项 $-ab<0$，所以方程（2）的两个根，一个为正实数，另一个为负实数.

这样一来，我们便证明了方程（1）有两个不同的实数根，而且一个根为正实数，另一个根为负实数.

§41. 拉格尔定理

在67题的条件中所说的方程可以看作方程

$$\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\cdots+\frac{1}{x-a_n}=0 \qquad (1)$$

的特殊情况，其中 a_1，a_2，…，a_n 是不同的实数.

不难证明：方程（1）有 $n-1$ 个实根. 如果记号是这样选取的：$a_1<a_2<\cdots<a_n$，那么在任何一对数之间

$$(a_1,\ a_2),\quad (a_2,\ a_3),\ \cdots,\quad (a_{n-1},\ a_n)$$

包含方程（1）的一个且仅仅一个根.

法国数学家拉格尔（1834—1886）解决了更深刻的问题：能否指出方程(1)的根 α_i 在区间 $(a_i,\ a_{i+1})$ 内的分布情况. 这个根是否能随意靠近区间的端点.

下面的定理给出了这些问题的答案：

如果将区间 (a_i, a_{i+1}) 分成 n 个相等的部分，那么包含在 a_i 和 a_{i+1} 之间的根 α_i 永远也不会落在紧靠着区间端点的两个部分的任何一个之中.

如果 $n=3$ 且

$$a_1=-b,\quad a_2=0,\quad a_3=a,$$

那么拉格尔定理得出与67题的解答相同的结论.

函数

$$f(x)=\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}$$

的图象和方程 $f(x)=0$ 的根表明在图68中.

利用我们在67题的证明中所用的方法不难证明拉格尔定理.

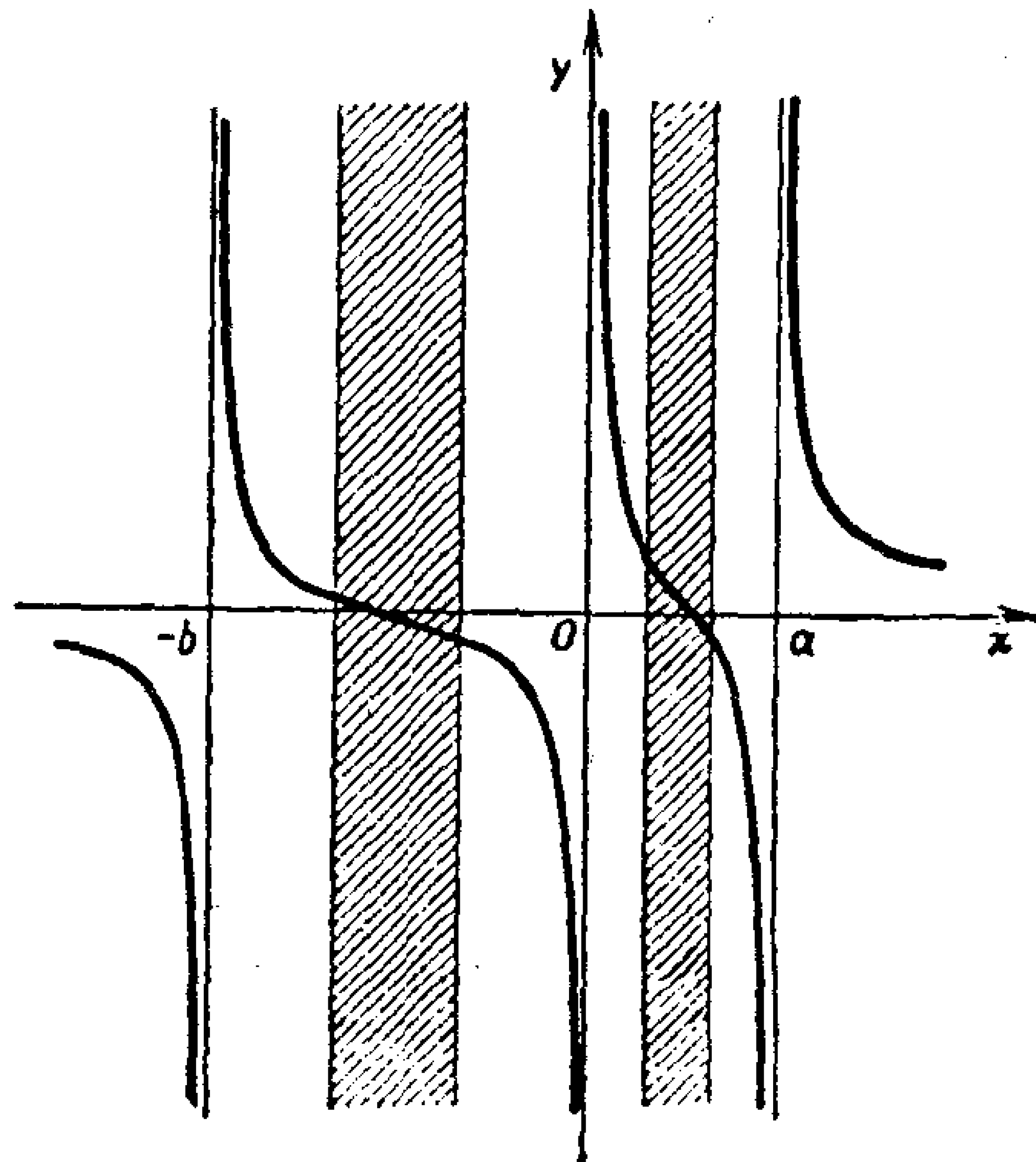


图 68

68. 在三角形 ABC 中，角 C 的平分线交边 AB 于 D. 证明：线段 CD 的长度小于边 CA 和 CB 的几何平均值.

【**证法1**】假设 E 是边 AC 上这样的点，使

$$\angle EDC=\angle ABC.$$

这样的点（图69）实际上是存在的，因为$\angle ABC < \angle ADC$（$\angle ADC$是$\triangle BCD$的外角，而$\angle ABC$是这个三角形的和它不相邻的一个内角）.

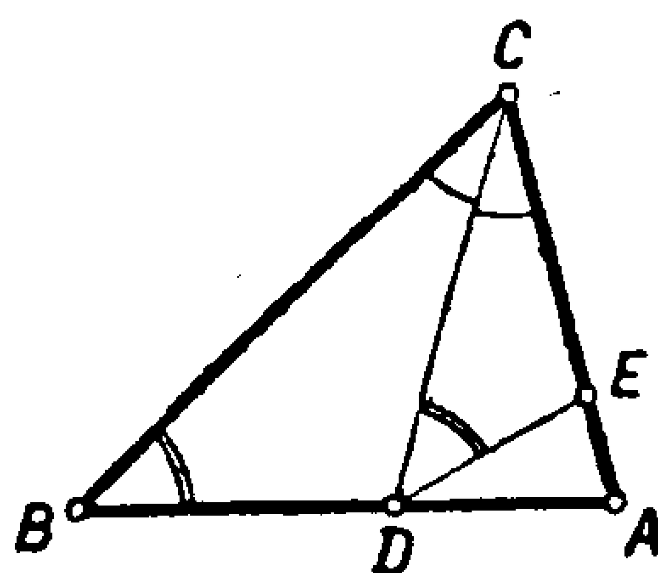


图 69

$\triangle BCD$和$\triangle CDE$相似，因为，除了$\angle EDC=\angle ABC$之外，它们在顶点C处的顶角是相等的（注意，CD是$\triangle ABC$的角ACB的平分线）. 写出对应边的比，得到

$$CB:CD=CD:CE,$$

或

$$CD^2=CE\cdot CB<CA\cdot CB,$$

这就是所要证明的.

【证法 2】 1） 在每一个三角形中，边a，b的长度，它们的夹角γ，夹角的平分线l之间有关系式

$$\frac{1}{l}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \tag{1}$$

（见51题的解法 1）.

假设给定三个正数a,b和l，那么三角形——它的两个边长等于a和b，这两边的夹角的平分线长等于l——当而且仅仅当下面条件成立时才能作出：如果按公式(1)算出的角$\frac{\gamma}{2}$的余弦小于1，即如果

$$\frac{1}{l}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \tag{2}$$

成立的时候.

2） 如果在不等式（2）的右边，数$\frac{1}{a}$和$\frac{1}{b}$的算术平均值用它们的几何平均值来代替，那么不等式更加成立.★因此，在每一个三角形中

$$\frac{1}{l}>\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}},$$

即

$$l<\sqrt{ab}. \tag{3}$$

不等式(2)对于下面的作图是**必要而充分的**：对于给定的三个正数a,b,l，可以作一个三角形，使得三角形的两个边长等于a和b，这两个边所夹的角的平分线的长为l. 但不等式(3)仅仅是**必要的**，**而不是充分的**. 例如，如果$a=3$，$b=13$，那么

$$\sqrt{ab}=\sqrt{3\times13}>6,$$

而且

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{13}\right)=\frac{8}{39}>\frac{1}{6}.$$

因此，若$l=6$，则不满足不等式(2)，虽然这时满足不等式(3).

§ 42. 柯西不等式

对于任意的正数$x_1,x_2,\cdots,x_n$的几何平均值

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

不超过算术平均值

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

即有不等式

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\tag{1}$$

或

$$x_1x_2\cdots x_n\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n,\tag{2}$$

而且等号仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时才能成立．

我们利用完全数学归纳法并且首先对 $n=2^m$（m 是任意的正整数）的情况来证明这个柯西不等式．

我们从 $n=2$ 开始．因为 x_1 和 x_2 是正数，所以不等式

$$\sqrt{x_1x_2}\leqslant\frac{x_1+x_2}{2}\tag{3}$$

等价于不等式

$$x_1x_2\leqslant\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2.\tag{4}$$

由 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$ 减去 x_1x_2，我们得到

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-x_1x_2=\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2\geqslant 0,$$

而且等式仅当 $x_1=x_2$ 时才成立．

利用不等式（4）并且将它用到4个（$n=2^2=4$）数的情况：

$$(x_1x_2)(x_3x_4)\leqslant\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2.$$

在不等式（4）中，用 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 与 $\frac{x_3+x_4}{2}$ 代替 x_1 与 x_2，我们得到

$$\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^2.$$

这样一来，前面的不等式可以变为

$$x_1x_2x_3x_4\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4.$$

并且在这种情况下，等号仅当 $x_1=x_2=x_3=x_4$ 时成立．

由此，对于 $n=8$ 的情况我们得到不等式

$$(x_1x_2x_3x_4)(x_5x_6x_7x_8)\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4\left(\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}\right)^4.$$

在不等式（4）中，用数 x_1，x_2，x_3，x_4 和 x_5，x_6，x_7，x_8 的算术平均值代替 x_1 和 x_2，我们得到不等式

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\cdot\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{x_1-x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8}{8}\right)^2.$$

因此，对于 8 个正数有不等式

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8}{8}\right)^8.$$

继续使 n 每次增加一倍，我们对于 4，8，16，…，2^m，…个数证明了定理.

对于任意的 n，可用下面的方法来证明定理. 例如，设 $n=5$. 对于给定的数再补充 $8-5=3$ 个数，这些数的每一个都等于 5 个给定数的算术平均值 k. 根据前面证明的

$$x_1x_2x_3x_4x_5k^3\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+3k}{8}\right)^8=k^8.$$

因此

$$x_1x_2x_3x_4x_5\leqslant k^5.$$

关于几何平均值和算术平均值的定理是柯西（1789—1857）首先叙述和证明的.

如果正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 这样变化，使得它们的和或者它们的乘积为常数，那么对于所证明的不等式还可补充下面两个定理：

任意多个正因子这样变化，使得它们的和为常数（而其它是任意的）. 当所有的因子相等时，这些因子的乘积达到它的最大值.

任意多个正的被加项这样变化，使得它们的乘积为常数（而其它是任意的）. 当所有的被加项相等时，这些被加项的和达到它的最小值.

§43. 琴生不等式

丹麦数学家琴生（1859—1925）一步一步重复柯西的所有论证，证明了下面比较一般的定理.

设 $f(x)$ 是这样的函数，使得

$$f(x_1)+f(x_2)\leqslant 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \tag{1}$$

对于数轴上给定区间（可能是无穷的）的 x_1 和 x_2 总是成立的. 这时，对于这个区间中任意的 x_1，x_2，…，x_n，有不等式

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\leqslant nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right). \tag{2}$$

（如果在(1)中，等号仅当 $x_1=x_2$ 时成立，那么在(2)中等号也仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.）

作为特殊情况，由琴生不等式可以推出在上一节中所证明的柯西不等式. 此外，琴生不等式还可对早先研究的两个问题给出新的解答.

1） 事实上，对于任意的正数 x_1 和 x_2 有不等式

$$x_1x_2\leqslant\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2.$$

将它对任意大于1的底取对数，我们得到

$$\log x_1+\log x_2\leqslant 2\log\frac{x_1+x_2}{2}.$$

因此，我们可以利用琴生不等式断言：对任意的正数 x_1，x_2，…，x_n 有不等式

$$\log x_1+\log x_2+\cdots+\log x_n\leqslant n\log\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

这是§42中的不等式(2)取对数后的形式.

2) 设 x_1 和 x_2 是两个正的锐角. 这时（见§9）

$$\sin x_1\sin x_2=\frac{1}{2}\left[\cos(x_1-x_2)-\cos(x_1+x_2)\right],$$

$$\sin^2\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}\left[1-\cos(x_1+x_2)\right],$$

因此

$$\sin^2\frac{x_1+x_2}{2}-\sin x_1\sin x_2=\frac{1-\cos(x_1-x_2)}{2}=\sin^2\frac{x_1-x_2}{2}.$$

这样一来

$$\sin x_1\sin x_2\leqslant\sin^2\frac{x_1+x_2}{2}.$$

将这个不等式对任意大于1的底取对数，我们得到

$$\log\sin x_1+\log\sin x_2\leqslant 2\log\sin\frac{x_1+x_2}{2}.$$

因此，在这种情况下我们可以利用琴生不等式，于是，对于任意多个正的锐角有不等式

$$\log\sin x_1+\log\sin x_2+\cdots+\log\sin x_n\leqslant$$

$$\leqslant n\log\sin\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

即

$$\sin x_1\sin x_2\cdots\sin x_n\leqslant\sin^n\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

而且等号仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立.

如果 $n=3$，且 $x_1+x_2+x_3=\frac{\pi}{2}$，即如果 x_1、x_2、x_3 是三角形的角的一半，那么

$$\sin x_1\sin x_2\sin x_3\leqslant\sin^3\frac{\pi}{6}=\frac{1}{8}.$$

这个不等式在11题的证法2中证明过（利用欧拉定理）.

3) 琴生不等式可以解答14题.

事实上，如果 x_1 和 x_2 是包含在0°和180°之间的两个角，那么

$$\sin x_1+\sin x_2=2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cos\frac{x_1-x_2}{2}\leqslant 2\sin\frac{x_1+x_2}{2},$$

这样一来，我们可以利用琴生不等式断言：对于包含在所指出的范围内的任意多个角 x_1，x_2，…，x_n，有不等式

例如，函数 $y=x^2$，$y=x^4$，$y=a^x(a>0)$ 是凸的，而函数 $y=-x^2$，$y=-x^4$，$y=lgx$ 是凹的．函数 $y=\sin x$ 在区间 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 上是凹的，而在区间 $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 上是凸的．线性函数 $y=ax+b$ 是仅有的这样一种函数，它同时既是凸的又是凹的．

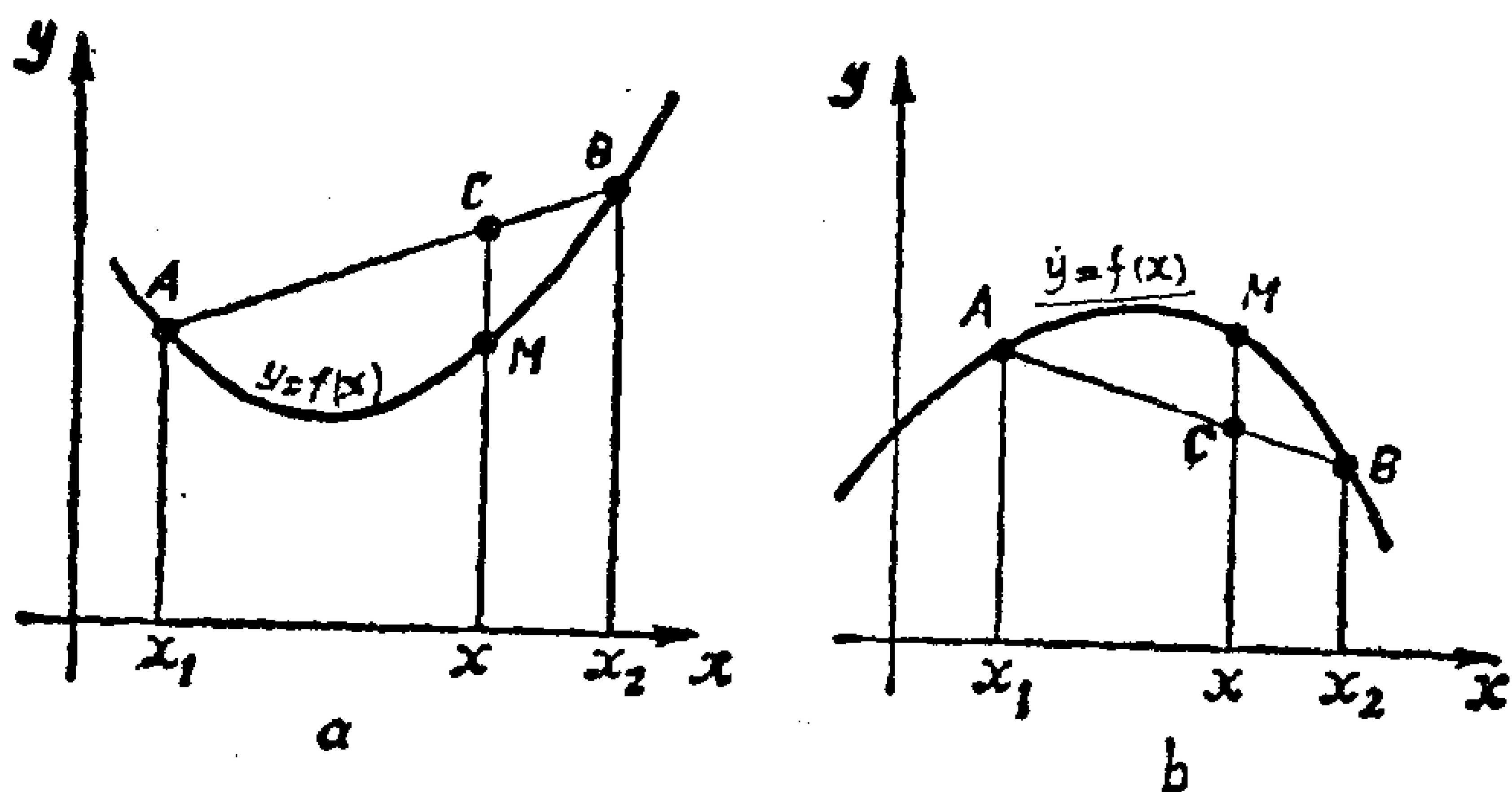


图 70

现在我们用分析的语言引出上面所给出的定义．

定义在某一个区间上的函数 $y=f(x)$ 叫做凸的，如果对于它的定义域中的任意的 x_1，x_2 以及任意的 α，β，$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，$\alpha+\beta=1$，有不等式

$$f(\alpha x_1+\beta x_2)\leqslant\alpha f(x_1)+\beta f(x_2). \tag{1}$$

用不等式

$$f(\alpha x_1+\beta x_2)\geqslant\alpha f(x_1)+\beta f(x_2) \tag{2}$$

来代替不等式(1)可以得到凹函数的定义．

我们来证明这个定义等价于上面所给出的几何的定义．事实上，假设 $A(x_1,f(x_1))$ 和 $B(x_2,f(x_2))$ 是我们的函数图形上的点（图70 a和 b）．点 C 是弦 AB 上这样一个分点，它把 AB 分成比 $AC:CB=\beta:\alpha$，当 $\alpha+\beta=1$ 时，点 C 的坐标为 $(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha f(x_1)+\beta f(x_2))$．当 α 沿着一个方向跑遍区间 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，而 $\beta=1-\alpha$ 沿相反的方向跑遍这个区间时，点 C 跑遍整个弦 AB．

在图形上取横坐标为 $x=\alpha x_1+\beta x_2$ 的点 M．它的纵坐标等于 $f(\alpha x_1+\beta x_2)$．函数当而且仅当点 M 不在点 C 上面时是凸的（图70，a；两个点具有同样的横坐标），而这正好意味着不等式(1)成立．同样地，函数的凹性意味着点 M 不在 C 的下面（图70，b），即(2)成立．

显然 §43中的不等式(1)是我们的不等式(2)相应于 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ 的特殊情况．不仅如此，如果 $f(x)$ 连续并且对所有的 x_1 和 x_2 满足 §43中的不等式(1)，那么它在我们的定义的意义下是凹的．因此对于凹函数来说，在 §43中所证明的不等式是正确的，而对于凸函数也有类似的不等式，只是将符号 $\leqslant$ 变成 $\geqslant$．此外，这些不等式还可推广．

假设 $y=f(x)$ 是凸的或凹的函数．这时对于它的定义域中的任意的 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 和任意的 α_1，α_2，$\cdots$，α_n，$\alpha_i\geqslant 0$，$i=1$，2，$\cdots$，n，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$，如果 $f(x)$ 是凸的，则有不等式

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n), \tag{3}$$

如果它是凹的，则有不等式

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\geqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n). \tag{4}$$

这两个不等式也叫做琴生不等式．（§43的不等式(2)可由(4)当 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=\frac{1}{n}$ 时得到．）我们只证明不等式(3)，用数学归纳法来进行．

当 $n=1$ 时，(3)是显然的．我们假设它对某一个 n 是正确的，且给定 x_i，α_i，$i=1,2,\cdots,n+1$，$\alpha_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1$．令

$$\overline{x}_1=\overline{\alpha}_1x_1+\cdots+\overline{\alpha}_nx_n,\quad \overline{x}_2=x_{n+1},$$

$$\overline{\alpha}_i=\frac{\alpha_i}{\alpha},\quad \alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,\quad \beta=\alpha_{n+1}.$$

(如果对于 $i=1,2,\cdots,n$，$\alpha_i=0$，那么没有什么要证明的了.) 这时

$$
\begin{aligned}
f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_{n+1}x_{n+1})&=f(\alpha\overline{x}_1+\beta\overline{x}_2)\leqslant\alpha f(\overline{x}_1)+\beta f(\overline{x}_2)=\\
&=\alpha f(\overline{\alpha}_1x_1+\cdots+\overline{\alpha}_nx_n)+\alpha_{n+1}f(x_{n+1})\leqslant\\
&\leqslant\alpha[\overline{\alpha}_1f(x_1)+\cdots+\overline{\alpha}_nf(x_n)]+\alpha_{n-1}f(x_{n+1})=\\
&=\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n)+\alpha_{n+1}f(x_{n+1})
\end{aligned}
$$

(在这里我们利用了对于 n 的不等式(3)和凸性的定义(1)). 这样一来,(3)对 $n+1$ 是正确的，而根据数学归纳原理，证明了对所有的自然数 n 都是正确的.

如果直接验证定义(1)和(2)，可能有些困难，但是如果我们利用微分学，那么困难的程度将会大大减低.

如果在某一个区间内，二阶导数 $f''(x)\geqslant0$（相应地，$\leqslant0$），那么在这个区间内，函数 $f(x)$ 是凸的（相应地，是凹的）.

事实上，利用有限增量公式我们求得

$$
\begin{aligned}
&\alpha f(x_1)+\beta f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha[f(x_1)-f(\alpha x_1+\beta x_2)]+\\
&\quad+\beta[f(x_2)-f(\alpha x_1+\beta x_2)]=\alpha f'(c_1)(x_1-\alpha x_1-\beta x_2)+\\
&\quad+\beta f'(c_2)(x_2-\alpha x_1-\beta x_2)=\alpha\beta[f'(c_2)-f'(c_1)](x_2-x_1)=\\
&\quad=\alpha\beta f''(c)(c_2-c_1)(x_2-x_1).
\end{aligned}
$$

其中 $x_1<c_1<\alpha x_1+\beta x_2<c_2<x_2$ 和 $c_1<c<c_2$. 因此左边的符号和 f'' 的符号重合，因而当 $f''\geqslant0$ 得到(1)，当 $f''\leqslant0$ 得到(2).

例如，函数 $y=\ln x$ 是凹的，因为 $y''=-\frac{1}{x^2}<0$. 因此

$$\ln(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\geqslant\alpha_1\ln x_1+\cdots+\alpha_n\ln x_n=\ln(x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}).$$

由此推出

$$\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n\geqslant x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

$$(x_i>0,\ \alpha_i\geqslant0,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1),$$

它是柯西不等式（§42）的推广.

所有上面的讨论可以毫无困难地搬到多元函数中去（还可见§65).

69. 将数:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

用任何方法分成两组. 证明：总可以在某一组中找到这样两个数，它们之差与这一组中的某一个数相同.

【**证明**】我们试图把数 1,2,3,4,5 分成这样两组，使得在任一组中，任何两个数之差都不和这一组中的数相等.

数 2 和 4 不能分在一组，因为 $4-2=2$.

数 1 不能和 2 分在一组，因为 $2-1=1$. 因此，数 1 只能分在包含有 4 的那一组.

因为 $4-1=3$，所以 3 只能和 2 同一组.

于是，数 1 和 4 应该分在一组，数 2 和 3 应该分在另一组.

但是剩下的数 5 不能属于这两组中的任何一组，因为 $5-1=4$，而 $5-2=3$.

70. 给定方程组

$$y-2x-a=0,$$
$$y^2-xy+x^2-b=0,$$

其中 a，b 是整数，x 和 y 是未知数. 证明：如果有某一组有理数满足这个方程组，那么它们应该是整数.

【证明】我们研究方程组

$$y-2x-a=0, \tag{1}$$
$$y^2-xy+x^2-b=0. \tag{2}$$

由方程（1）推出

$$x=\frac{y-a}{2}.$$

将这个表达式代入到方程（2），我们得到

$$y^2-y\frac{y-a}{2}+\left(\frac{y-a}{2}\right)^2-b=0.$$

去掉括弧并合并同类项，这个新的方程变为

$$3y^2=4b-a^2,$$

或者

$$(3y)^2=3(4b-a^2). \tag{3}$$

现在假设 x 和 y 是满足方程式（1）和（2）的有理数，因而也满足方程式（3）.

因为 a，b 是整数，所以方程（3）的右边是整数. 它可以和有理数 $3y$ 的平方相等仅仅是在 $3y$ 不是分数而是整数的情况下才有可能（见40题和 § 31）.

此外，方程（3）的右边的数能被 3 整除，而这只有在数 $3y$ 能被 3 整除时才可能（见 § 2），也就是说，只有当 y 是整数时才有可能.

由方程（3）还可推出，数 a 和 y 要么同为偶数，要么同为奇数，因此

$$x=\frac{y-a}{2}$$

是整数.

71. 在十进制中，位数大于一的某数的平方，其十位数字等于 7. 这个数的平方的个位数字等于多少？

【解】我们证明：在十进制中，如果某数平方的十位数字是奇数，那么这个数的平方的个位数字等于 6.

设 c 是数 a 在十进制记数法中的个位数字. 这时 $a+c$ 是偶数，而 $a-c$ 能被10整除，因此 $a^2-c^2=(a+c)(a-c)$ 能被20整除，从而数 a^2 和 c^2 的个位数字相同，十位数字同为偶数或同为奇数.

在十进制中，一位数的平方的十位数字为奇数的仅仅只有 $4^2=16$ 和 $6^2=36$. 无论在哪种情况下，个位数字都等于 6. 因此，在十进制记数法中，任何一个数的平方 a^2 的十位数字为奇数，仅仅只有在 a 的个位数字为 4 或 6 时才有可能. 然而这时数 a^2 的个位数字等于 6.

本题条件中所说的数是存在的. 例如，$24^2=576$，$26^2=676$ 就是这样的数.

72. 在圆 k 内给定两点 A 和 B. 证明：存在这样一个圆（实际上，有无穷多个），它通过点 A 和 B，且完全在圆 k 内.

【证明】连接圆 k 的圆心 O 和点 A. 如果以线段 OA 的任意一点 C 为圆心，以 CA 为半径画一个圆（图71），那么这个圆完全在圆 k 内❶.

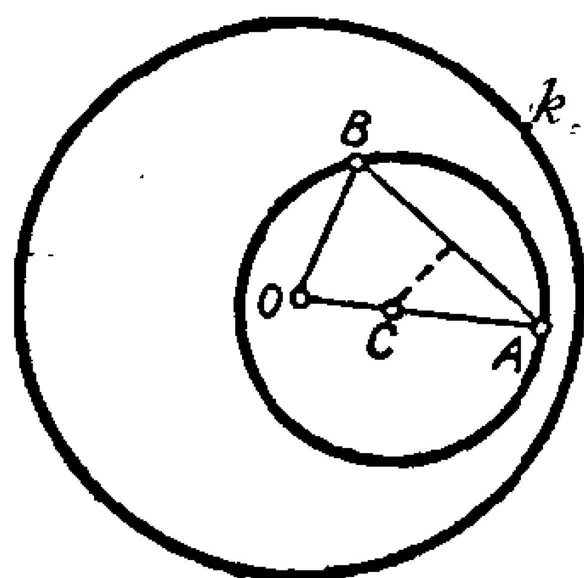


图 71

如果作线段 AB 的中垂线，那么它或者和线段 OA 相交，或者和线段 OB 相交. 以交点 C 为圆心，以 $CA=CB$ 为半径所画的圆通过两个给定的点 A 和 B，且（根据上面所证明的）完全在圆 k 内.

73. 假设 AC 是平行四边形 $ABCD$ 的较长的对角线，从顶点 C 引边 AB 和 AD 的垂线 CE 和 CF，分别和 AB 与 AD 的延长线相交于点 E 与 F. 证明：

$$AB\cdot AE+AD\cdot AF=AC^2.$$

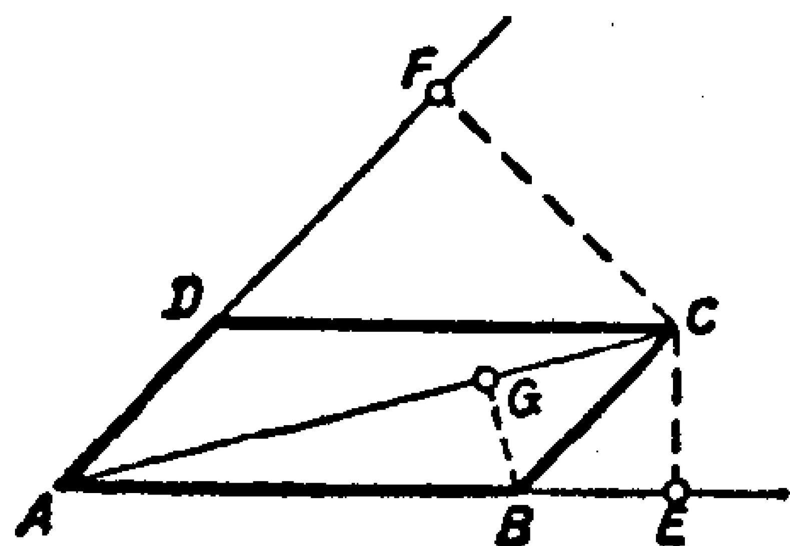


图 72

【证明】由顶点 B 向对角线 AC 作垂线，垂足为 G（图72）. 对角线中较长的对角线 AC 将平行四边形分成两个钝角三角形 ADC 和 ABC，因此点 G 在顶点 A 和 C 之间的 AC 上.

直角三角形 AEC 和 AGB 是相似的，因为 $\angle EAC=\angle GAB$. 直角三角形 AFC 和 CGB 也相似，因为 $\angle FAC=\angle GCB$. 在相似的三角形中，对应边成比例，于是我们得到

$$AC:AE=AB:AG,\qquad AC:AF=BC:GC,$$

由此得到

$$AB\cdot AE=AC\cdot AG,\qquad BC\cdot AF=AC\cdot GC,$$

最后可以得到

$$AB\cdot AE+BC\cdot AF=AC\cdot(AG+GC).$$

但是

$$BC=AD,\qquad AG+GC=AC,$$

因此

$$AB\cdot AE+AD\cdot AF=AC^2,$$

这就是所要证明的.

从所得到的关系式中，作为特殊情况可以推出勾股定理：如果平行四边形变成矩形，那么这个关系式变成

$$AB^2+BC^2=AC^2$$

（还可见§51）.

74. 假设 x,y,z 是三个不同的自然数，按上升的次序排列，且它们的倒数之和仍然是整数. 求 x,y,z.

【解】本题是要求这样的正整数 x,y,z,a，使得

$$x<y<z,\qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a.$$

❶ 假设点 P 是这个圆上的任一点，那么 $OP<OC+CP=OC+CA=OA$，而 OA 小于圆 k 的半径，所以点 P 在圆 k 内. ——中译者注.

首先我们指出，对于任何 x,y,z 有

$$a=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2,$$

因此，$a=1$.

但这时

$$\frac{1}{x}<a=1<\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}.$$

这样一来，$1<x<3$，由此得到 $x=2$.

这时，对于 x,y,z 的倒数的方程变为

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2},$$

由此得到

$$\frac{1}{y}<\frac{1}{2}<\frac{2}{y},$$

因此 $2<y<4$，即 $y=3$.

最后，由方程

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{z}=1$$

求得 $z=6$.

这样一来，本题只有唯一的解：$a=1$，$x=2$，$y=3$，$z=6$.

75. 假设对任何实数 x，有

$$ax^2+2bx+c\geqslant 0,$$
$$px^2+2qx+r\geqslant 0,$$

其中 a,b,c；p,q,r 都是实数. 证明：对任何实数 x，

$$apx^2+2bqx+cr\geqslant 0.$$

【证明】 1) **引理. 如果对于所有的实数 x，二次三项式**

$$f(x)=ax^2+2bx+c\geqslant 0, \tag{1}$$

那么数 $a,c,ac-b^2$ 都是非负的.

为了证明这个引理，我们利用下面的容易验证的恒等式：

$$af(x)=(ax+b)^2+ac-b^2=(ax+b)^2-(b^2-ac). \tag{2}$$

1°. 用反证法可以证明系数 a 是非负的.

假设 $a<0$. 这时由不等式(1)推出，对所有的 x 的值，$af(x)\leqslant 0$. 如果考虑到恒等式(2)，那么所得到的不等式就是

$$(ax+b)^2\leqslant b^2-ac.$$

但是这是不可能的. 事实上，总可以找到这样一个数 $M>1$，它同时又大于数 b^2-ac. 如果 x 满足方程 $ax+b=M$，那么

$$(ax+b)^2=M^2>M>b^2-ac.$$

2°. 系数 c 不可能是负的，因为由于有不等式(1)，所以

$$c=f(0)\geqslant 0.$$

3°. 关于数 $ac-b^2$ 的非负性，我们对于 $a>0$ 和 $a=0$（我们已经知道，a 不可能小于零）的情形用不同的方法来证明.

如果 $a>0$，取 x 满足方程 $ax+b=0$，那么由恒等式(2)推出

$$af(x)=ac-b^2.$$

因为 $a>0$，$f(x)\geqslant 0$，所以

$$ac-b^2\geqslant 0;$$

这就是所要证明的.

当 $a=0$ 时，二次三项式蜕化为

$$f(x)=2bx+c,$$

而且系数 b 应该等于零. 事实上，如果系数 b 不等于零，那么函数 $f(x)=2bx+c$ 可以取任何正值和负值. 但是如果 $a=0$，$b=0$，那么 $ac-b^2=0$.

因此在这种情况下，数 $ac-b^2$ 也是非负的.

2） **逆引理. 如果**

$$a\geqslant 0,\quad c\geqslant 0,\quad ac-b^2\geqslant 0,$$

那么二次三项式

$$f(x)=ax^2+2bx+c\geqslant 0$$

对所有的实数 x 都成立.

由恒等式(2)推出，对于 x 所有的值

$$af(x)\geqslant ac-b^2,$$

又因为 $ac-b^2\geqslant 0$，所以

$$af(x)\geqslant 0.$$

当 $a>0$ 时，由上面的不等式推出 $f(x)\geqslant 0$. 当 $a=0$ 时，由于 $ac-b^2\geqslant 0$，所以系数 b 也等于0. 这时对于 x 的所有的值都有 $f(x)=c$，根据条件，系数 c 是非负的.

3） 应用引理来证明75题.

如果对于 x 的所有的值有

$$ax^2+2bx+c\geqslant 0 \quad 和 \quad px^2+2qx+r\geqslant 0,$$

那么根据所证明的（正）引理，有

$$a\geqslant 0,\ c\geqslant 0,\ p\geqslant 0,\ r\geqslant 0,$$

除此之外，还有

$$ac-b^2\geqslant 0,\quad pr-q^2\geqslant 0,$$

即

$$ac\geqslant b^2,\quad pr\geqslant q^2.$$

但这时应该有不等式

$$ap\geqslant 0,\quad cr\geqslant 0$$

和

$$ac\cdot pr\geqslant b^2q^2,$$

即

$$ap\cdot cr-(bq)^2\geqslant 0.$$

由此，根据逆引理可推出，对于 x 的所有的值，有

$$apx^2+2bqx+cr\geqslant 0,$$

这就是所要证明的.

十二、1922年—1923年试题及解答

76. 在空间中给定四个点：A，B，C和D．试作一平面S，使得点A和C在S的一侧，点B和D在S的另一侧，且点A，B，C，D到平面S的距离相等．

【解】平面S应该这样来作（图73），使得它到点

A和B，　B和C，　C和D，

以及　　D和A

的距离相等，而且每一对点的两个点分布在平面S的不同的两侧．如果平面S对前三对点满足本题的条件，那么它对第四对点也满足本题的条件．

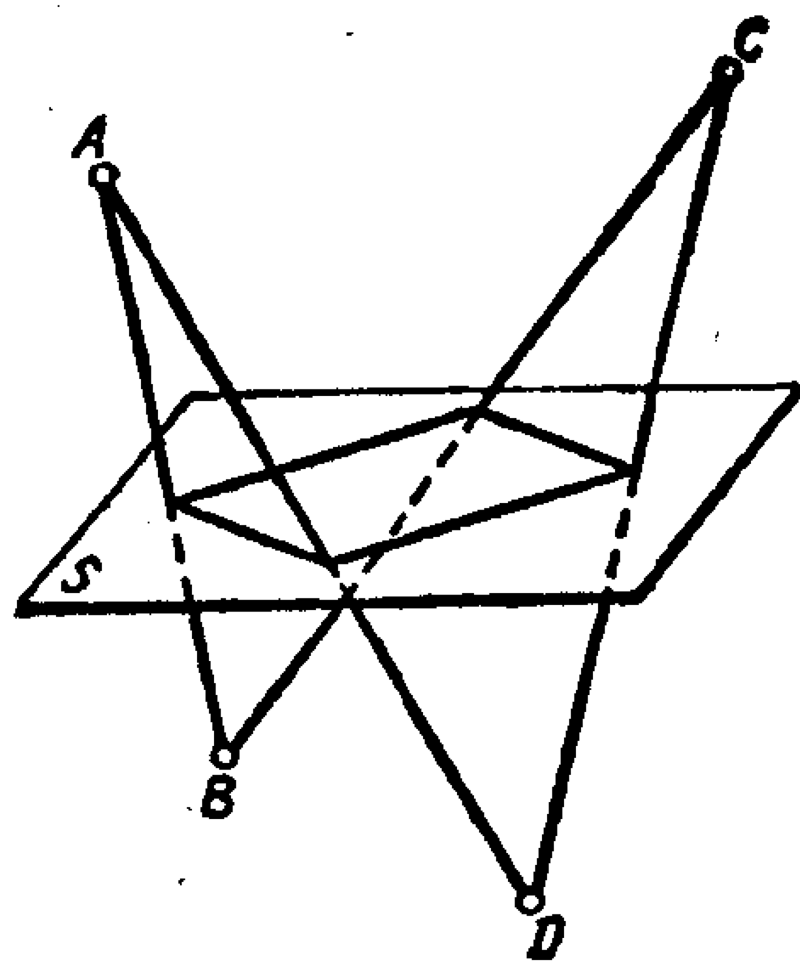


图 73

对于分布在平面两侧的两个点来说，要想使它们到平面的距离相等，必须使这个平面通过连接这两个点的线段的中点．这样一来，如果平面S通过线段AB，BC和CD的中点，那么这个平面对前三对点满足本题的要求．因此，通过这三个已知点的平面满足本题的条件．如果线段AB，BC，CD的中点不在一直线上，那么本题的解是唯一的．如果这些点在一直线上，那么本题有无穷多个解（通过线段中点所在的直线的任一平面满足本题的全部要求）．

77. 证明：四次多项式x^4+2x^2+2x+2不可能分解成两个具有整系数a,b,c,d的二次三项式x^2+ax+b和x^2+cx+d的乘积．

【证明】二次三项式x^2+ax+b和x^2+cx+d的乘积可以表示成

$$x^4+(a+c)x^3+(b+ac+d)x^2+(bc+ad)x+bd.$$

如果所得到的四次多项式恒等于x^4+2x^2+2x+2，那么

$$a+c=0, \quad (1)$$

$$b+ac+d=2, \quad (2)$$

$$bc+ad=2, \quad (3)$$

$$bd=2. \quad (4)$$

根据本题的条件，系数a,b,c,d是整数，因此，由关系式(4)推出，在乘积bd中，一个因子为奇数（等于± 1），而另一个因子为偶数(等于± 2)．例如，假设系数b为奇数，而系数d为偶数．

这时，由关系式(3)推出，乘积bc为偶数，由于第一个因子b是奇数，所以第二个因子c应该是偶数，但这是不可能的．事实上，因为b是奇数，而c和d是偶数，那么关系式(2)的左边是奇数，因而不可能等于2★.

§45. 爱 森 斯 坦 定 理

77题证明的断言是下述定理的特殊情况：**设**

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

是具有整系数的多项式．如果存在这样一个素数 p，最高次项的系数 a_0 不能被 p 整除，而所有其它的系数能被 p 整除，但常数项不能被 p^2 整除，那么 $f(x)$ 不能分解为两个低次的整系数多项式的乘积．

这个定理是赛涅曼（1846）和爱森斯坦（1850）证明的，通常把它叫做爱森斯坦定理，虽然首先证明这个定理的并不是他．

78． 证明：如果 $a,b,\cdots,n$ 是互不相同的自然数，且任何一个都不能被大于 3 的素数整除，那么

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\cdots+\frac{1}{n}<3.$$

【证明】 根据本题的条件，量

$$S=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\cdots+\frac{1}{n}$$

的项都是形如 $\frac{1}{2^r\times3^s}$ 的项，其中幂指数 r 和 s 是非负整数（见§7）．如果 t 是 r 和 s 所取的值中最大的值，那么 S 的项可以表示成等比数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \cdots,\ \frac{1}{2^t}\ \text{（其和为}U\text{）}$$

和

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3^2},\ \cdots,\ \frac{1}{3^t}\ \text{（其和为}V\text{）}$$

的相应的项的乘积．换句话说，S 的项包含在乘积

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^t}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^t}\right)=UV$$

的项之中．因为在 UV 中可能有不属于 S 的项，所以 $S\leqslant UV$．但是 $U<2$，$V<\frac{3}{2}$，所以 $S<3$．

不等式 $U<2$，$V<\frac{3}{2}$ 可以下面的方式来证明：

$$U=\left(1-\frac{1}{2^{t+1}}\right):\left(1-\frac{1}{2}\right)<1:\left(1-\frac{1}{2}\right)=2,$$

$$V=\left(1-\frac{1}{3^{t+1}}\right):\left(1-\frac{1}{3}\right)<1:\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{2}.$$

79． 三个半径都为 r 的圆相交于一点 O，另外两两相交于点 A，B，C．证明：通过点

A, B, C 可以作一个半径仍为 r 的圆.

【证明】圆 OBC, OCA 和 OAB 的圆心 O_1, O_2, O_3 到点 O 的距离都为 r(图74). 这样一来,三角形 $O_1O_2O_3$ 的外接圆的圆心是点 O,半径为 r. 因此为了解答本题,只要证明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle O_1O_2O_3$ 全等就行了.

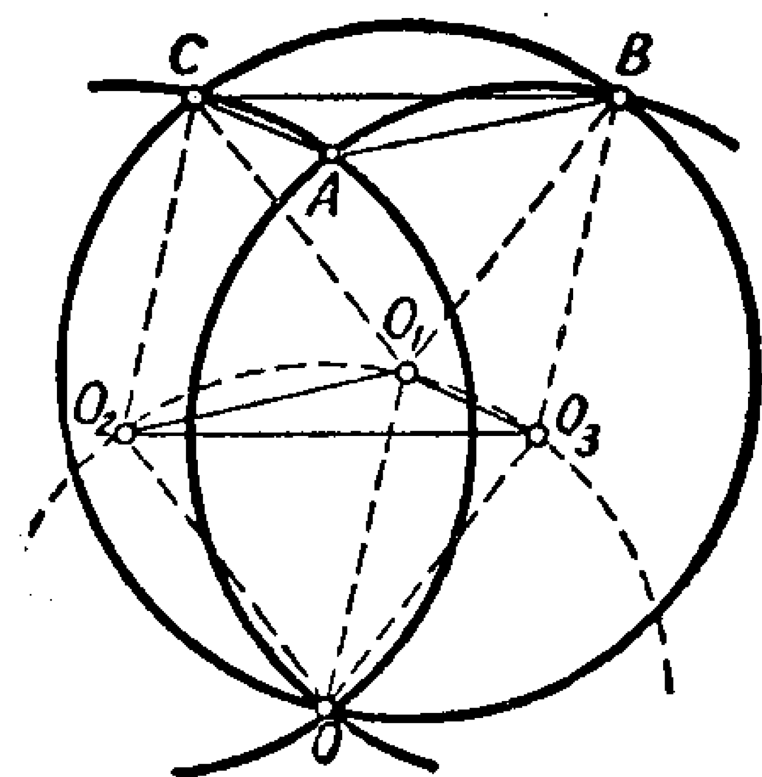


图 74

首先我们注意到, 两个四边形 BO_3OO_1 和 CO_2OO_1 都是菱形, 因为它们所有的边都等于 r.

由此推出, 线段 O_3B 和 O_2C 都平行且等于线段 OO_1, 所以 $O_3B \parallel O_2C$, 且 $O_3B = O_2C$. 于是, 四边形 BCO_2O_3 是平行四边形, 从而 $BC = O_2O_3$. 同理可证 $CA = O_3O_1$, $AB = O_1O_2$. 这样一来, $\triangle ABC$ 和 $\triangle O_1O_2O_3$ 全等, 这就是所要证明的.

80. 证明: 如果

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

$$S_n = 1 + \frac{1+q}{2} + \left(\frac{1+q}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1+q}{2}\right)^n,$$

那么

$$C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 s_1 + C_{n+1}^3 s_2 + \cdots + C_{n+1}^{n+1} s_n = 2^n S_n.$$

【证法1】只要证明所要证明的恒等式右边和左边 q^k ($k=0, 1, 2, \cdots, n$)的系数相等就行了, 即只要证明

$$C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2} + \cdots + C_{n+1}^{n+1} = 2^{n-k} C_k^k + 2^{n-k-1} C_{k-1}^k + \cdots + C_n^k. \qquad (1)$$

我们对 $n-k$ 用完全数学归纳法来证明关系式(1).

当 $n-k=0$ 时, 关系式(1)显然成立. 假设当第一项和最后一项(指 C_{n+1}^{k+1} 和 C_n^k ——中译者注)的下标和上标之差等于 $N-1$ 时, 关系式(1)成立. 我们来证明关系式(1)对于附标差 $n-k$ 等于 N 的时候也成立.

关系式(1)的左边可以变成下面的形式(见 § 5 的 4):

$$(C_n^k + C_n^{k+1}) + (C_n^{k+1} + C_n^{k+2}) + \cdots + (C_n^{n-1} + C_n^n) + C_n^n =$$

$$= C_n^k + 2\,(C_n^{k+1} + C_n^{k+2} + \cdots + C_n^n).$$

上式右边括弧里的二项式系数, 其下附标和上附标之差 $n-(k+1) = n-k-1 = N-1$. 因此, 如果对它应用归纳假设, 我们可以将关系式(1)的左边变为

$$C_n^k + 2\,(2^{n-k-1} C_k^k + 2^{n-k-2} C_{k-1}^k + \cdots + C_{n-1}^k).$$

但这个表达式正好就是关系式(1)的右边的表达式, 于是关系式(1)被证明了.

【证法2】我们先证明关系式

$$C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 s_1 + C_{n+1}^3 s_2 + \cdots + C_{n+1}^{n+1} s_n = 2^n S_n \qquad (*)$$

对于 $q=1$ 成立, 然后再证明它对于其它的 q 值成立.

1) 如果 $q=1$, 那么 $s_n = n+1$, $S_n = n+1$, 因而关系式(*)具有下面的形式

$$C_{n+1}^1 + 2C_{n+1}^2 + \cdots + (n+1) C_{n+1}^{n+1} = 2^n (n+1). \qquad (1)$$

利用可直接验证的二项式系数的恒等式

$$kC_{n+1}^k = (n+1) C_n^{k-1} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n+1)$$

(见 § 5 的公式(3)). 当把它用到关系式(1)的左边时, 我们得到

$$(n+1)(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n)=2^n(n+1)$$

(二项式系数的和在§25．3)中有计算).

2) 现在假设 $q\neq1$．将关系式(＊)的右边和左边分别乘以恒等式

$$1-q=2\left(1-\frac{1+q}{2}\right)$$

的右边和左边.

利用等比数列的求和公式，我们得到

$$(1-q)s_n=1-q^{n+1},\qquad \left(1-\frac{1+q}{2}\right)S_n=1-\left(\frac{1+q}{2}\right)^{n+1}.$$

这样一来，需要证明的关系式(*)变为

$$C_{n+1}^1(1-q)+C_{n+1}^2(1-q^2)+\cdots+C_{n+1}^{n+1}(1-q^{n+1})=$$

$$=2^{n+1}\left[1-\left(\frac{1+q}{2}\right)^{n+1}\right]=2^{n+1}-(1+q)^{n+1}.$$

这个关系式是成立的，因为根据牛顿二项式的性质（见§25）

$$C_{n+1}^0+C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\cdots+C_{n+1}^{n+1}=2^{n+1},$$

$$C_{n+1}^0+C_{n+1}^1q+C_{n+1}^2q^2+\cdots+C_{n+1}^{n+1}q^{n+1}=(1+q)^{n+1}.$$

于是，关系式(*)被证明了★.

§46. 关于恒等多项式

1) 如果利用下面的定理，我们可以省掉80题的证法 2 中研究 $q=1$ 的情况的那一部分：

如果两个次数不超过 n 的多项式，对于自变量多于 n 个的值，多项式的值相重合，那么它们对于自变量所有的值都重合，且在两个多项式中，自变量的同次幂的系数相等.

事实上，由这个定理可以断定：在80题的证法 2 的第一部分所研究的 $q=1$ 的情形可以由这个证明的第二部分推出．事实上，在恒等式(*)的右边和左边是 q 的多项式．在证明的第二部分证明了，它们对于所有 $q\neq1$ 的值相重合，即对大于多项式次数的那么多个 q 的值是重合的，这样一来，它们对所有 q 的值都重合，包括 $q=1$ 的情况在内.

如果利用在§17．3)中所说的定理，不难证明上面所说的定理．事实上，如果所研究的多项式的同次幂的系数不相等，那么左右两边之差是不超过 n 次的多项式，并且和问题的条件相反，它不可能对自变量的多于 n 个的值都取零值.

2) 在 1)中所叙述的定理可以建立代数方程的根与系数之间的关系（韦达定理）.

如果 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ 是方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\qquad(a_0\neq0)\qquad(1)$$

的根，那么

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\frac{a_1}{a_0},$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_2}{a_0},$$

一般地

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k+\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-1}\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{n-k+1}\alpha_{n-k+2}\cdots\alpha_n=$$

$$=(-1)^k\frac{a_k}{a_0}\quad(k=1,2,\cdots,n).\tag{2}$$

（在关系式的左边是方程（1）的所有可能的 k 个根的乘积之和）.

在§17. 2）中证明了，$f(x)$ 可以表示成形式

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

（根 α_i 不一定是不同的）. 去掉括号并且合并同类项，我们将得到 x^{n-k} 的系数等于关系式（2）的左边乘上 $(-1)^k a_0$，即多项式的系数 a_k. 这样一来，韦达定理（2）可由 1）中所说的关于恒等多项式的定理推出.

81. 证明：由正整数组成的等差数列的所有的项不可能都是素数.（除了蜕化的情形，即公差为零的等差数列，它所有的项都等于同一素数.）

【证明】 如果等差数列的公差 $d>0$，a_r 是它的通项，那么

$$a_{r+s}=a_r+sd.$$

根据本题的条件，数列的公差 d 是正整数，数列的第一项不小于 1，而所有其它的项都大于 1. 我们在这个数列中总可以找到 $a_r>1$（实际上除了第一项可能例外以外，其余的项都满足这个条件）.

当 $a_r>1$ 和 $s=a_r$ 时，

$$a_{r+s}=a_r+a_rd=a_r(1+d)$$

是一个复合数，这就是所要证明的.

十三、1924年—1926年试题及解答

82. 给定三个正数 a,b,c. 证明：如果对于任何正整数 n，都可以用 a^n,b^n,c^n 做边长作三角形，那么所有作出的三角形都是等腰三角形.

【证明】 假设 $a \geqslant b \geqslant c$. 那么仅仅当

$$a^n < b^n + c^n$$

时，数 a^n,b^n,c^n 才能成为三角形的边长. 或者把上面的不等式写作

$$a^n - b^n < c^n,$$

于是
$$(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) < c^n. \qquad (1)$$

因为数 a 和 b 都不小于 c，所以不等式(1)的左边的第二因式不小于 nc^{n-1}. 于是由不等式(1)推出

$$(a-b)nc^{n-1} < c^n,$$

它可以写成
$$(a-b) < \frac{c}{n}. \qquad (2)$$

上面的不等式要想对所有的正整数 n 都成立，只可能 $a=b$，这就是所要证明的.

83. 在平面上给定一点 O 和一条直线 e. 试求到定点 O 的距离 r 和到定直线 e 的距离 ρ 之和等于已知数 a 的点 P 的轨迹（数 r 和 ρ 是正数）.

【解】 要想使关系式 $r+\rho=a$ 成立，那么给定点 O 到给定直线 e 的距离不大于 a.

如果点 O 到直线 e 的距离等于 a，那么所求的点的轨迹是连接点 O 和由 O 作 e 的垂线的垂足之间的线段.

如果点 O 到直线 e 的距离小于 a，我们作和直线 e 平行且和 e 相距为 a 的直线 d_1 和 d_2（图75）. 在这种情况下，所求的轨迹由两个位于直线 d_1 和 d_2 所构成的带子内的抛物线的弧所组成.

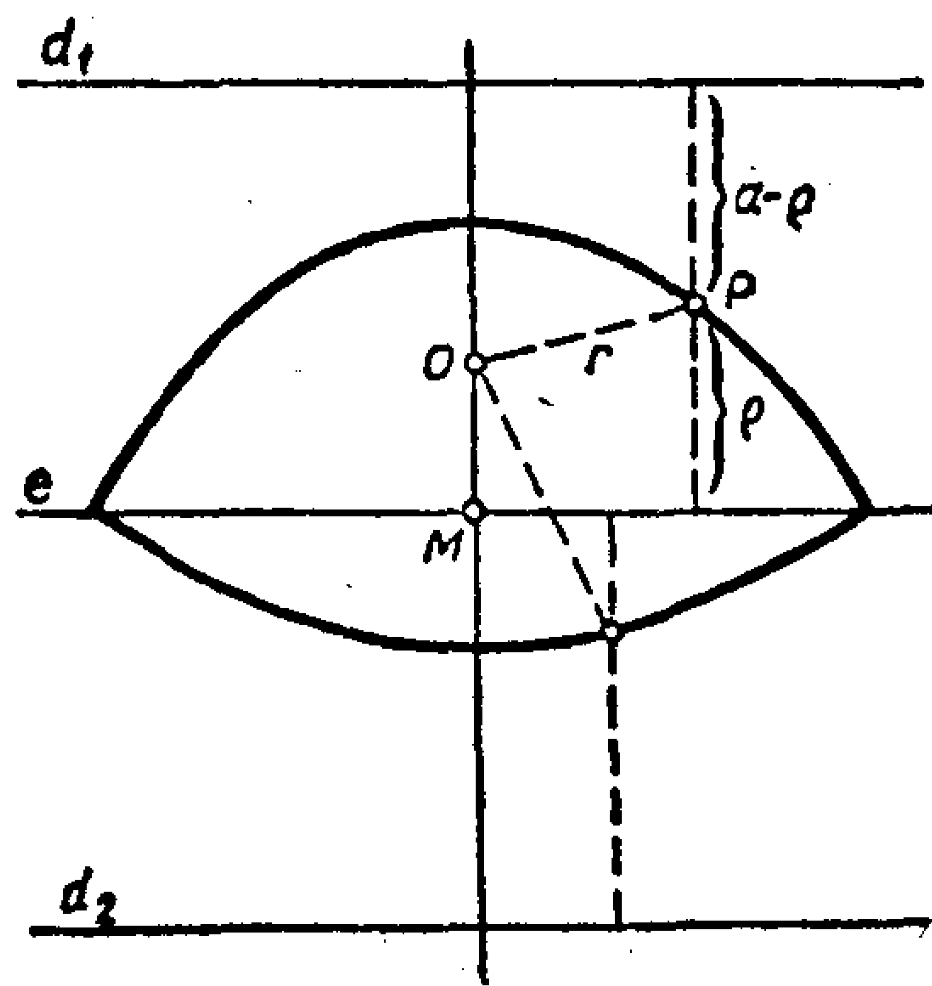


图 75

事实上，在直线 e 和 d_1 所构成的带子内，到点O 的距离为 r 并且到 d_1 的距离为 $a-\rho=r$ 的点满足本题的要求. 焦点 O 和准线 d_1 确定了位于直线 e 和 d_1 之间的带子内的抛物线的弧.

类似的，在直线 e 和 d_2 之间的带子内，以给定的点 O 为焦点，以 d_2 为准线的抛物线的弧上的点满足本题要求. 这个弧在直线 e 和 d_2 所构成的带子内.

两个抛物线弧的端点在直线 e 上.

§47. 关 于 抛 物 线❶

在83题的解答中所利用的抛物线的定义对于每一个钻研过解析几何的人来说都是知道的，但是在中学并不是很普及的，因此我们简单地提一下.

到给定的点（称之为抛物线的焦点）和给定的直线（称之为它的准线）等距离的点的轨迹叫做抛物线.

由焦点作准线的垂线，取它的中点作为坐标原点，x轴和准线平行，y轴通过焦点.这时准线的方程是 $y=-\frac{p}{2}$，焦点的坐标是 $(0, \frac{p}{2})$，其中 p 是焦点和准线之间的距离.

假设 $M(x, y)$ 是我们的曲线上的任意一点. 这时由定义有

$$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}=\left|y+\frac{p}{2}\right|,$$

由此得到

$$x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4}=y^2+py+\frac{p^2}{4}$$

和

$$y=\frac{x^2}{2p}.$$

我们得到了通常的抛物线的方程.

84. 在平面上给定三点 A, B, C. 求作三个圆 k_1, k_2, k_3，使圆 k_2 和 k_3 相切于点 A，圆 k_3 和 k_1 相切于点 B，圆 k_1 和 k_2 相切于点 C.

【解】假设 O_1, O_2, O_3 是满足本题条件的三个圆的圆心(图76). 由点 A, B, C 作这三个圆的切线，那么这些切线是彼此相切于这些点的三个圆的根轴★，因此相交于一点 O. 所有三个线段 OA, OB, OC 都相等，因为每一个线段的平方等于点 O 关于这三个圆中的某一个圆的幂★. 换句话说，过点 A, B, C 所作的圆的切线的交点 O 和 $\triangle ABC$ 的外接圆心相重合.

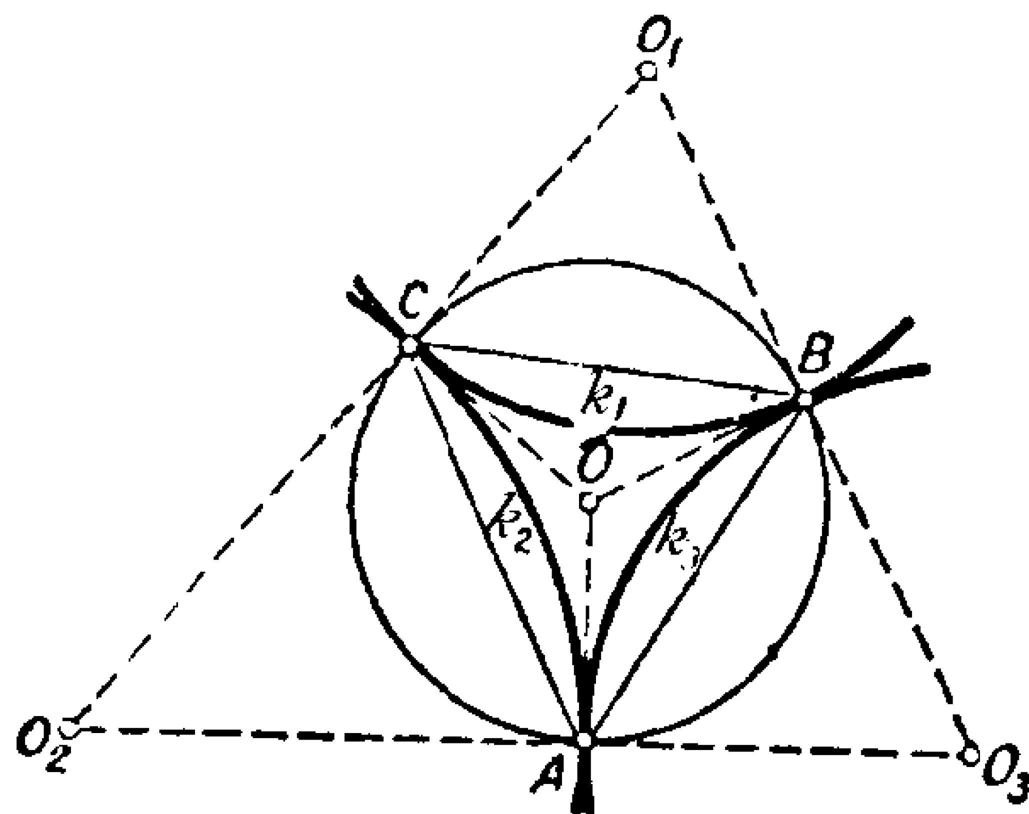


图 76

显然 $\triangle O_1O_2O_3$ 的边（或者可能是它们的延长线）通过点 A, B, C 并且和线段 OA, OB, OC 垂直.

这样一来，**只有**这样的圆才能满足本题的要求，这些圆的圆心 O_1, O_2, O_3, 我们可以这样得到：对于 $\triangle ABC$ 的外接圆，过点 A, B, C 作它的切线，这些切线的交点就是 O_1, O_2, O_3. 不难证明，用这种方法所作的圆实际上是满足本题要求的.

如果 $\triangle ABC$ 是**锐角三角形**，那么圆 k_1, k_2, k_3 彼此相外切（图76）.

如果 $\triangle ABC$ 是**钝角三角形**，那么两个圆彼此相外切，它们和第三个圆相内切(图77).

❶ 俄译编辑补加.

如果$\triangle ABC$是**直角三角形**，那么本题无解. 可以证明，在这种情况下，在三个圆中，有一个圆蜕化成一条直线，其余两个圆在这条直线的同一侧，且彼此相外切（图78）❶.

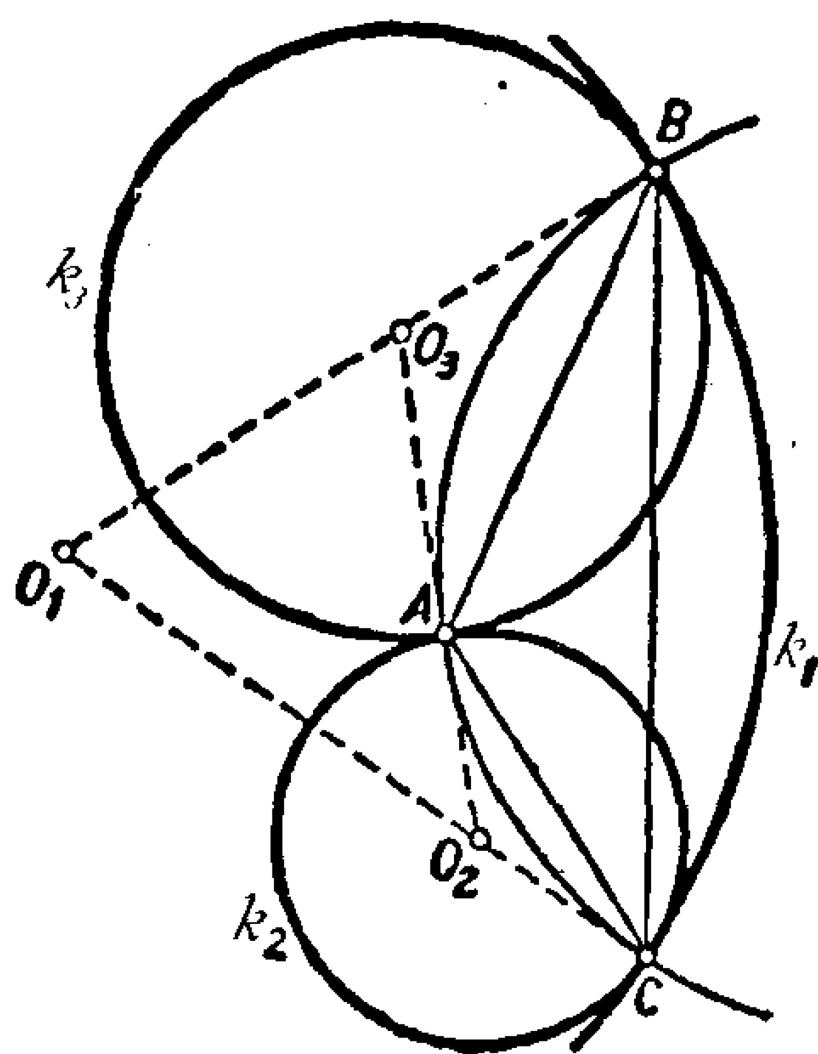


图 77

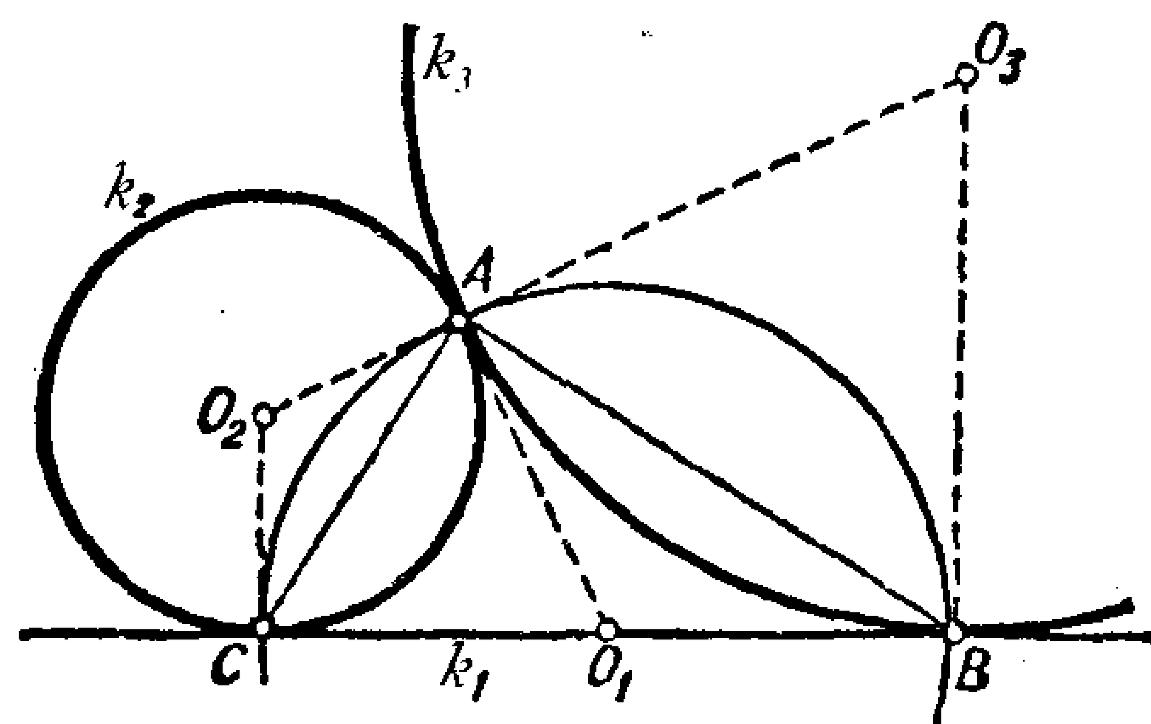


图 78

§48. 点关于圆的幂及两圆的根轴

我们知道，对于由点P向给定的圆所引的所有的割线来说，点P到和圆的两个交点的线段PM和PN的乘积是相同的. 这个与割线的方向无关的乘积叫做**点P关于圆k的幂**.

通常还对割线的线段PM和PN添加上符号. 指向同一方向的线段认为具有相同的符号. 指向相反方向的线段具有不同的符号. 如果点P在圆k外(图79,a)，那么割线的线段具有相同的符号，并且点P关于圆k的幂是**正的**. 反之，在圆k内的点P关于k的幂是负的(图79,b). 如果点P**在圆k上**，那么通过它所引的割线的线段，有一个缩成一点，因此这样的点关于圆k的**幂等于零**.

圆k外任意一点P关于k的幂等于P到k的**切线的平方**.

如果割线通过圆k的圆心C，那么由点P到和圆的交点的两个线段的长等于$d+r$和$d-r$，其中$d=PC$，而r是圆k的半径. 因此，点P关于圆k的幂等于

$$(d+r)(d-r)=d^2-r^2.$$

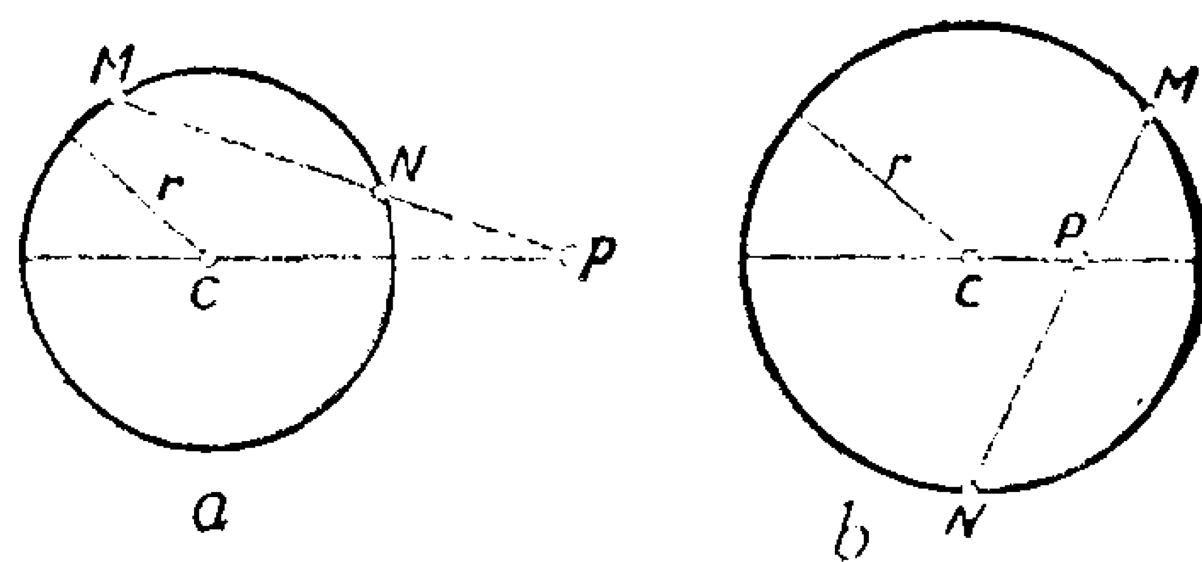


图 79

关于两个非同心圆等幂的点的轨迹是一条垂直于两圆连心线的直线. 这条直线叫做两圆的根轴.

设A和B是两圆的圆心，a和b是它们的半径，P是平面上任意一点，Q是P在线段AB上的投影(图80).

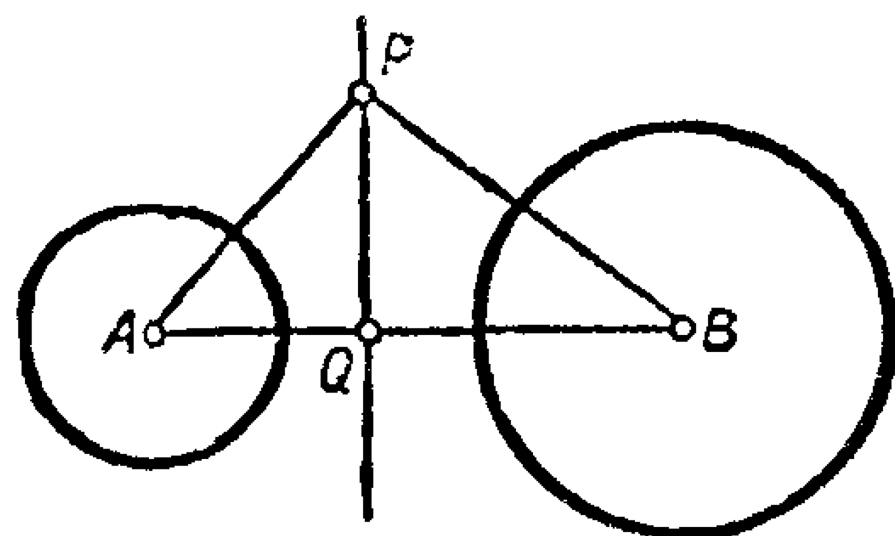


图 80

正象上面所证明的，点P关于圆的幂等于PA^2-a^2和PB^2-b^2. 因此，如果

$$PA^2-a^2=PB^2-b^2,$$

❶ "彼此相外切"还包括两圆与这条直线相切. ——中译者注.

那么点 P 属于两圆的根轴．根据勾股定理

$$b^2-a^2=PB^2-PA^2=(QB^2+PQ^2)-(AQ^2+PQ^2)=QB^2-AQ^2.$$

正象在57题的证法 1 中所证明的，差 QB^2-AQ^2 单值地确定点 Q 在线段 AB 上的位置．因此，关于两个给定圆具有幂 $PA^2-a^2=PB^2-b^2$ 的点的轨迹是一条垂直于它们的连心线 AB 且通过点 Q 的直线．

如果两圆相交，那么它们的根轴是连接交点的直线．

事实上，两个交点属于到两圆等幂的点的轨迹，因为它们关于每一个圆的幂都等于零．

如果两圆彼此相切，那么它们的根轴是通过切点的公切线， 因为在这种情况下，根轴通过圆的切点且垂直于它们的连心线．

三圆 k_1,k_2,k_3，两两所取的根轴，或者平行，或者交于一点，这取决于三个圆 k_1，k_2，k_3 的圆心在一直线上或不在一直线上．

事实上，如果圆心在一直线上，那么所有三条根轴都垂直于这条直线，因而是平行的．如果圆心不在一条直线上，那么所有三对圆的根轴是不平行的．圆 k_1,k_3 和 k_2,k_3 的根轴的交点对所有三个圆具有等幂，因此属于圆 k_1,k_2 的根轴．（圆 k_1,k_2,k_3 两两所取的根轴的交点叫做它们的**根心**．）

85．假设 a,b,c,d 是四个整数，证明：差

$$b-a,\ c-a,\ d-a,\ d-c,\ d-b,\ c-b$$

的乘积能被12整除．

【证明】 如果我们能证明，差

$$b-a,\ c-a,\ d-a,\ d-c,\ d-b,\ c-b$$

的乘积（为简单起见，用 P 表示它）能被 $4=2^2$ 和 3 整除，那么问题就解决了．事实上，如果在乘积 P 中，包含素数 2 的指数不小于 2，3 的指数不小于 1，那么（见§7 和§21—23），P 能被 $12=2^2\times3$ 整除．

1） 将所有的整数按它们被 4 除所得到的余数 0，1，2，3 来分成四类．如果在数 a,b,c,d 中有两个数属于同一类，那么它们的差能被 4 整除，从而数 P 能被 4 整除．如果数 a,b,c,d 之中，任何两个数都不属于同一类，那么在它们之中有两个偶数和两个奇数．两个偶数之差以及两个奇数之差都能被 2 整除，因此在这种情况下，P 也能被 4 整除．

2） 在任意四个整数 a,b,c,d 中，总可以找到这样两个数，它们被 3 除时有相同的余数（见§30．狄里希利原理）．它们的差能被 3 整除，从而乘积 P 也能被 3 整除．

86．数1000！的末尾有多少个零？

【解】 把数1000的阶乘，即数

$$1000!=1000\times999\times998\times\cdots\times3\times2\times1$$

分解成标准分解式，我们来确定在这个分解式中，包含 2 和 5 的指数是多少（见§7和§21、22、23）．在阶乘1000！的分解式中，数 2 和 5 的指数中较小的一个若为 k，则1000！在被 $10=2\times5$ 的乘幂除时，最多能被 10^k 整除．因此，数1000！的末尾有 k 个零．

在数 1，2，3，…，1000中，每第五个数能被 5 整除．由于

$$1000=5\times200+0,$$

所以在1和1000之间，恰好有200个数能被5整除. 在这200个数中，每第五个数至少能被5^2整除. 因为

$$200=5\times40+0,$$

所以在200个能被5整除的数中，有40个能被5^2整除.

继续用5除，我们得到

$$40=5\times8+0,$$
$$8=5\times1+3,$$
$$1=5\times0+1.$$

因此，在整数1到1000之内，有8个数能被5^3整除，有1个数能被5^4整除，而没有任何一个数能被5的五次幂或更高次幂整除.

这样一来，在数1000!的标准分解式中，5的指数等于

$$200+40+8+1=249.$$

在数1000!的标准分解式中，2的指数必定更大，因为每第二个数就能被2整除，仅仅在1到1000之内的偶数就有500个. 因此数1000!的末尾有249个零★.

§49. 关于将阶乘分解为乘积因子时素数的最大乘幂

在86题中，我们从数$m=1000$和$p=5$入手得到下面一串等式:

$$\begin{aligned} m &= pq_1+r_1 \quad (0\leqslant r_1<p), \\ q_1 &= pq_2+r_2 \quad (0\leqslant r_2<p), \\ q_2 &= pq_3+r_3 \quad (0\leqslant r_3<p), \\ &\cdots\cdots \\ q_{k-1} &= p\cdot 0+r_k \quad (0\leqslant r_k<p), \end{aligned} \tag{1}$$

它在q_{k-1}中断了，后面的$q_k=0$. 我们来确定：将$m!$分解成素数的乘积时,素数p在分解式中的指数

$$\alpha=q_1+q_2+\cdots+q_{k-1}. \tag{2}$$

由所作的解答看出，同样的论证对于任意的自然数m和任意的素数p仍然是有效的.

如果我们在以p为基数的记数系统中来写数m，那么$m, q_1, q_2, \cdots, q_{k-1}$被$p$除所得到的余数$r_1, r_2, \cdots\cdots, r_k$将是$p$进制的"数字". 这意味着当从关系式(1)逐次消去$q_1, q_2, \cdots\cdots, q_{k-1}$时，我们可以将数$m$表示成形式

$$m=p(pq_2+r_2)+r_1=\cdots=p^{k-1}r_k+p^{k-2}r_{k-1}+\cdots+pr_2+r_1.$$

设
$$s=r_1+r_2+\cdots+r_k. \tag{3}$$

将关系式(1)加起来并利用关系式(2)和(3),我们得到

$$m+\alpha=p\alpha+s,$$

其中α是在阶乘$m!$的标准分解式中所遇到的素数p的最大指数. 这样一来，我们证明了下面的勒让德定理:

设m是任意的自然数，p是任一素数. 在数$m!$的标准分解式中,包含p的乘幂的指数等于

$$\frac{m-s}{p-1},$$

其中量 s 表示将数 m 在以 p 为基数的记数系统中写出来时所得到的数字之和.

87. 证明：直角三角形的内切圆半径 r 小于任一直角边的一半和斜边的四分之一.

【证明】由直角顶点 C 作斜边 AB 的高，其垂足为 D. E,F,G 是内切圆和直角边 $a=BC$, $b=CA$ 以及斜边 $c=AB$ 的切点. 由这些切点作内切圆的直径，其另一个端点分别为 E', F', G'（图81）.

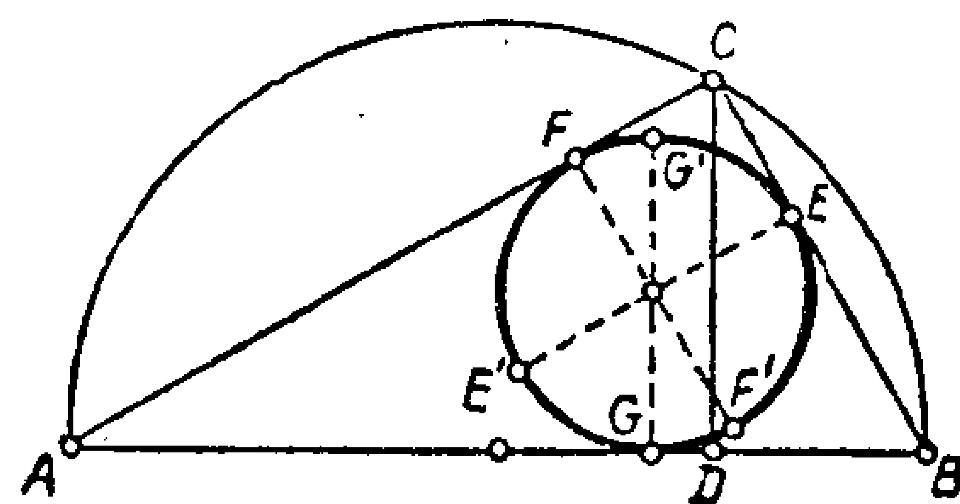


图 81

在任一三角形内或它周界上的点之中，到三角形一边的距离最大的点是这个边所对的三角形的顶点❶. 因此

$$E'E<AC, \quad F'F<BC \qquad (1)$$

和

$$G'G<CD.$$

因为 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径不会小于它的任何一个弦的一半，于是 $CD\leqslant\frac{1}{2}AB$. 故有

$$G'G<\frac{1}{2}AB. \qquad (2)$$

不等式(1)和(2)可以写成

$$2r<b, \quad 2r<a, \quad 2r<\frac{1}{2}c.$$

因此，内切圆半径小于线段

$$\frac{1}{2}a, \quad \frac{1}{2}b, \quad \frac{1}{4}c$$

中的每一个，这就是所要证明的.

88. 证明：对任意的整数 a 和 b，方程组

$$\begin{cases} x+y+2z+2t=a, \\ 2x-2y+z-t=b \end{cases}$$

有整数解.

【证法 1】 1) 首先我们证明，如果 $a=1$，$b=0$，那么方程组

$$(1)\quad \begin{cases} x+y+2z+2t=1, \\ 2x-2y+z-t=0 \end{cases}$$

至少有一组整数解.

---

❶ 设 P 是 $\triangle ABC$ 内或边界上的任一点（图82）. 如果点 P 不和 A 重合，那么 $\triangle PBC$ 包含在 $\triangle ABC$ 之中，于是 $\triangle PBC$ 的面积小于 $\triangle ABC$ 的面积，所以 $PQ<AD$，其中 PQ 是点 P 到 BC 的距离，AD 是点 A 到 BC 的距离. ——中译者注.

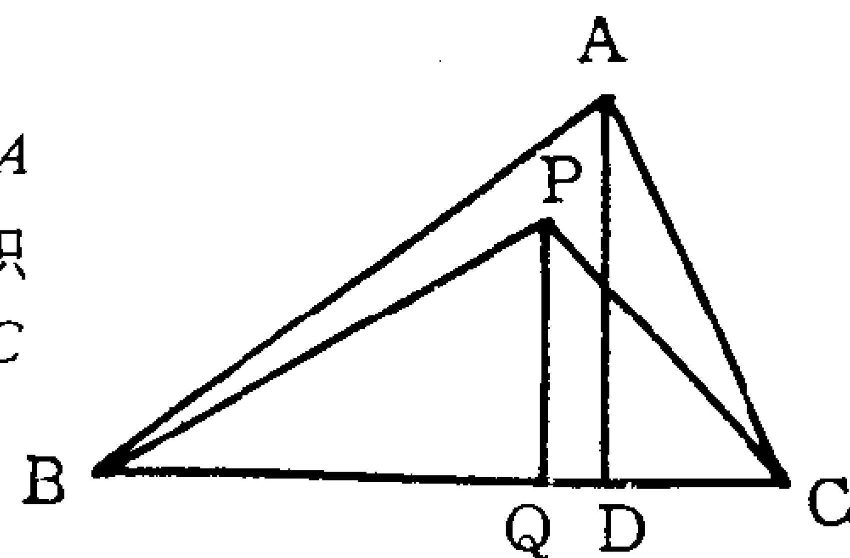


图 82

由第一个方程推出，如果方程组(1)有整数解的话，那么$x+y$一定是奇数.令$x=1$，$y=0$，那么方程组(1)可有整数解：

$$x=1,\quad y=0,\quad z=-1,\quad t=1.$$

2) 如果$a=0$，$b=1$，那么方程组

$$(2)\quad\begin{cases}x+y+2z+2t=0,\\2x-2y+z-t=1\end{cases}$$

也至少有一组整数解，只要注意到这时$z-t$是奇数就行了. 方程组(2)的一组解是

$$x=-1,\quad y=-1,\quad z=1,\quad t=0.$$

3) 如果x_1，y_1，z_1，t_1是方程组(1)的任一组解，x_2，y_2，z_2，t_2是方程组(2)的任一组解，那么数

$$x=ax_1+bx_2,$$
$$y=ay_1+by_2,$$
$$z=az_1+bz_2,$$
$$t=at_1+bt_2$$

满足原来的方程组

$$(3)\quad\begin{cases}x+y+2z+2t=a,\\2x-2y+z-t=b.\end{cases}$$

当把上面所得到的方程组(1)和(2)的特解取作x_1，y_1，z_1，t_1和x_2，y_2，z_2，t_2时，我们便得到原方程组的解

$$x=a-b,\quad y=-b,\quad z=-a+b,\quad t=a.$$

因为a和b是整数，所以对于任意的整数a和b，方程组(3)至少有一组整数解，这就是所要证明的.

【证法 2】 将本题条件中给出的方程组对x和z解出，我们得到：

$$x=\frac{1}{3}(-a+2b+5y+4t)=b+2y+t-\frac{1}{3}(a+b+y-t),$$

$$z=\frac{1}{3}(2a-b-4y-5t)=a-y-2t-\frac{1}{3}(a+b+y-t).$$

如果这样选取y和t，使得数

$$\frac{1}{3}(a+b+y-t)=u$$

是整数，那么x和z也将是整数.

假设t和u是任意整数，把它们代到最后一个关系式并对y解出，我们得到

$$y=-a-b+t+3u.$$

如果y和t象我们所指出的那样来选取，那么x和z也是整数. 因此原方程组对任何整数a和b都有整数解. 假若$t=a$，$u=0$，我们便得到前面研究过的特解. ★

§50. 关于马遍历无穷象棋盘的格子的问题

第88题的断言可以叙述为：**在无穷的象棋盘上，马可以从任一格跳到其它任何一格.**

无穷的象棋盘和通常的象棋盘（大小为8×8格）不同的是：无穷的象棋盘包含有无穷

多个充满整个平面的格子．在今后的讨论中，用格子中心来代替格子进行研究是方便的．我们取任意一个方格的中心作为直角坐标系的原点，取坐标轴和方格的水平边以及竖直边平行（图83）．如果把任意一个方格的边长取作长度单位，那么无穷象棋盘的格子的中心构成平面上的整点阵——具有整数坐标的点的集合．我们可以用数对——在走一步的前后，马所在的方格的中心的坐标——的办法来描写马走的一步（或者若干步）．例如，在图83中，马的 8 种可能的走法对应于下面的数对：

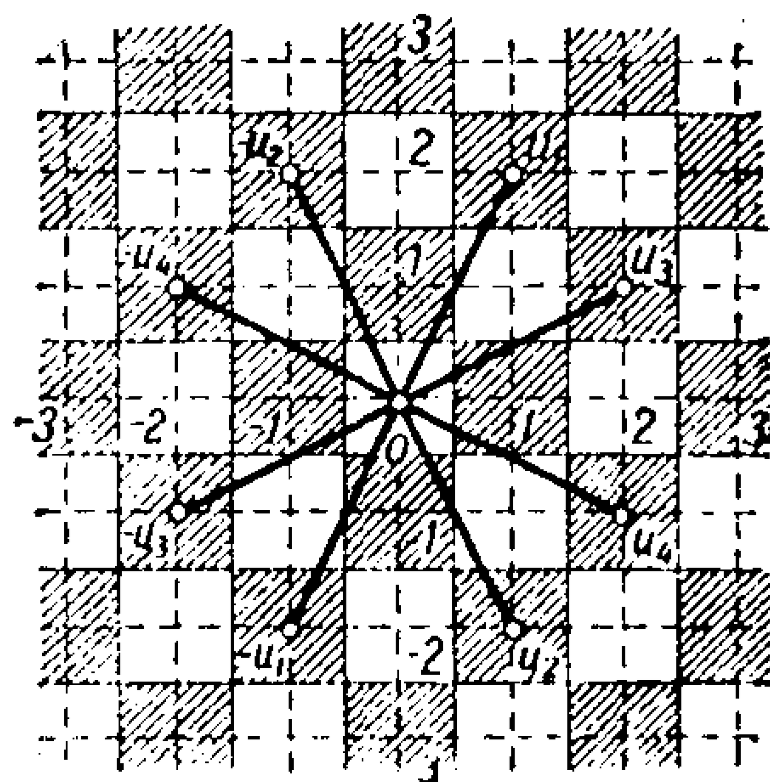


图 83

$$u_1=(1,2),\qquad u_2=(1,-2),$$
$$u_3=(2,1),\qquad u_4=(2,-1),$$
$$-u_1=(-1,-2),\qquad -u_2=(-1,2),$$
$$-u_3=(-2,-1),\qquad -u_4=(-2,1).$$

上面写的“正负”两种走法是相反的，即其中一种走法的作用和另一种走法的作用相抵消．例如，接连走 7 步 u_1，然后走 5 步 $-u_1$，这时马所在的格子就是它走 2 步 u_1后所在的格子．如果马重复走了 8 步 u_1之后再走12步相反的 $-u_1$，那么所得到的结果相当于马只走 4 步 $-u_1$．如果马从坐标原点出发，走了 x 步 u_1，那么在走完第 x 步以后，它所在的方格的坐标是 $(x, 2x)$．

于是，走 x 步 u_1使马从坐标原点走到格子 $(x, 2x)$，走 y 步 u_2便走到了格子$(y, -2y)$，走 z 步 u_3到格子$(2z, z)$，走 t 步 u_4到格子$(2t, -t)$．逐次地一个接一个地走完这些步以后，马从坐标原点走到中心坐标为

$$(x-y+2z+2t,\qquad 2x-2y+z-t) \tag{1}$$

的格子．

因为横坐标 $x+y+2z+2t$和纵坐标 $2x-2y+z-t$具有予先给定的值 a和 b，所以步数 x，y，z，t必须这样选取，使它们满足88题解答中的方程组（3）．

这样一来，在题目解答中所证明的断言——对任意的整数 a和 b，方程组（3）都有整数解——可作另外的解释：在无穷的象棋盘上，马可以从任何一个方格走到其它任何一个方格．

这后一个断言可以直接证明，用不着引进坐标和解方程．

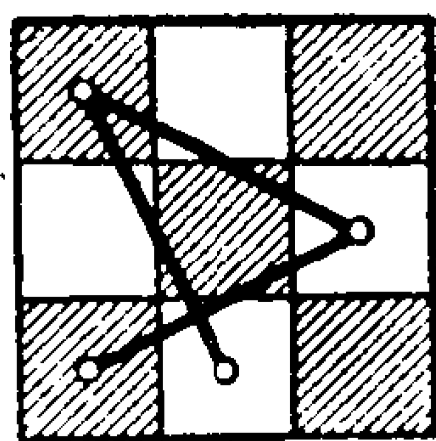


图 84

正像图84所表明的，马走 3 步可以从任何一格走到右边相邻的格子．如果反过来走，走 3 步以后，马走到左边一格．不难指出一种走法，使马走到上边或下边的一格．

为了走到任何一个格子，我们只需把走的路径分解成一系列横的走一格和竖的走一格这些基本走法就行了．这样一来，在无穷的象棋盘上，马确实可以从任何一格走到其它任何一格．

89．证明：四个连续的自然数的乘积不能表示成整数平方的形式．

【证明】四个连续的自然数 n，$n+1$，$n+2$，$n+3$的乘积可以用下面的方式来表示

$$[n(n+1)(n+2)(n+3)]=(n^2+3n)(n^2+3n+2)=$$
$$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)=(n^2+3n+1)^2-1.$$

因此，所要研究的乘积包含在两个连续整数

$$n^2+3n \quad 和 \quad n^2+3n+1$$

的平方之间，因此它不可能表示成整数平方的形式．

90．当某一个小圆沿着半径比它大一倍的圆的里面无滑动地滚动时，小圆上的任一点描画出什么样的曲线?

【解】在小圆 k' 上任取一点 M，我们来研究小圆滚动时点 M 所走的路线．我们从小圆 k' 的这样一个位置 k'_0 开始，这时点 M 在不动的外圆 k 上（图85）．点 M 的初始位置记作 A．

我们首先来研究，当 k' 沿着不动的圆 k 滚动，走完大圆周长的四分之一，即由 A 到 A_1 时，将会发生什么情况．

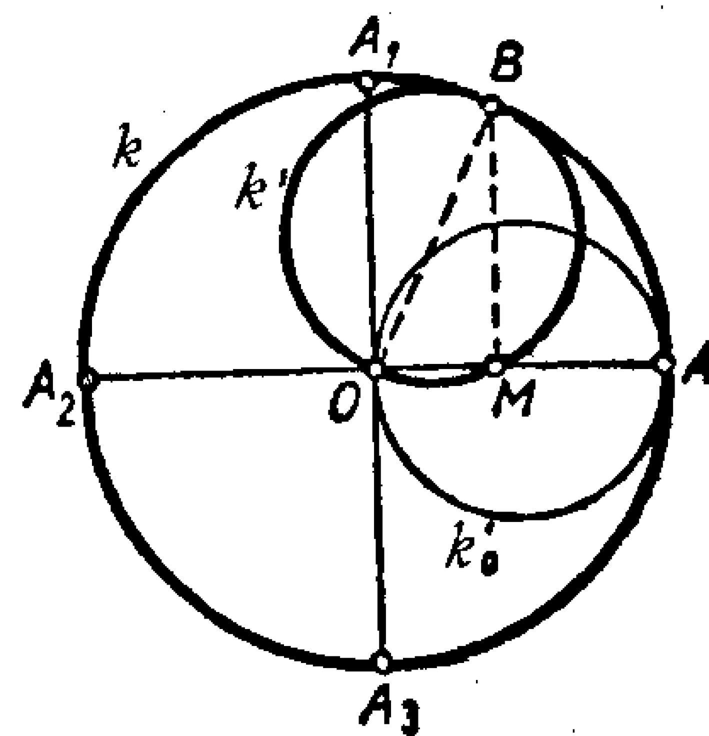


图 85

圆 k' 总是和不动的圆 k 相切的．假设 B 是切点．过点 B 引圆 k' 的直径，则另一个端点和圆 k 的圆心 O 重合．

因为圆 k' 沿着 k 无滑动地滚动，所以圆 k' 的弧 BM 总是和圆 k 的弧 AB 相等．弧 AB 和 BM 所对的圆心角和半径成反比．因此，圆 k 的弧 AB 所对的圆心角比圆 k' 的弧 BM 所对的圆心角小一半．换句话说，**圆周角** BOM 等于圆心角 BOA．这样一来，点 M 在圆 k 的半径 OA 上．

不仅如此，角 OMB 作为圆 k' 的直径 OB 所对的圆周角必定是直角．**因此，由点 B 作半径 OA 的垂线，则点 M 和这个垂线的垂足重合**．

于是，当圆 k' 通过圆 k 的四分之一弧 AA_1 时，点 M 从 A 到 O 地画出圆 k 的半径 OA．

然后，当圆 k' 沿着不动的圆 k 滚动通过弧 A_1A_2 时，运动的情况和上面所研究过的情况关于直线 OA_1 是镜像对称的．因此，点 M 这时画出圆 k 的半径 OA_2．

当圆 k' 沿着圆 k 的下半部分（弧 A_2A_3A）滚动时，点 M 以相反的方向（从 A_2 到 A）通过直径 AA_2．

如果运动继续下去，那么已经到达圆 k 的直径 AA_2 的端点 A 的点 M 又开始向点 A_2 移动．

十四、1927年—1933年试题及解答

91．假设a，b，c，d是整数，且与数

$$m=ad-bc$$

互素．证明：对$ax+by$能被m整除的整数x和y，$cx+dy$也能被m整除．

【**证法1**】假设x和y是使$ax+by=mk$的整数，其中k为任意整数．因为$m=ad-bc$，所以

$$ax+by=k(ad-bc),$$

由此推出

$$a(x-kd)=-b(y+kc). \qquad (1)$$

如果数a和b有公约数$l>1$，那么数$m=ad-bc$也能被l整除，于是m和a与b不是互素的，这与本题条件相违．因此a和b是互素的．

由关系式（1）推出，数b和$y+kc$的乘积能被a整除．因为因子b和数a互素，所以第二个因子$y+kc$应该能被a整除（见§21—23）．于是

$$y+kc=la,$$

其中l是某一个整数．

将$y+kc=la$代入到关系式（1），我们得到

$$x-kd=-lb,$$

因此

$$x=kd-lb, \quad y=-kc+la. \qquad (2)$$

而这时

$$cx+dy=l(ad-bc)=lm,$$

即$cx+dy$能被m整除．

因此，对于$ax+by$能被m整除的那些整数值x和y来说，$cx+dy$也能被m整除．

反过来也是对的：对于$cx+dy$能被m整除的那些整数值x和y来说，$ax+by$也能被m整除．

【**证法2**】为了简单起见，我们引入下面的记号：

$$u=ax+by, \quad v=cx+dy.$$

这时

$$du-bv=mx,$$

即

$$bv=du-mx. \qquad (1)$$

如果x，y是使u能被m整除的那些整数，那么由关系式（1）推出，bv也能被m整除．因为b和m互素，所以v应当能被m整除．

类似地可以证明逆命题：如果v能被m整除，那么u也能被m整除．

一个特殊的情况是，$m=17$，

$$u=2x+3y, \quad v=9x+5y,$$

这在第1题的证法2中研究过．

92．在十进制中，由数字1，2，3，4，5组成四位数，且在每一个四位数中，这些数

字中的每一个出现的次数不多于1次．所有这些四位数的和等于多少？

【解】根据本题条件，数字1、2、3、4、5中的每一个在每一位（例如，在十位）出现的次数等于将其余四个数字分配到其余三位上去的方法的个数．不难算出，这种方法的个数等于$4\times3\times2=24$.

因此，对于满足本题条件的所有的四位数来说，位于四个数位的每一位的数字之和等于

$$24(1+2+3+4+5)=24\times15=360,$$

于是四位数本身的和等于

$$360(10^3+10^2+10+1)=360\times1111=399960.$$

93．在和$\triangle ABC$的边相切的四个圆（一个内切，三个傍切）中，我们研究和边AB相切的两个圆（两个切点在顶点A和B之间）．证明：这两个圆的半径的几何平均值不超过边AB的长的一半．

【证法1】我们在20题证明了，不等式

$$rr_c\leqslant\frac{c^2}{4}$$

是20题有解的**必要**条件．这正好就是93题的结论．

在20题还证明了条件的**充分性**.

【证法2】假设c是$\triangle ABC$的边AB的长，r是内切圆半径，r_c是和边AB以及$\triangle ABC$的其它两边的延长线相切的傍切圆的半径．S是$\triangle ABC$的面积，p是它的半周长．

我们利用§8中的关系式（4）和（7）：

$$S=rp=r_c(p-c).$$

这时

$$r=\frac{S}{p},\qquad r_c=\frac{S}{p-c}$$

且

$$rr_c=\frac{S^2}{p(p-c)}=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-c)}=(p-a)(p-b),$$

因此

$$\sqrt{rr_c}=\sqrt{(p-a)(p-b)}.$$

因为两个正数的几何平均值总不会超过它们的算术平均值（见§42），所以

$$\sqrt{rr_c}=\sqrt{(p-a)(p-b)}\leqslant\frac{(p-a)+(p-b)}{2}=\frac{c}{2},$$

这就是所要证明的．

【证法3】由图21（见20题的解答）显然有，线段OO'对点A和B所张的角是直角（因为AO和AO'是两个相邻且互补的角的平分线，所以A和B在对线段OO'所张的角为直角的点的轨迹上，即在以OO'为直径的圆上）．而点A和B不在直线OO'上，因此我们可以有下面的断言：

$\triangle ABC$的顶点A，B和内切圆心O以及和边AB及其它两边的延长线相切的傍切圆的圆心O'在一个圆上（而且在这个圆上，点O和O'把点A和B隔开）．

这样一来，本题的断言是下面更一般的断言的特殊情况（图86）．

如果四个点A,B,C,D在一个圆上，并且点A和B把点C和D隔开，那么从点C和D到弦AB的垂线长的几何平均值不大于弦AB的一半.

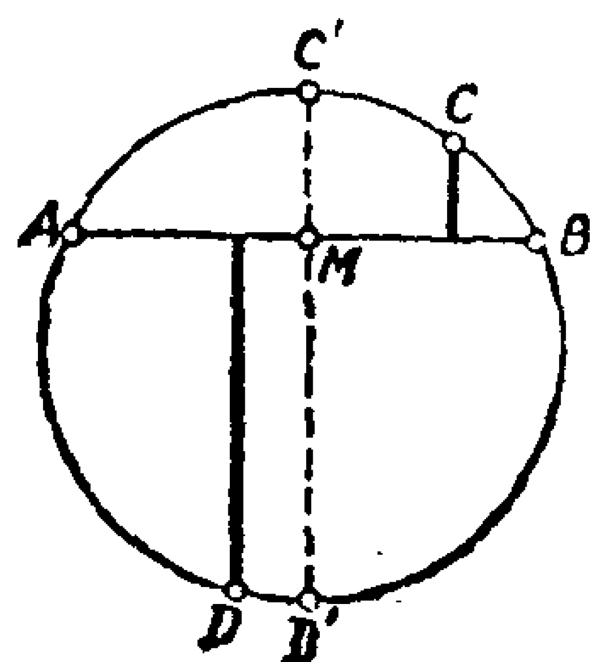


图 86

作直径$C'D'\perp AB$，与AB相交于M. 于是点C到AB的垂线长不大于$C'M$，点D到AB的垂线长不大于$D'M$. 但是线段$C'M$和$D'M$的几何平均值等于线段AB的一半.

94. 假设a是任意的正数. 我们研究a的$(n-1)$个连续倍数：$a, 2a, 3a, \cdots, (n-1)a$. 证明：在这个序列中，至少可以找到这样的一个数，它和与它最相近的整数之差不超过$\frac{1}{n}$.

【证明】粗略地说，94题的断言的实质是：在数a的倍数之中，有许多数几乎是整数. 实际上，本题的条件包含了比较精确的断言，因为它解释了应该怎样来理解“几乎是整数”的数.

在图87中，表明了对$n=12$的情形. 从圆上的点O开始，沿着反时针方向标出长为$a, 2a, \cdots, 11a$的弧（圆的周长取作长度单位）. 对于我们来说，把数不放在直线上而放在圆上是方便的，因为我们感兴趣的仅仅是数的小数部分. 例如，我们对于数$e=2.718\cdots$和$0.718\cdots$是不加区别的，从我们的观点来看，它们是相等的. 通过所标出的弧的端点，我们画一个径向的小线条，并指出它们所对应的数$0, a, 2a, \cdots$.

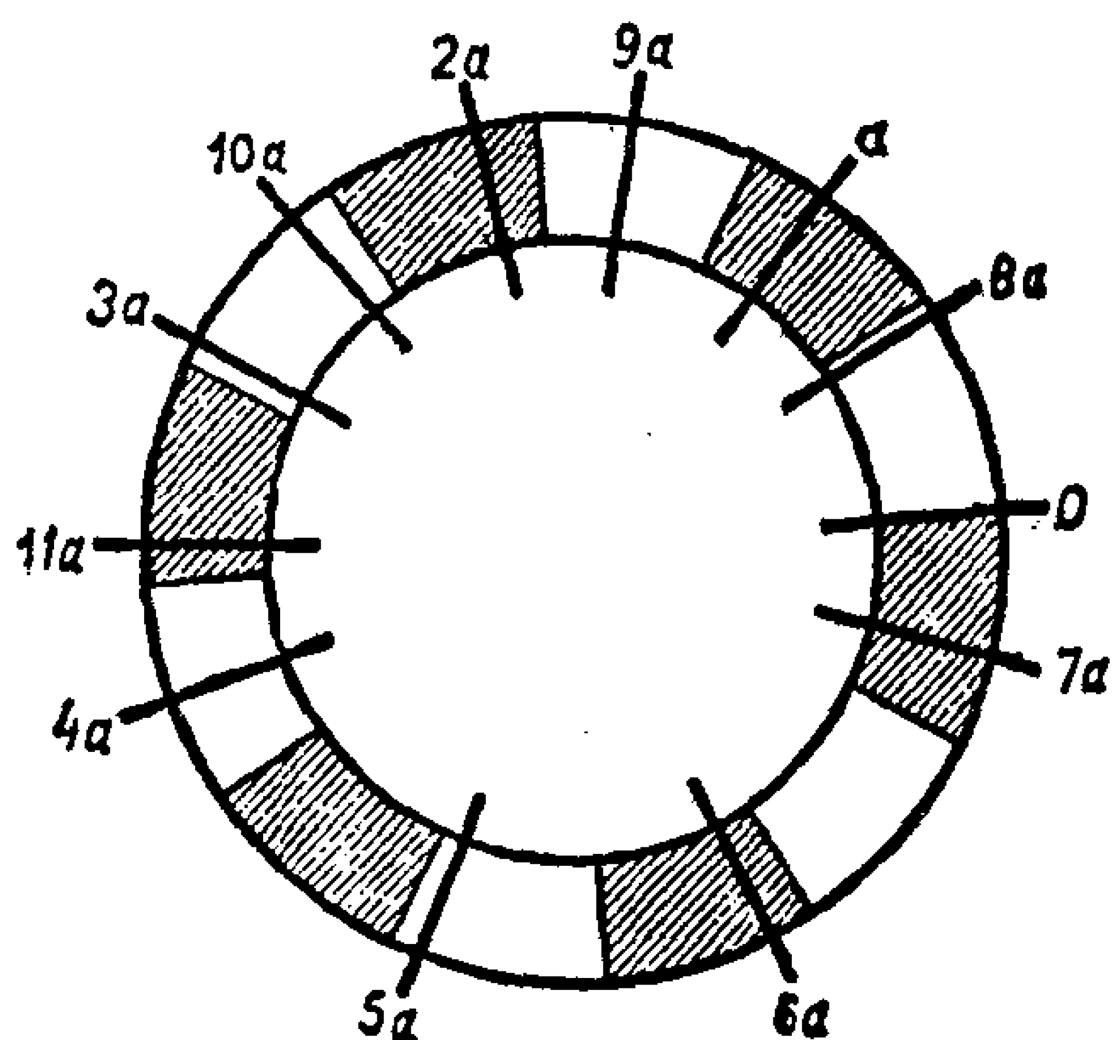


图 87

除此之外，从点O开始，把圆周分成n等分. 从一部分到另一部分的分点，我们规定它仅仅属于以它为“终点”的那一部分（换句话说，当把圆周分成n等分时，所得到的弧是半开的）. 这时，任何一个“边界点”都不能同时属于两部分.

可能出现这样的情况，在n段弧的每一段弧中出现一根小线条. 这时，和点O最接近的长为$\frac{1}{n}$的弧上的小线条所对应的数满足本题条件.

如果在某一个弧中没有任何一根小线条，那么根据狄里希利原理，在其余$n-1$个弧中，至少在一个弧上有多于一个的小线条（因为小线条的总数等于n）.（例如，在图87中，对应于数$3a$和$10a$的小线条落在同一个弧上）. 这样一来，这两根小线条之间的距离小于$\frac{1}{n}$. 但是两根小线条之间的距离（沿着圆周按反时针方向算）仅仅和它们的“标号”之差有关. 因此，点O和对应于数$10a-3a=7a$的小线条之间的距离也小于$\frac{1}{n}=\frac{1}{12}$. 这就是说，数$7a$和与它最接近的整数之差（按绝对值）小于$\frac{1}{n}=\frac{1}{12}$，这正是本题的断言.

[上面所作的论证完全可以用到一般的情形中去，只需将数$11a, 3a, 10a, 7a$换成$(n-1)a$，ia，ka和$(k-i)a$.]

95．试将前n个自然数写在一个圆周上，使得任何两个相邻的数之差不超过2．再证明：这种写法仅只有一种办法，而且为此只要注意到与每一个数最相近的数就足够了．

【解】在1的两边只能放数2和3（图88和图89）．在数2的另一边，除了4以外，不

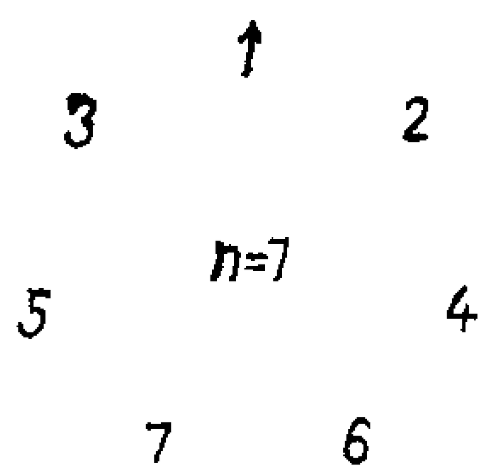


图 88

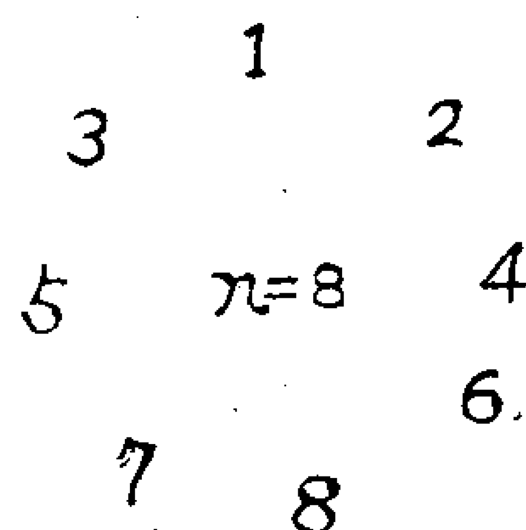


图 89

能放任何其它的数，在数3的另一边，仅仅只能放数5，等等．因此，在1的一边只能放偶数2，4，…，而在另一边只能放奇数3，5，…．这两个等差数列一直到遇见数$n-2$和$n-1$中的一个数时为止．在这两个数之间再放上数n．仅仅只有把n个数在圆周上这样排列才能满足本题要求，而且这样的排列确实满足本题的要求．

96．在平面上给定一条直线和两个点A和B．应该在这直线上怎样选取点P，才能使

$$max(AP,\ BP)$$

有最小值？（如果线段AP和BP的长度不一样，那么$max(AP,\ BP)$表示线段中较长的线段．如果$AP=BP$，那么$max(AP,\ BP)$等于两个线段中任何一个线段的长度．）

【解】在两个给定的点中，用A表示那样的点，它到直线e的距离不比另一个点B到直线e的距离近．由点A作直线e的垂线，垂足为A_1（图90）．

1）如果$AA_1 \geqslant A_1B$，那么A_1就是要求的点．事实上，如果直线e上的点P和A_1重合，那么$max(AP,\ BP)=AA_1$．对于直线e上的任何其它的点P，$max(AP,\ BP)>AA_1$，因为这个点到点A的距离大于点A_1到点A的距离．

2）如果$AA_1<A_1B$，那么作线段AB的中垂线f，并且由点B作直线e的垂线BB_1，垂足为B_1（图91）．

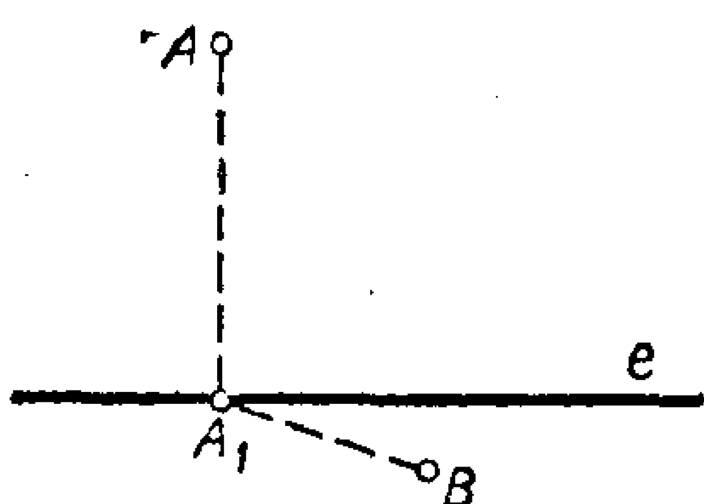


图 90

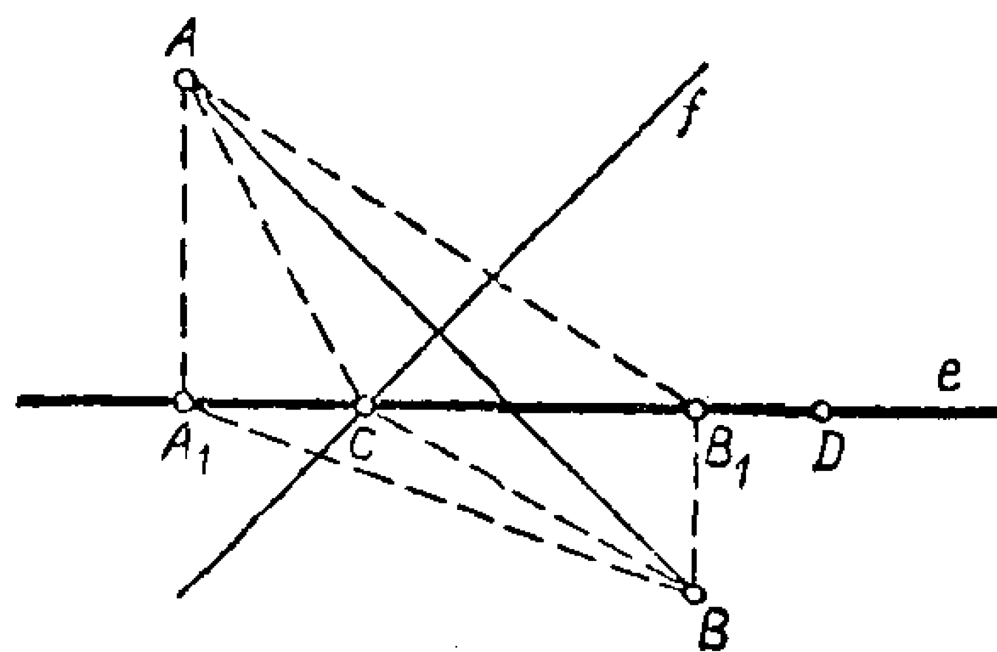


图 91

如果某一点到点A的距离比到点B的距离小，那么它应该属于以直线f为边界且包含点A的半平面．同样的，如果某一点到点B的距离比到点A的距离小，那么它应该属于以直线f为边界且包含点B的半平面．由于$AA_1<A_1B$，$BB_1 \leqslant AA_1<AB_1$，所以点A_1和B_1分别

属于直线f所分成的不同的半平面. 因此线段A_1B_1和直线f相交于某一点C.

我们来证明：点C是在这种情况下所要求的点. 在这个点，$max(AC,BC)=AC=BC$，而对于直线e上任何其它的点P，$max(AP, BP)>max(AC, BC)$. 事实上，如果代替点C，在直线e上任取一个点D，并且D和B_1在C的同一侧. 于是$AD>AC$，因为$\triangle ACD$是钝角三角形，AD是它最大的边. 因此，$max(AD, BD)>max(AC, BC)$. 若点D_1在点C把直线e分划成的另一个半直线上，类似的断言也是成立的.

97. 一元人民币可以用多少种办法兑换开？❶

【解】解答本题原则上不会有什么困难，只需列举出兑换一元人民币时所有可能的情况，再算出总共有多少种办法. 为了便于计算各种不同的办法，分成组是比较方便的. 在所有的兑换办法中，我们把其中1分的和2分的加起来的总钱数相同的算作一组.

如果一元人民币都兑换成1分的和2分的，这是可以办得到的. 只要取0，1，2，…，50个2分的，其余的都兑换成1分的就行了. 这种兑换的办法有51种；

如果1分的和2分的加起来有0.95元，这总共有48种兑换办法. 剩下的0.05元可以"兑换"成1个5分的. 这种兑换办法有48种；

如果1分的和2分的加起来有0.90元，这总共有46种兑换办法. 剩下的0.10元可以兑换成2个5分的或1个1角的. 因为0.90元的兑换办法与0.10元的兑换办法是无关的. 所以，在这一组中，兑换的办法共有46×2种；

如果1分的和2分的加起来有0.85元，这总共有43种兑换办法. 剩下的0.15元可以兑换成3个5分的或1个5分的加上1个1角的. 所以，在这一组中，兑换的办法共有43×2种；

如果1分的和2分的加起来有0.80元，这总共有41种兑换的办法. 剩下的0.20元可以这样兑换：4个5分的（1种），2个5分的（1种），0个5分的（2种），于是剩下的0.20元有4种兑换办法. 所以，在这一组中，兑换的办法共有41×4种；

如果1分的和2分的加起来有0.75元，这总共有38种兑换办法. 剩下的0.25元可以这样兑换：5个5分的（1种），3个5分的（1种），1个5分的（2种）. 所以，在这一组中，兑换的办法共有38×4种；

用这种方法我们不难计算出，在1分的和2分的加起来的钱数为0.70元，0.65元，0.60元，0.55元，0.50元，0.45元，0.40元，0.35元，0.30元，0.25元，0.20元，0.15元，0.10元，0.05元以及根本没有1分的和2分的各个组中，兑换办法的个数分别是

36×6、33×6、31×9、28×9、26×13、23×13、21×18、18×18、16×24、13×24、11×31、8×31、6×39、3×39、1×49，这样一来，兑换办法的总数等于4562.

98. 证明：当$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}$，$k$次多项式

$$1-C_n^1x+C_n^2x^2-C_n^3x^3+\cdots+(-1)^kC_n^kx^k$$

的值为正的（这里的k是不超过n的正整数：C_n^1，C_n^2，…C_n^k是二项式系数）.

【证明】我们把多项式$1-C_n^1x+C_n^2x^2-C_n^3x^3+\cdots+(-1)^kC_n^kx^k$所有的项从常数项开始按$x$的升幂分成对. 如果最高次项没有和它配对的，那么它的幂指数是偶数，因而对任何x都是正的.

❶ 原题是匈牙利的货币，为了使我国读者阅读方便，改为人民币，题解也作了相应的改变. ——中译者注

我们研究多项式中构成一对的两个连续项:

$$C_n^l x^l - C_n^{l+1} x^{l+1} = \left(1-\frac{n-l}{l+1}x\right)C_n^l x^l = \frac{l(1+x)+(1-nx)}{l+1}C_n^l x^l.$$

最后一个表达式当 $0 \leqslant l \leqslant n-1$ 和 $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$ 时是正的，这就是所要证明的.

99. 在平面上引三条相交于一点的直线 p, q, r, 且两两之间的夹角为 60°。此外，给定长为 a, b, c 的三个线段，且 $a \leqslant b \leqslant c$. 证明: 到直线 p, q, r 的距离分别小于 a, b, c 的点当而且仅当 $a+b>c$ 时填满了某一个六边形的内部. 如果 $a+b>c$, 六边形的周长等于什么?

【**证明**】到直线 p 的距离小于 a 的点填满了关于直线 p 对称且宽为 $2a$ 的带子的内部（图 92）. 因此，满足本题条件的点的轨迹是分别关于直线 p, q, r 对称且宽分别为 $2a$, $2b$, $2c$ 的带子所交成的区域的内部. 每一个带子关于直线 p, q, r 的交点 O 是对称的❶. 因此，带子所交成的区域是中心对称的多边形，因而有偶数个边. 带子宽度的一半 a, b, c 应该满足什么样的条件才能使得多边形的边数不等于 4 呢? 也就是说，a, b, c 应该满足什么样的条件，才能使得所有三个带子所交成的区域不会和其中任何两个带子交成的区域相重合?

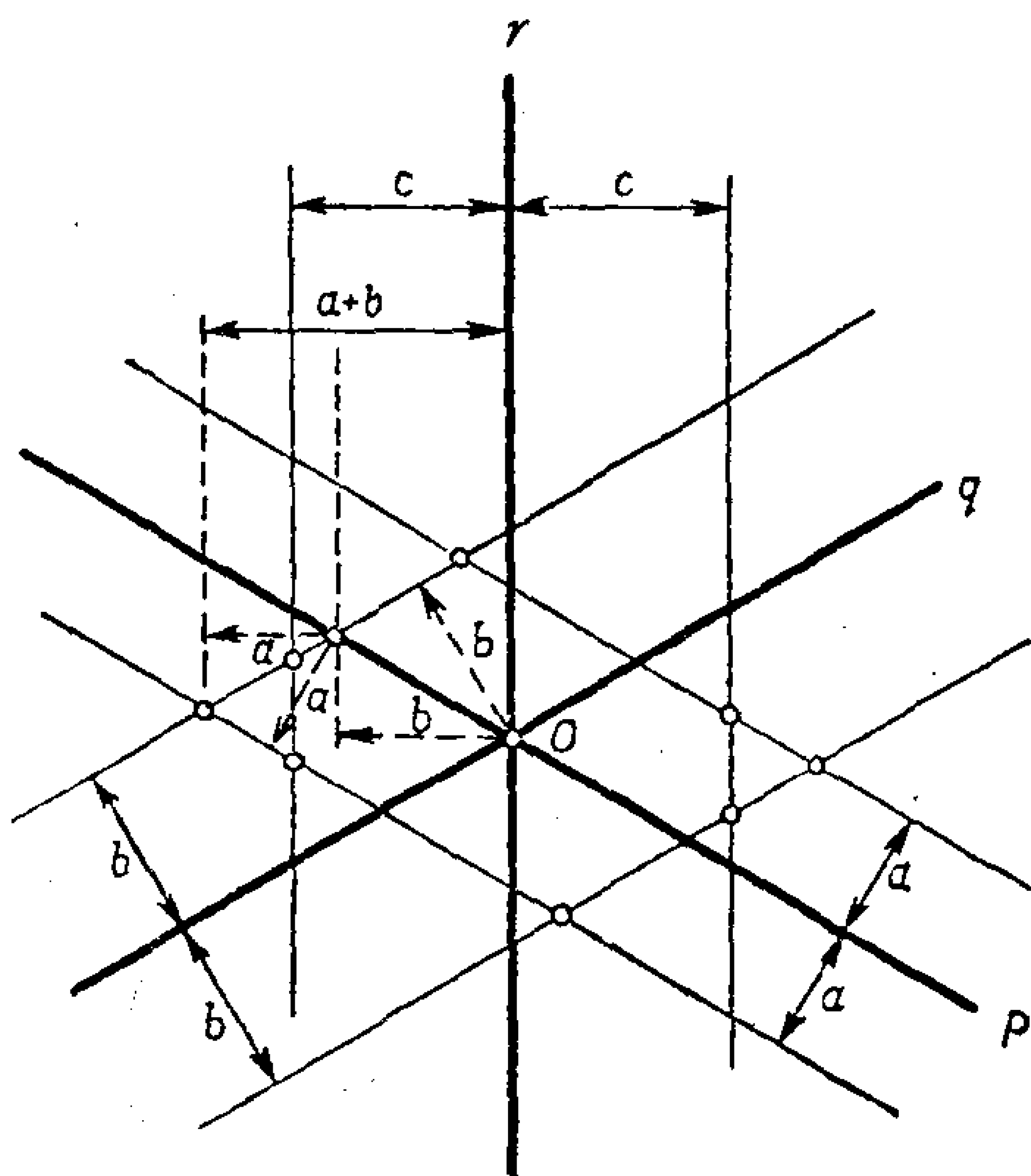


图 92

首先，我们研究关于直线 p 和 q 对称的带子所交成的区域. 它是一个平行四边形. 我们来估计这个平行四边形里面的点到直线 r 的距离是多少. 对于平行四边形内的任一点，我们从点 O 出发，先沿着和直线 p 平行的方向移动，然后再沿着和直线 q 平行的方向移动，总可以到达这一点. 在平行于直线 p 的方向上进行位移. 这个位移垂直于直线 q 的分量小于 b. 不论位移是在哪一侧（"正的"或"负的"）进行的，终点到直线 q 的距离总小于 b. 由于直线 p, q, r 两两之间的夹角为 60°，所以直线 q 和 r 关于直线 p 是对称的. 因此，沿着和直线 p 平行的方向的位移，在垂直于直线 r 的方向上的分量和在垂直于直线 q 的方向上的分量是一样的. 所以这个分量小于 b, 而且与位移是在哪一侧——"正的"或"负的"——进行的无关. 用同样的方法可以证明，沿着与直线 q 平行的方向的位移，其垂直于 r 的分量总小于 a, 而且和沿着所取的直线往哪一侧移动是无关的.

因为由点 O 在平行于直线 p 和 q 的方向上进行位移，可以到达所研究的平行四边形内的任何一点，所以我们可以断言: 这个平行四边形的所有内点到 r 的距离小于 $a+b$.

由此推出，由宽为 $2a$ 和 $2b$ 且关于直线 p 和 q 对称的带子所交成的平行四边形，仅仅在 $a+b>c$ 的情况下才会包含不属于所有三个带子所交成的区域的点.

---

❶ 这句话的意思是: 若点 M 属于某个带子，则和点 M 关于点 O 中心对称的点也属于这个带子.
——中译者注.

我们来研究其它两对带子所交成的平行四边形．用类似于上面的论证可以证明，仅仅在$b+c>a$和$a+c>b$的情况下，这些平行四边形才会包含不属于所有三个带子所交成的区域的点．但是根据本题条件，$a\leqslant b\leqslant c$，所以后两个不等式总是成立的．因此，条件$a+b>c$是使得满足本题条件的点的轨迹具有六边形的形状的必要（和充分的）条件．

直线p，q，r把整个平面划成为具有公共顶点且大小为60°的角．六边形的周长是由若干段构成的，每一段的长度等于带子的边界被角的夹边所截得的线段的长．

我们来证明这一点．

在直线p，q，r中，任取两根直线，我们来研究它们所构成的60°的角以及边界和第三根直线平行的带子落在这个角内的那一部分（图93）．如果带子的这一部分完全属于六边形，那么上面的断言显然成立．如果落在这个角内的带子的那一部分，其中有些部分在其它某一个带子的外面，那么它具有正三角形的形状，因此，两个带子相应的边界段相等（在图93中，相等的段用相同个数的小线标出）．这样一来，前面所作的断言在这种情况下仍然有效．

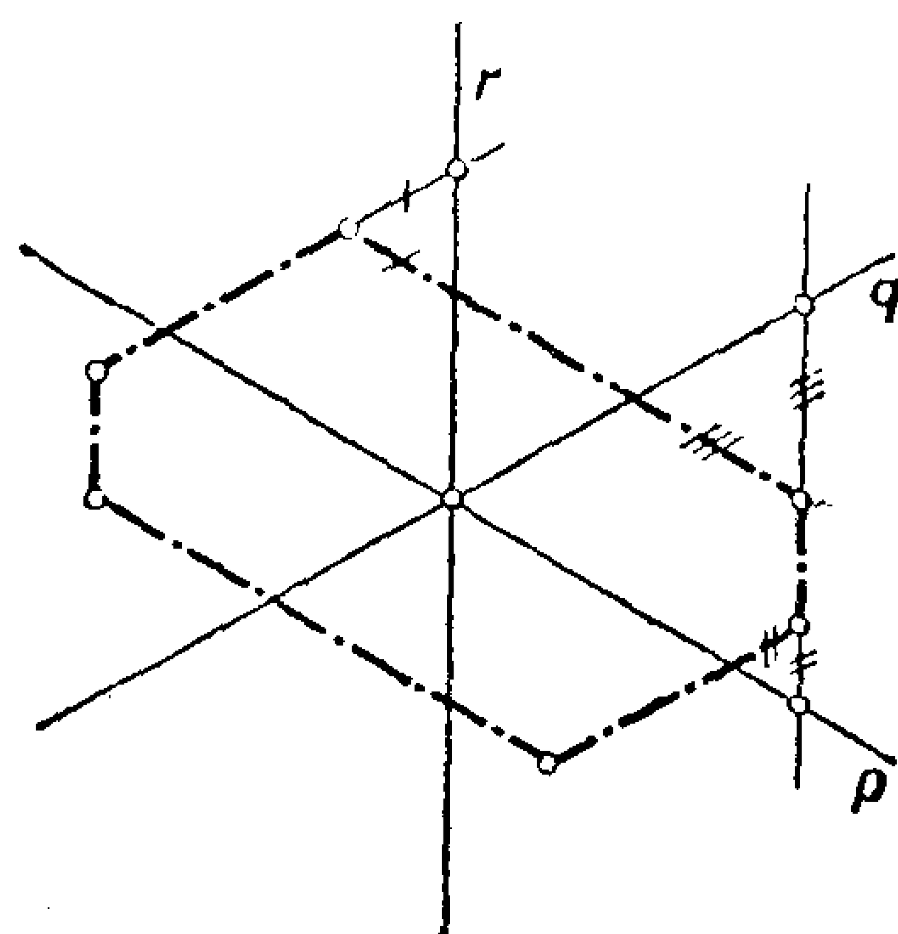


图 93

由此推出，六边形的周长等于高为a，b，c的等边三角形的边长的两倍的和，即

$$2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}a+\frac{2}{\sqrt{3}}b+\frac{2}{\sqrt{3}}c\right)=\frac{4}{\sqrt{3}}(a+b+c).$$

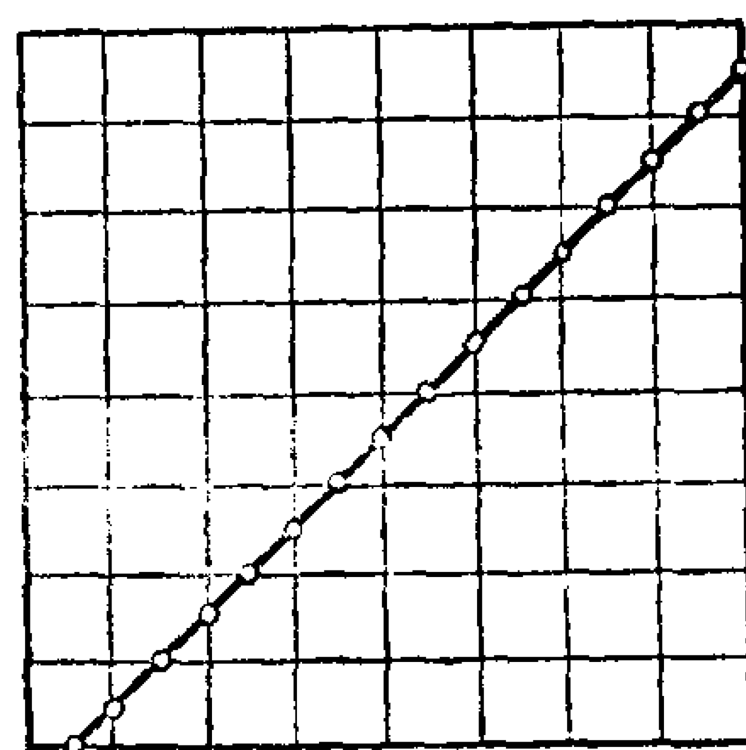
100．个位数是 6 而又能被 3 整除的五位数有多少？

【解】个位数字为 6 的五位数能被 3 整除的必要充分条件是去掉个位数字后所得到的四位数能被 3 整除．四位数总共有$9999-999=9000$个．它们每第三个数能被 3 整除．因此，有3000个能被 3 整除的四位数，从而也正好有这么多个个位数字为 6 而又能被 3 整除的五位数．

101．在大小为$8\times 8=64$格的象棋盘上引一直线．此直线最多可以穿过多少方格？

【解】我们将所引的直线和象棋盘的方格的边界所有的交点都标出来．所标出的点将所引的直线分成若干个有限的线段（我们不研究由第一个标出的点和最后一个标出的点发出的半直线）．每一个线段通过一个且仅仅一个象棋盘的方格．因此，我们只要算出有限线段的个数便可知道所引的直线和多少个方格相交．

象棋盘被18条直线段（9 条竖的和 9 条横的）分成方格．所引的直线和这些直线段的每一条仅相交于一点，但是在棋盘的边线的四个直线段中，只有两条和所引的直线相交．因此，在所引的直线上最多有16个标出的点，这些点把这根直线分成15个线段．这样一来，在象棋盘上所引的任何一条直线可以和不多于15个的方格相交．通过两个角上的方格的边的中点引一条和象棋盘的一条对角线平行的直线，我们便得到了和15个方格相交的直线（图94）．


图 94

因此，在象棋盘上所引的任一条直线，可以与15个方格相交，但不能与更多的方格相交.

102．假设 P 是锐角 $\triangle ABC$ 内不和外接圆心重合的任意一点．证明：在线段 AP, BP, CP 中，有一个线段的长大于 R，还有一个的长小于 R（这里 R 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径）.

【证法 1】❶ 假设O是 $\triangle ABC$ 的外接圆心．因为点 O 到三角形的三个顶点的距离都等于 R，所以本题断言可变为：在三角形的顶点之中，有一个顶点到点 P 的距离比到点 O 的距离近，还有一个顶点到点 O 的距离比到点 P 的距离近.

与点 P 和 O 距离相等的点的轨迹是线段 OP 的中垂线．在这条直线 O 点一侧的点到点 O 的距离比到点 P 的距离近．在这条直线 P 点一侧的点到点 P 的距离比到点 O 的距离近，于是只要证明：在所引的直线的两侧至少有一个 $\triangle ABC$ 的顶点.

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以外接圆心 O 在它的里面（图95）．因此，线段 OP 的中点也在三角形内，从而线段 OP 的中垂线通过 $\triangle ABC$ 的内部并和它的周界相交于两点．这两个点中的某一个点可以和三角形的顶点重合，但不能两个交点都和三角形的顶点重合．因此，线段 OP 的中垂线至少和三角形的一个边的内点相交．这个边所连接的三角形的两个顶点在线段 OP 的中垂线的两侧，这就是所要证明的.

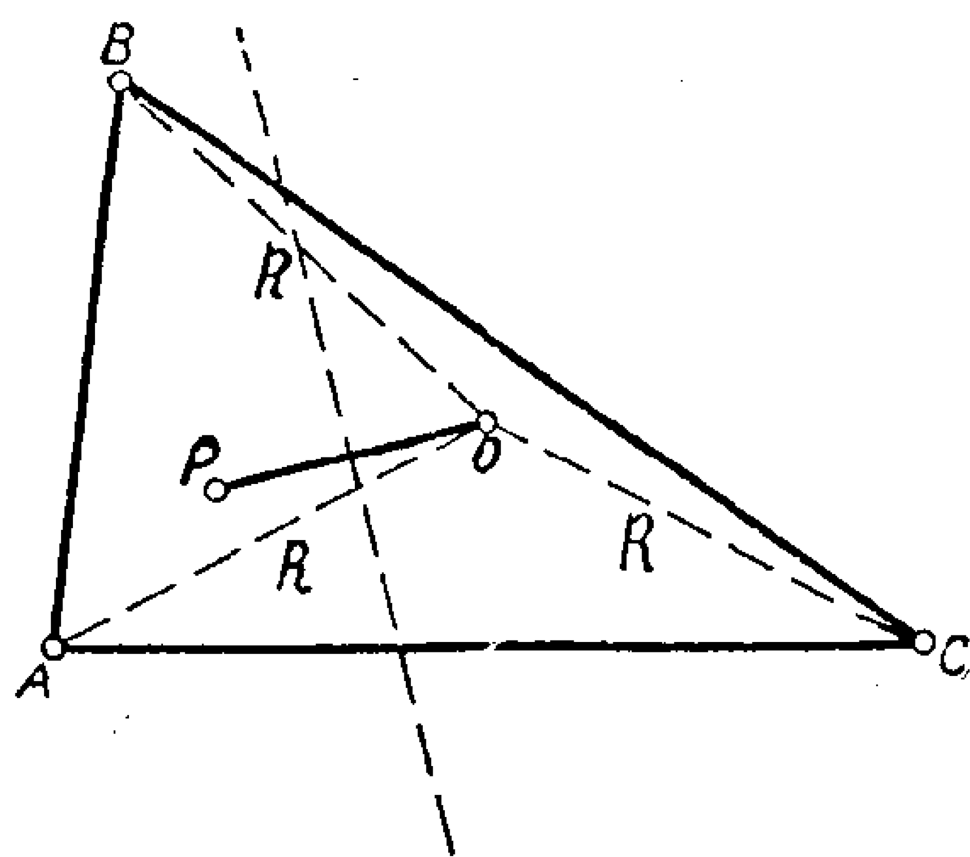


图 95

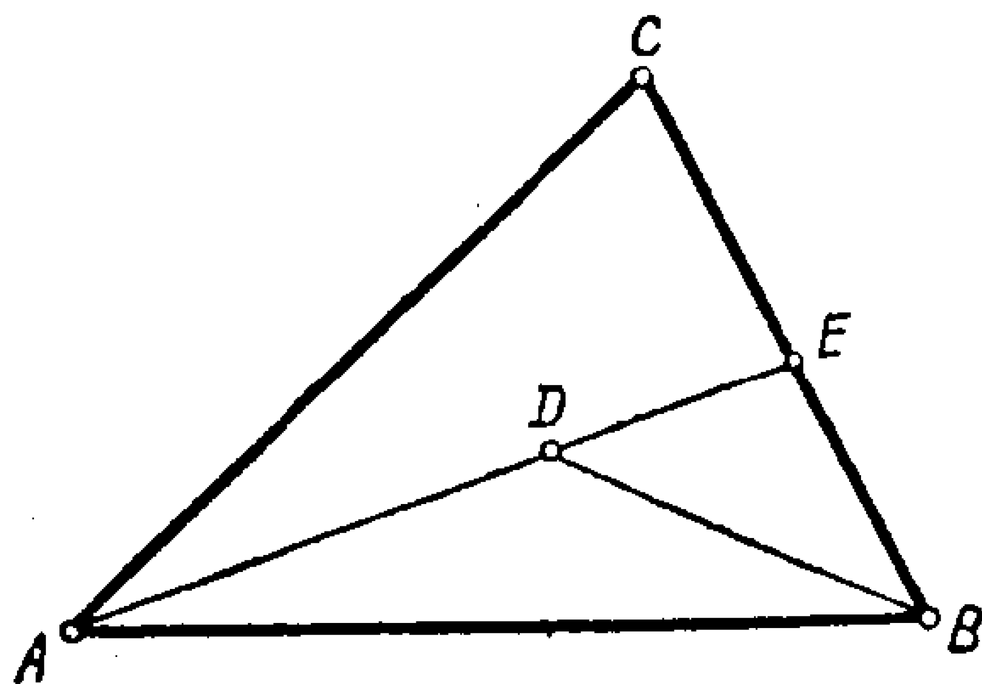


图 96

【证法2】 1） 我们利用下面的引理：

在三角形内或在它的边上（但不是三角形的顶点）的任意一点到两个顶点的距离之和小于相交于第三个顶点的三角形的两边之和.

引理的证明： 假设 $\triangle ABC$ 是任意的三角形，D 是它的不同于顶点 C 的点．在三角形的其它两个顶点中，不和 D 重合的顶点记作 A．假设 E 是直线 AD 和边 BC 的交点（图96）.

在点 B，D，E 之间有三角形不等式

$$DB \leqslant DE + EB.$$

等号对应于那种情况：当 $\triangle BDE$ 蜕化成一个直线段的时候，即点 D 在三角形的边 AB 上，或者在边 BC 上.

连接点 A、C、E 的线段长满足类似的不等式：

$$AD + DE \leqslant AC + CE.$$

等号对应于那种情况：当 $\triangle ACE$ 蜕化成一个直线段时，即点D在边 AC 上.

把所得到的不等式两边分别相加并消去左边和右边的线段 DE，我们得到不等式

---

❶ 本题断言的第二部分实质上与41题是一样的.

$$AD+DB\leqslant AC+CB.$$

其中等号仅当上面两个不等式都为等式时才成立．因为点D不和顶点A重合，那么这仅仅只有在D和顶点C重合的时候才有可能．

2） 连接外接圆心O和三角形的顶点．点P是$\triangle ABC$内不和点O重合的任意一点，那么它在$\triangle AOB$，$\triangle BOC$，$\triangle COA$中的某一个三角形内或它的边界上，但不和这个三角形的顶点重合．例如，假设点P在$\triangle AOB$内（图97）．

根据引理，

$$AP+PB<AO+OB=2R,$$

因此，线段AP和PB中较小的线段一定小于外接圆半径．

现在我们连接点P和三角形的顶点．因为$\triangle ABC$是锐角三角形，所以外接圆心O在它的里面，且在$\triangle APB$，$\triangle BPC$，$\triangle CPA$中的某一个三角形内或在它的边界上，但不和它的顶点重合．我们假设O在$\triangle CPA$内．这时根据引理

$$AP+PC>AO+OC=2R,$$

因此，线段AP和PC中较大的线段一定大于外接圆半径R．

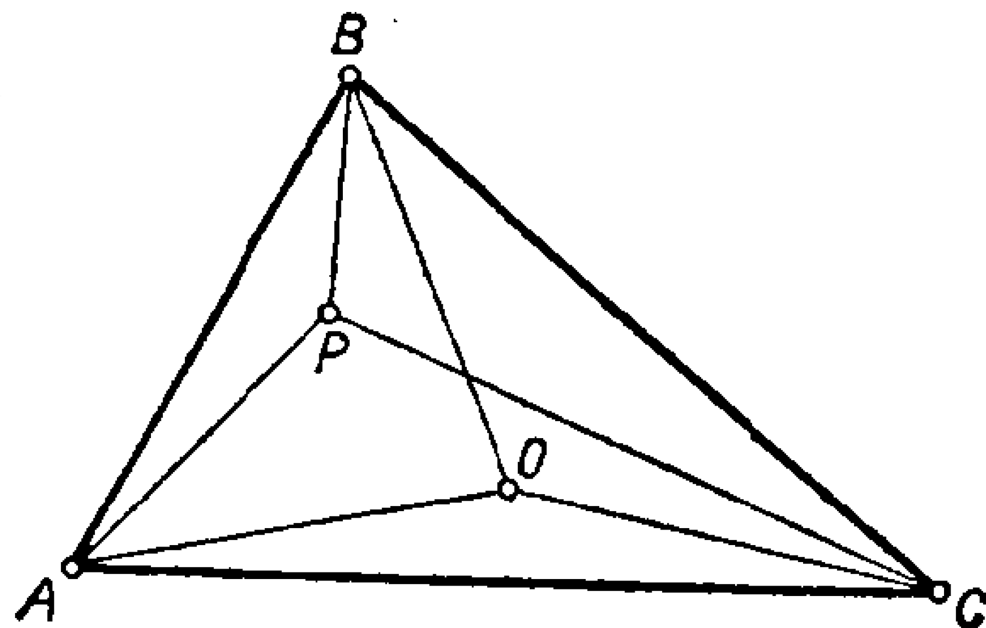


图 97

103．假设p是大于2的素数．证明：$\dfrac{2}{p}$可以而且仅有一种办法表示成

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

的形式，这里x，y是不同的正整数．

【证法1】去掉分母，将所要证明的关系式

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

写成下面的形式

$$2xy=p(x+y).$$

因为方程的右边能被素数p整除，所以（见§2）方程左边的因子中的某一个也能被p整除．系数2不能被p整除．由于x和y在方程中是对称的，所以不失一般性，可以认为x能被p整除，即$x=px'$．将这个表达式代入到方程中去，最后那个方程可变成

$$(2x'-1)y=px'.$$

数x'和方程左边的第一个因子是互素的．因此，第二个因子y应该能被x'整除：$y=x'z$，由此得到

$$(2x'-1)z=p.$$

这个方程只能有下面的解：

$$z=p,\qquad 2x'-1=1,$$

即

$$x'=1,\qquad x=y=p,$$

或者

$$z=1,\quad 2x'-1=p,$$

即

$$x'=\frac{p+1}{2},\quad x=p\frac{p+1}{2},\quad y=\frac{p+1}{2}.$$

在第一种情形中，数 x 和 y 是相同的. 因此，在第二种情形中所得到的 x 和 y 的值是原题的唯一解.

【证法2】将方程

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

的两边乘以$2xyp$，并将右边的$2xp$和$2yp$移到左边，且两边同加以 p^2，我们把方程变成

$$(2x-p)(2y-p)=p^2.$$

因为 x 和 y 是不同的数，所以该方程左边的两个因子是不同的. 因此，它们的乘积要想等于 p^2，只可能一个因子等于 1，而另一个因子等于 p^2. 设

$$2x-p=1,\quad 2y-p=p^2.$$

这时

$$x=\frac{p+1}{2},\quad y=p\frac{p+1}{2}.$$

这里得到的解和上面得到的解不同的仅仅是 x 和 y 互换了位置.

104. 假设a_1,a_2,a_3,a_4,a_5和b是满足关系式

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=b^2$$

的整数. 证明：所有这些数不可能都是奇数.

【证明】1) 本题的证明主要依据于下面的注解.

奇数的平方被8 除时，余数总是1.

事实上，形如$2k+1$的数叫做奇数，其中 k 是整数. 将它平方得

$$(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1.$$

因为在数 k 和$k+1$中，总有一个是偶数，所以右边第一项能被 8 整除.

2) 本题断言可以直接从上面所做的注解推出. 事实上，如果所有的数 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5，b 都是奇数，那么关系式

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=b^2$$

的左边被 8 除时，余数等于 $1+1+1+1+1=5$，而右边被 8 除时，余数为 1. 所得到矛盾表明：所有的数 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,b 不可能都是奇数.

105. 在直线上给定点A和B. 在此直线上求一点P，使

$$\frac{1}{1+AP}+\frac{1}{1+BP}$$

达到最大值. 这里AP和BP表示线段的长，因此不能取负值.

【解】我们来证明：当点P和点A或点B重合时，量

$$S(P)=\frac{1}{1+AP}+\frac{1}{1+BP}$$

达到最大值.

如果点P在线段AB的延长线上．那么显然$S(P)<S(A)=S(B)$，因为这时两个分数的分母都比点P和线段AB的一个端点重合时要大．

现在我们假设点P在线段AB上．从点B往右和从点A往左取单位长的线段．它们的端点记作C和D（图98）．



图 98

量$S(P)$可以表示成

$$\frac{1}{CP}+\frac{1}{DP}=\frac{CD}{CP\cdot DP}. \qquad (*)$$

它在右边的分母的表达式越小时越大，因为它的分子是一个常数．我们注意，线段CP可以表示成$CF+FP$，而线段DP可以表示成$CF-FP$，其中F是线段CD的中点，于是我们得到

$$CP\cdot DP=CF^2-FP^2.$$

因此，点P离F越远，分母越小．所以，(*)式右边的分母当点P和线段AB的一个端点重合时达到最小值．

106．证明：如果b是能被a^n整除的自然数（a和n也是自然数），那么

$$(a+1)^b-1$$

能被a^{n+1}整除．

【证法1】为了简单起见，我们用$d|n$表示d是数n的约数（n能被d整除）．

我们对n用完全数学归纳法来证明本题的断言．

当$n=0$时，本题断言显然成立：如果b是任意正整数，那么

$$(a+1)^b-1=[(a+1)-1][(a+1)^{b-1}+\cdots+(a+1)+1]$$

能被a整除．

现在我们假设本题断言对$n=k$时成立．换句话说，如果$a^k|b$，那么$a^{k+1}|(a+1)^b-1$．

假设b'是能被a^{k+1}整除的数．比$\frac{b'}{a}$用b来表示．这时$a^k|b$，且

$$(a+1)^{b'}-1=(a+1)^{ab}-1=[(a+1)^b]^a-1=$$
$$=[(a+1)^b-1][(a+1)^{(a-1)b}+(a+1)^{(a-2)b}+\cdots+(a+1)^b+1].$$

根据归纳假设，上式右边第一个方括弧内的表达式能被a^{k+1}整除．第二个方括弧中有a个被加项，因此第二个因子可以表示成

$$[(a+1)^{(a-1)b}-1]+[(a+1)^{(a-2)b}-1]+\cdots+[(a+1)^b-1]-a.$$

由归纳基础（当$n=0$时所证明的本题断言）推出，方括弧中的表达式和最后一项都能被a整除．因此

$$a^{k+2}|(a+1)^{b'}-1,$$

即本题断言当$n=k+1$时也是正确的，从而它对所有的n被证明了．

【证法2】由牛顿二项式的性质（见§25）知

$$(a+1)^b-1=C_b^1a+C_b^2a^2+\cdots+C_b^{b-1}a^{b-1}+C_b^ba^b.$$

$C_b^k\ (k=1,\ 2,\ \cdots b)$ 是二项式系数，或是从 b 个元素中取出 k 个元素的组合数，它为整数. 其值可由下式确定：

$$C_b^k=\frac{b\cdot(b-1)\cdot\cdots\cdot(b-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\cdots\cdot 1} \qquad (1)$$

我们来证明

$$a^{n+1}\mid a^kC_b^k \quad (k=1,2,\cdots,b). \qquad (2)$$

为此必须弄清楚二项式系数 C_b^k 能被 a 的多少次幂整除. 由关系式（1）推出

$$bC_{b-1}^{k-1}=kC_b^k.$$

假设 d 是数 b 和 k 的最大公约数. 这时 $\frac{b}{d}$ 和 $\frac{k}{d}$ 是互素的数（见 § 23）. 用 d 除最后一个等式的两边，我们得到

$$\frac{b}{d}\ \Big|\ \frac{k}{d}C_b^k.$$

因为 $\frac{b}{d}$ 和 $\frac{k}{d}$ 互素，所以

$$\frac{b}{d}\ \Big|\ C_b^k.$$

于是，为了证明关系式（2），我们只要证明

$$a^{n+1}\ \Big|\ \frac{a^kb}{d}$$

就够了.

这实际上是成立的，因为 $d\leqslant k$，因此 d 小于任何一个素数的 k 次幂，于是，如果 p 是 a 的标准分解式中的任何一个素因子，那么在 d 的标准分解式中，如果有素因子 p，它的指数一定小于或等于 $k-1$.

假设 p 是 a 的标准分解式中的某一个素因子，其指数 $\alpha\geqslant 1$. 因为 $a^n\mid b$，所以在 b 的标准分解式中，p 的指数 $\geqslant n\alpha$，而在 $\frac{b}{d}$ 的标准分解式中，p 的指数 $\geqslant n\alpha-(k-1)\geqslant(n-k+1)\alpha$.

因此 $a^{n-k+1}\ \Big|\ \frac{b}{d}$.

在证明中所用到的不等式 $k<p^k$，当 $k=1$ 时显然成立. 而且当 k 每次增加 1 时，它也是成立的，因为它的左边这时仅仅增加 1，而右边却增加了（$p-1$）倍，这里 $p>1$.

107. 假设在 $\triangle ABC$ 中，边 AB 和 AC 不相等（$AB\neq AC$），AP 是角 A 的平分线（点 P 在边 BC 上）.

证明：

1）若边 BC 的中点为 F，由点 A 作边 BC 的高，垂足为 T，那么点 P 在点 F 和点 T 之间；

2）如果 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，那么 $\angle FAP<\angle PAT$.

【证明】 1）作 $\triangle ABC$ 的外接圆. 显然 $\angle A$ 的平分线和外接圆交于另一点 D，而且点 D 在顶点 B 和 C 之间不包含顶点 A 的圆弧上，并且将这段弧二等分（图99）. 过边 BC 的中点

F所作的垂线也和外接圆交于D点. 如果$\triangle ABC$不是等腰的，那么$\angle A$的平分线不会和这个顶点的对边上的高重合，因此点F，P和T是互不相同的. 因为点P在$\angle A$的平分线上，且将点A和D分开，所以由点A和点D向BC边作垂线时，垂足被点P分开.

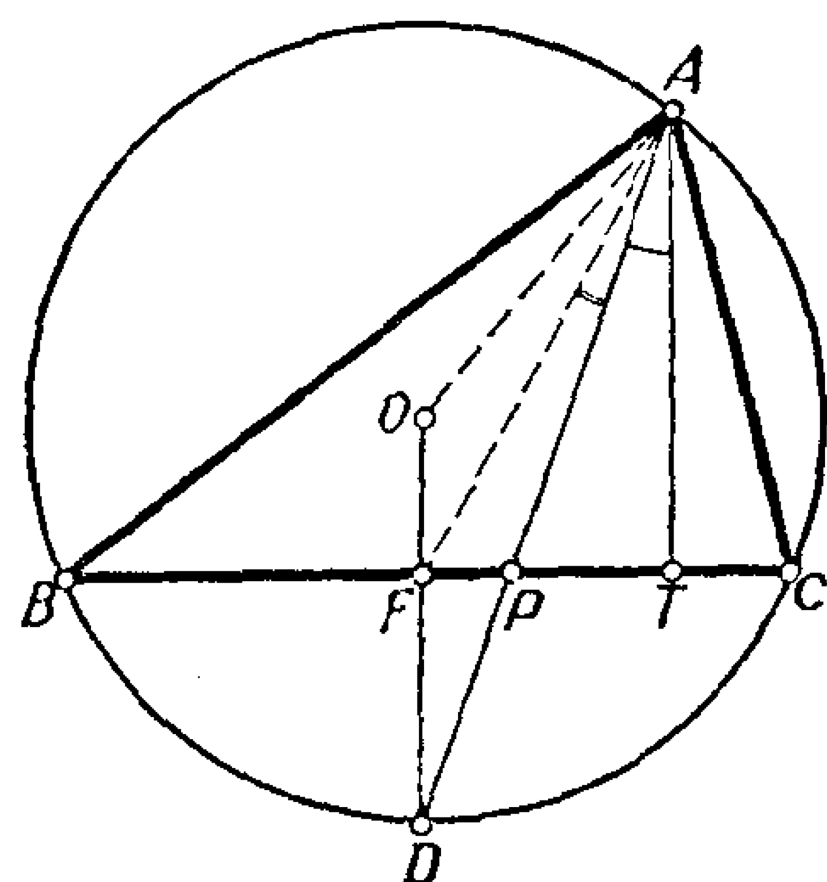


图 99

2) 外接圆心O在边BC的中垂线FD上，如果$\triangle ABC$是锐角三角形，那么F是线段OD的内点❶.

因此

$$\angle FAP < \angle OAD.$$

另一方面，$\triangle AOD$是等腰的，此外，线段FD和AT平行，所以

$$\angle OAD = \angle ODA = \angle PAT.$$

比较所得到的关系式，我们得到不等式

$$\angle FAP < \angle PAT,$$

这就是所要证明的.

108. 假设α,β,γ是任一锐角三角形的三个顶角. 证明：如果$\alpha<\beta<\gamma$，那么

$$\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$

【证法1】我们将$\triangle ABC$对于顶点A和B的对边作反射. 假设A_1是顶点A关于边BC的对称点，B_1是顶点B关于边AC的对称点（图100）. 因为$\triangle ABC$是锐角三角形，所以它的顶点C在$\triangle ABA_1$和$\triangle BAB_1$的外面，又因为$\alpha<\beta$，所以$BC<AC$. 此外，

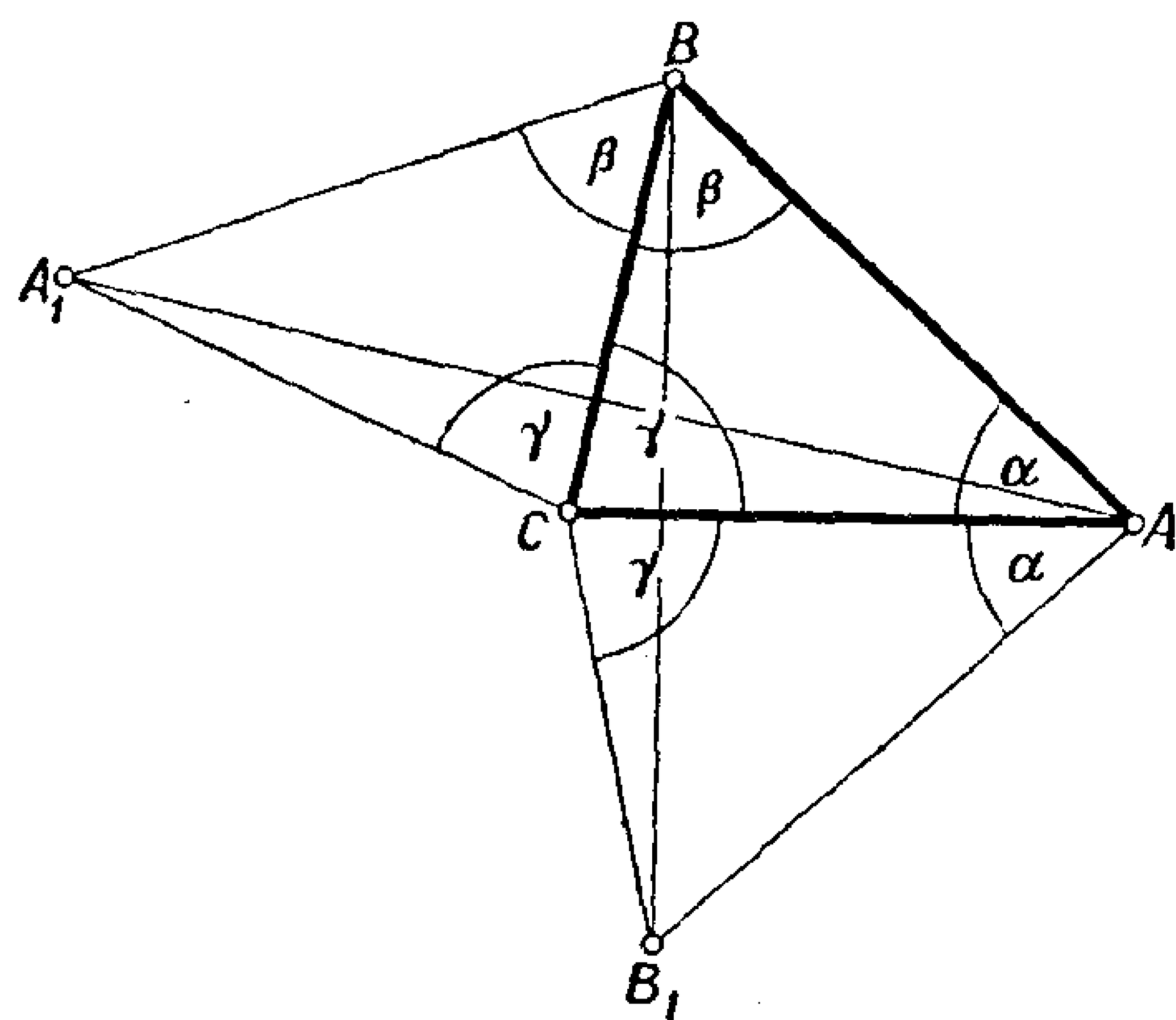


图 100

$$\angle ACA_1 = 2\gamma = \angle BCB_1,$$

因此

$$S_{\triangle BCB_1} = \frac{1}{2}BC^2\sin 2\gamma <$$

$$< \frac{1}{2}AC^2\sin 2\gamma = S_{\triangle ACA_1}.$$

于是

$$\frac{AB^2}{2}\sin 2\alpha = S_{\triangle BAB_1} = 2S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BCB_1} >$$

$$> 2S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ACA_1} = S_{\triangle ABA_1} = \frac{AB^2}{2}\sin 2\beta,$$

由此推出

$$\sin 2\alpha > \sin 2\beta.$$

用同样的方法可以证明

$$\sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$

【证法2】只要证明下面这一点就足够了：如果在锐角$\triangle ABC$中，角满足不等式$\alpha<\beta$，那么有$\sin 2\alpha > \sin 2\beta$.

假设O是外接圆心，R是它的半径（图101）.

---

❶ 因为这时点O在$\triangle ABC$内，而点D总是在$\triangle ABC$外的. ——中译者注.

利用同一弧上的圆心角和圆周角之间的关系，我们得到

$$\angle BOC = 2\alpha, \quad \angle AOC = 2\beta.$$

由 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOC$ 的顶点 A 和 B 作它们的公共边 OC 的高 AA_1 和 BB_1，于是

$$AA_1 = R\sin 2\beta, \quad BB_1 = R\sin 2\alpha.$$

现在剩下的只要证明 $BB_1 > AA_1$ 了.

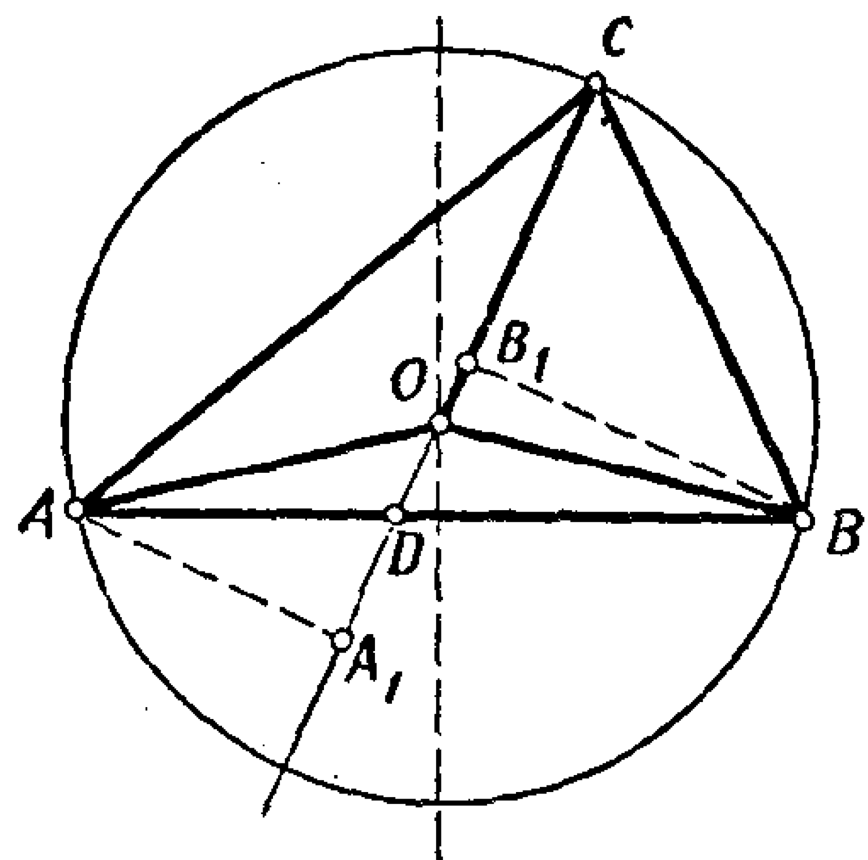


图 101

假设 D 是边 AB 和直线 CO 的交点. 因为 $\triangle AA_1D$ 和 $\triangle BB_1D$ 相似，所以只要证明 $BD > AD$ 就行了（即点 D 应该和顶点 A 在线段 AB 的中垂线的同一侧).

外接圆心 O 在直线 CO 上，且将点 C 和点 D 分隔开. 同时，外接圆心 O 又在线段 AB 的中垂线上. 由于 $\alpha < \beta$，所以 $CB < CA$，因此顶点 C 和 B 在中垂线的同一侧，从而顶点 A 和 D 在另一侧.

【证法3】 如果 α，β，γ 是锐角三角形的角，那么

$$\pi - 2\alpha, \quad \pi - 2\beta, \quad \pi - 2\gamma \tag{1}$$

也是某一个三角形的角，因为它们的和等于 $3\pi - 2\pi = \pi$.

我们用 a'，b'，c' 来表示这个三角形的角（1）依次所对的边. 根据本题条件 $\alpha < \beta < \gamma$. 因此

$$\pi - 2\alpha > \pi - 2\beta > \pi - 2\gamma.$$

于是

$$a' > b' > c'. \tag{2}$$

但是

$$\sin(\pi - 2\alpha) : \sin(\pi - 2\beta) : \sin(\pi - 2\gamma) = a' : b' : c'.$$

考虑到有不等式（2），便可由此推出

$$\sin 2\alpha > \sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$

【证法4】 首先我们注意到，由于 $\gamma = \pi - \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$，所以 $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$. 但是根据本题条件，$\alpha < \beta$，因此 $2\beta > \frac{\pi}{2}$.

这样一来，我们可以断定：角 α 和 β 满足不等式

$$\pi - 2\beta < 2\alpha < 2\beta, \tag{1}$$

$$\frac{\pi}{2} < 2\beta < 2\gamma < \pi. \tag{2}$$

因为 $\sin(\pi - 2\beta)$ 和 $\sin(2\beta)$ 相等，而包含在 $\pi - 2\beta$ 和 2β 之间的任一角的正弦有更大的值，所以

$$\sin 2\alpha > \sin 2\beta.$$

在 $\frac{\pi}{2}$ 到 π 的区间内，正弦单调下降，因此由不等式（2）有

$$\sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$

【证法5】 利用 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$，且比较 $\sin 2\alpha$ 和 $\sin 2\beta$ 的值:

$$\sin 2\alpha - \sin 2\beta = 2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\gamma\sin(\beta-\alpha).$$

上式右边是正的，因为γ和$\beta-\alpha$都是正的锐角. 因此

$$\sin 2\alpha > \sin 2\beta.$$

同样可以证明

$$\sin 2\beta > \sin 2\gamma.$$

109. 如果

$$a^2+b^2=1, \tag{1}$$

$$c^2+d^2=1, \tag{2}$$

$$ac+bd=0, \tag{3}$$

试求$ab+cd$的值.

【解法1】我们来研究关系式（1）—（3）.

由关系式（1）推出，a和b不能同时为0. 不失一般性，我们可假设$a\neq 0$(不然的话，将数a和b进行对换，同时将数c和d进行对换). 将等式（3）对于c解出，并将所得到的表达式

$$c=-\frac{bd}{a} \tag{4}$$

代入到关系式（2）中，我们得到新的关系式

$$\frac{b^2d^2}{a^2}+d^2=\frac{(a^2+b^2)d^2}{a^2}=1,$$

由于有关系式（1），我们便可推出

$$a^2=d^2. \tag{5}$$

利用关系式（4），并将需要求值的表达式$ab+cd$变成

$$ab+cd=ab-\frac{bd^2}{a}=\frac{b(a^2-d^2)}{a}.$$

将表达式（5）代入到上式的分子中，我们得到

$$ab+cd=0.$$

【解法2】将等式（3）的两边乘以$ad+bc$，我们得到

$$\begin{aligned}&(ac+bd)(ad+bc)=\\&=a^2cd+d^2ab+c^2ab+b^2cd=\\&=ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)=0,\end{aligned}$$

因为在本题条件中有等式（1）和（2），所以

$$ab+cd=0. \bigstar$$

§51. 关　于　矢　量

用矢量运算的观点，对109题可作进一步的讨论. 矢量在物理和数学中有着广泛的应用.

1） 从始点A到终点B的有方向的线段叫做矢量. 矢量表示作：$\overrightarrow{AB}$. 如果两个矢量平行（共线），并指向同一方向，而且长度相等，则认为这两个矢量是相等的. 这样一来，如果一个矢量是从另一个矢量平行移动得到的，我们对这两个矢量是不加区别的. 例如图102中

所画的矢量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 是相等的，而且它们可以同样地表示作 $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

2） 可以对矢量进行各种运算. 两个矢量的和是一个矢量，它是这样得到的：在一个被加矢量的终点放上另一个被加矢量，然后从第一个被加矢量的始点到第二个被加矢量的终点作一个矢量，这个矢量就表示两相加矢量之和. 这样定义两个矢量之和与物理中所采用的速

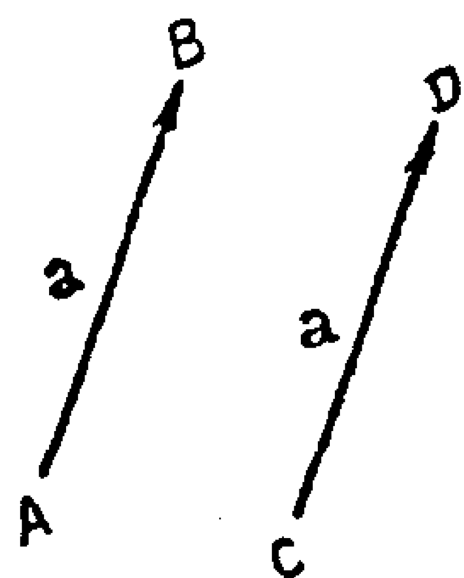


图 102

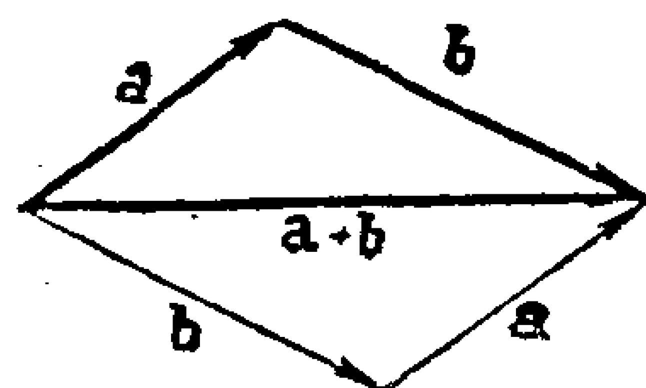


图 103

度合成的方法(即大家熟知的**平行四边形法则**)是一致的. 由图103所画的平行四边形可以看出，两个矢量的和在交换相加项的次序时是不变的：$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$.

直接可以看出，矢量的加法具有结合律的性质，即

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}),$$

因此，在三个或更多矢量的和中加括弧是多余的.

由矢量的加法法则显然可以看出应该怎样理解两个矢量的差. 如果矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 从同一点发出，那么从矢量 $\mathbf{b}$ 的终点到矢量 $\mathbf{a}$ 的终点所引的矢量叫做差 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$（图104)，因为

$$\mathbf{b}+(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}.$$

任何一个矢量减去和它相等的矢量，差矢量的始点和终点将重合. 所得到的矢量叫做**零矢量**：

$$\mathbf{a}-\mathbf{a}=\mathbf{0}.$$

3） 矢量可以和数相乘. 如果 m 是正数，那么矢量 $m\mathbf{a}$ 可以这样得到：作一个新的矢量，它和矢量 $\mathbf{a}$ 平行，且都指向同一方向，它的长度和矢量 $\mathbf{a}$ 的长度的比是 $m:1$. 矢量 $(-m)\mathbf{a}$

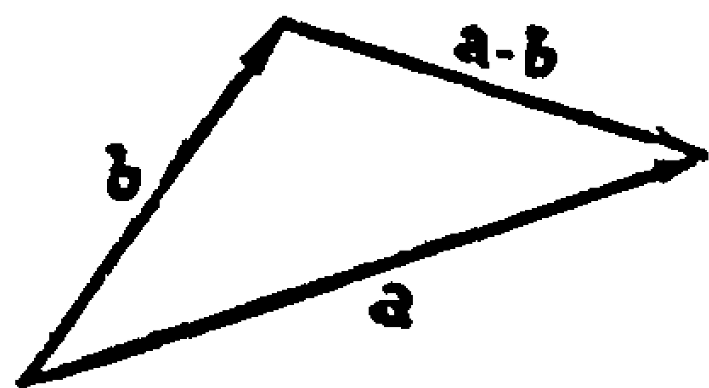


图 104

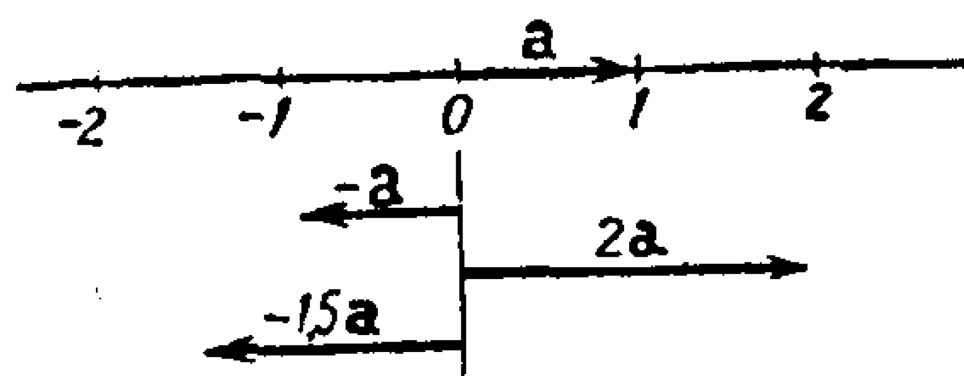


图 105

和矢量 $m\mathbf{a}$ 平行且其长度相等，但方向相反，因此 $m\mathbf{a}+(-m)\mathbf{a}=0\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0}$.

在图105中表示了矢量 $\mathbf{a}$ 与某些数相乘所得到的矢量. 为了简单起见，矢量 $(-1)\mathbf{a}$ 通常表示为 $-\mathbf{a}$. 这样的表示法和上面所采用的定义是一致的，因为

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{b})=\mathbf{a}-\mathbf{b}.$$

矢量和数的乘法确定了

$$0\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0},\quad 1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}.$$

不难看出，对于任意两个数 m 和 n

$$(m+n)\mathbf{a}=m\mathbf{a}+n\mathbf{a}, \qquad m(n\mathbf{a})=(mn)\mathbf{a},$$

而对于任何两个矢量a和b

$$m(\mathbf{a}+\mathbf{b})=m\mathbf{a}+m\mathbf{b}.$$

于是，矢量的加法以及矢量与数的乘法具有和通常数的加法和乘法运算相同的性质．这就大大简化了矢量的运算，因为上面所定义的两种运算所服从的不是新的法则，而是已经非常熟悉的法则．

4）我们假设在平面上给定两个相互垂直的**单位**向量 i 和 j．对于平面上的每一个矢量 v 都可以作这样一个直角三角形，使得斜边是 v，而直角边是和所选取的单位矢量 i 和 j 平行的矢量（图106）．如果矢量 v 的自身和矢量 i 和 j 中的某一个平行，那么与它相应的直角三角形蜕化成一个线段，一个直角边缩成一点．由于单位矢量 i 和 j 乘以数时，所得到的矢量平行于 i 和 j，所以能够作一个直角边平行于矢量 i 和 j 而斜边等于矢量 v 的直角三角形，这意味着对于平面上的任意矢量 v，可以找到这样两个数 x 和 y，使得

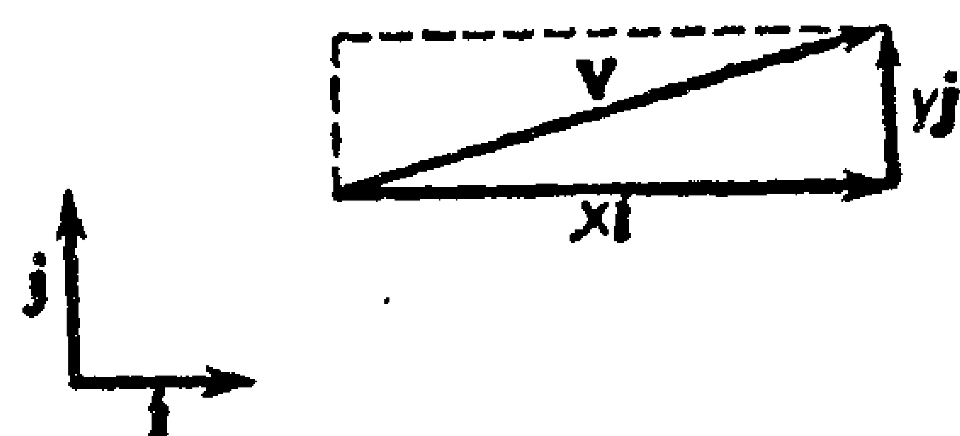


图 106

$$\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j},$$

而且对于每一个矢量 v，数 x 和 y 是唯一确定的．

数 x 和 y 叫做矢量 v 的（关于所选取的单位矢量 i 和 j）**坐标**．如果必须指明的不仅是矢量 v 本身，而且还有它的坐标 x，y，那么通常把它写成 v $\{x,y\}$．类似地，当所描写的矢量不在平面上，而在空间中，我们引进三个相互垂直且具有公共始点的单位矢量 i, j, k，而任一矢量由它的三个坐标给定（图107）

$$\mathbf{v}\{x,y,z\}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}.$$

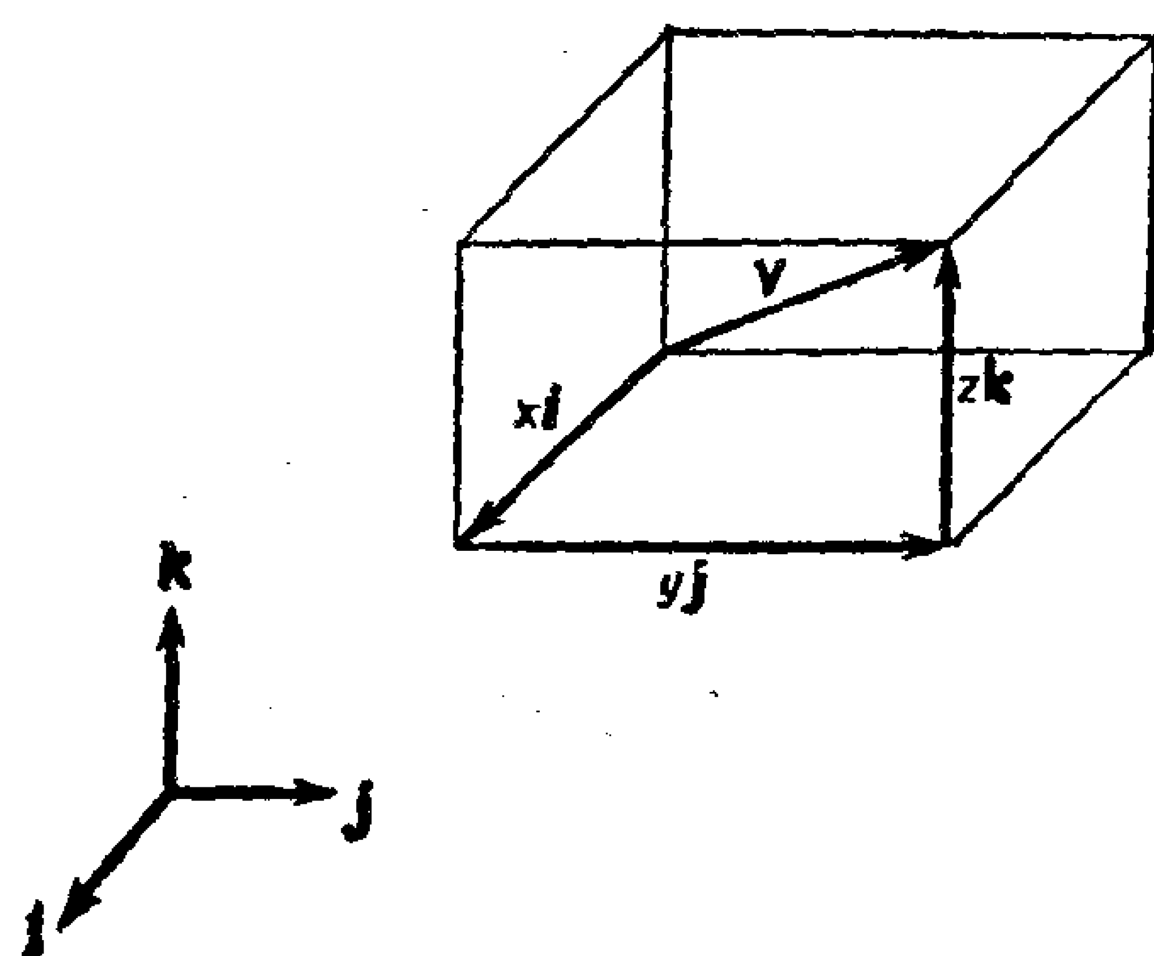


图 107

当由研究平面上的矢量过渡到研究空间中的矢量时不会产生任何困难．矢量 xi, yj, zk 叫做矢量 v 的相互垂直的**分量**．

如果选取了始点 O，并作了矢量 $\overrightarrow{OP}$，那么点 P 在平面上或空间中的位置就确定了．这样的矢量叫做点 P 的**矢径**．矢径的坐标是点 P 的坐标．这样，我们就得到熟悉的平面上和空间中的直角（或笛卡尔）坐标系．

5）我们来说明怎样利用矢量来建立**三角函数**的理论．这时并不需要关于三角函数的任何预备知识．矢量不仅能够建立三角函数的全部理论，而且还可以给出函数本身的定义．

我们这样选取单位矢量 i 和 j，使得 i 按正方向旋转90°变到 j．将矢量 i 按正方向或负方向旋转角 α 时，我们将认为矢量 i 的新位置和老位置之间的夹角 α 分别是正的或负的．例如，我们假设单位矢量 i 按正方向旋转角 α 后和单位矢量 e 重合（图108）．矢量 e 的坐标依赖于角 α．它们叫做角 α 的余弦和正弦：

$$\mathbf{e}\{\cos\alpha,\ \sin\alpha\}.$$

这样定义的三角函数可以根据角 α 和 β 的余弦和正弦的值来计算角 $\alpha+\beta$ 的余弦和正弦．应当指出，这时对于角 α，β 和 $\alpha+\beta$ 不必加以任何限制，它们可以是锐角，钝角，比周角大

的角，正角或负角.

从我们已经遇到过的单位矢量 **i** 和 **j** 入手. 将两个矢量旋转同一个角 α（图109），我们

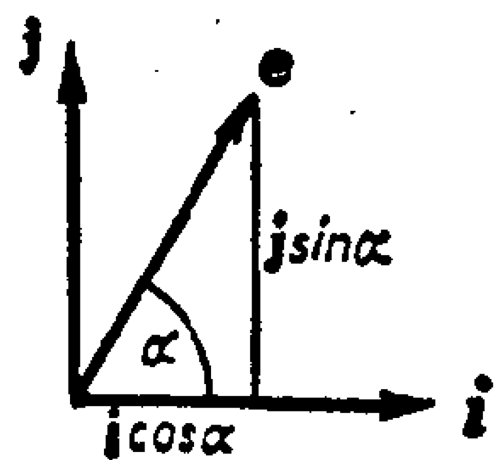


图 108

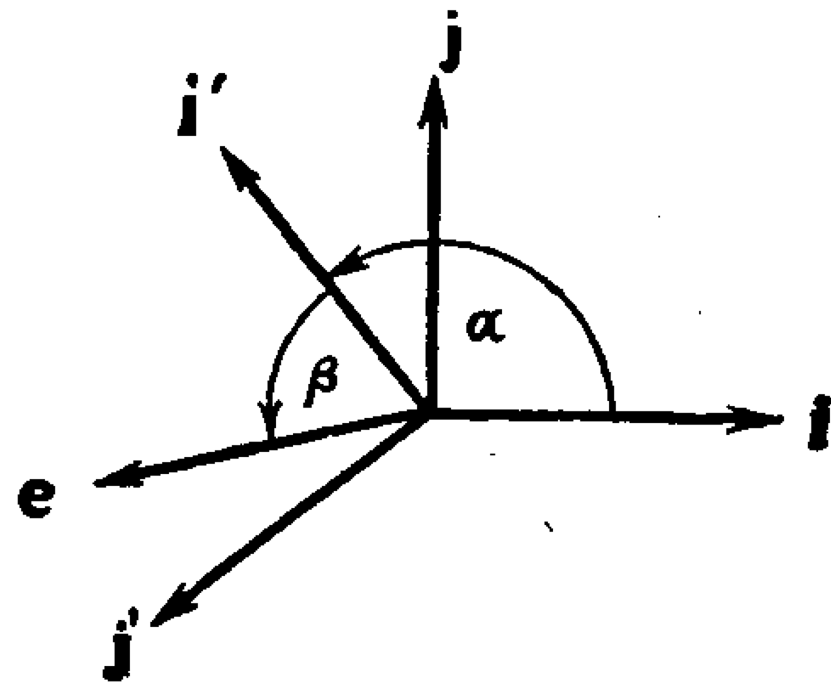


图 109

得到矢量 $\mathbf{i}'$ 和 $\mathbf{j}'$. 根据余弦和正弦的定义，

$$\mathbf{i}'=\mathbf{i}\cos\alpha+\mathbf{j}\sin\alpha. \quad (1)$$

如果将包含在这个等式中的所有的矢量都按正方向旋转角90°，那么这个等式不会破坏. 因为在这种旋转下，**i** 变为 **j**，**j** 变为 $-\mathbf{i}$，所以新的等式为

$$\mathbf{j}'=-\mathbf{i}\sin\alpha+\mathbf{j}\cos\alpha. \quad (2)$$

现在我们把矢量 $\mathbf{i}'$ 旋转角 β. 根据三角函数的定义，$\mathbf{i}'$ 变成的矢量 **e** 可以表示成

$$\mathbf{e}=\mathbf{i}'\cos\beta+\mathbf{j}'\sin\beta, \quad (3)$$

因为矢量 **i** 旋转角 $\alpha+\beta$ 时变成矢量 **e**，所以 **e** 也可以表示成

$$\mathbf{e}=\mathbf{i}\cos(\alpha+\beta)+\mathbf{j}\sin(\alpha+\beta). \quad (4)$$

将关于单位矢量 $\mathbf{i}'$ 和 $\mathbf{j}'$ 的表达式（1）和（2）代入到等式（3），我们得到

$$\mathbf{e}=(\mathbf{i}\cos\alpha+\mathbf{j}\sin\alpha)\cos\beta+(-\mathbf{i}\sin\alpha+\mathbf{j}\cos\alpha)\sin\beta=$$
$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\mathbf{i}+(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\mathbf{j}.$$

将上式中矢量 **e** 的坐标和它在（4）式中的坐标相比较，我们得到两角和的余弦和正弦的公式：

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

6） 矢量可以彼此相乘，而且乘法运算可以用不同的方式来定义. 首先我们研究两个矢量的乘积不是矢量而是数的情况. 在需要强调指出矢量和数之间的区别时，通常把数叫做**标量**，因为任何一个数可以表示成有刻度的直线——数轴——上的点的形式. 如果两个矢量相乘时得到一个数，那么两个矢量的这种乘积叫做**数量积**. 通常又把这种乘法叫做标乘或数乘. 可惜限于篇幅我们不能在此介绍关于矢量的其它类型的乘积. 两个矢量的数量积仿照计算功的公式来定义. 从物理学知道，功等于力和在力的方向上的位移分量的乘积. 把位移分解成两个分量：一个在力的方向上，另一个在垂直于力的方向上，这样我们可以把功表示成如下三个因子的乘积：总的位移、力的大小、力和位移两个方向之间夹角的余弦. 这些物理上的考虑，正是两个矢量数量积定义的原型.

在一般情况下，两个矢量 **a** 和 **b** 的长度以及它们之间夹角的余弦的乘积叫做这两个矢量的数量积：

$$\mathbf{ab}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

在这里，$|\mathbf{a}|$ 和 $|\mathbf{b}|$ 表示矢量 **a** 和 **b** 的长度（模），而 $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ 是它们之间的夹角（图

110). 由数量积的定义推出

$$\mathbf{ab}=\mathbf{ba},$$

$$m(\mathbf{ab})=(m\mathbf{a})\mathbf{b}=\mathbf{a}(m\mathbf{b}),$$

$$\mathbf{a}^2=\mathbf{aa}=|\mathbf{a}|^2.$$

不难看出，**两个相互垂直的矢量的数量积等于零**. 由两个矢量的数量积等于零决不能推出矢量因子中的某一个等于零，因为两个矢量因子可以不为零而相互垂直.

两个单位矢量的数量积等于它们之间夹角的余弦. 例如，在图 108 中所画的单位矢量 **e** 在单位矢量 **i** 上的投影等于(**ie**)**i**，因为 **ie**= cosα. 用 **a**= m**e** 来代替 **e** 我们得到的投影和(**ie**)**i** 相差一个因子 m，即得到矢量 **a** 的投影

$$m(\mathbf{ie})\mathbf{i}=[\mathbf{i}(m\mathbf{e})]\mathbf{i}=(\mathbf{ia})\mathbf{i}.$$

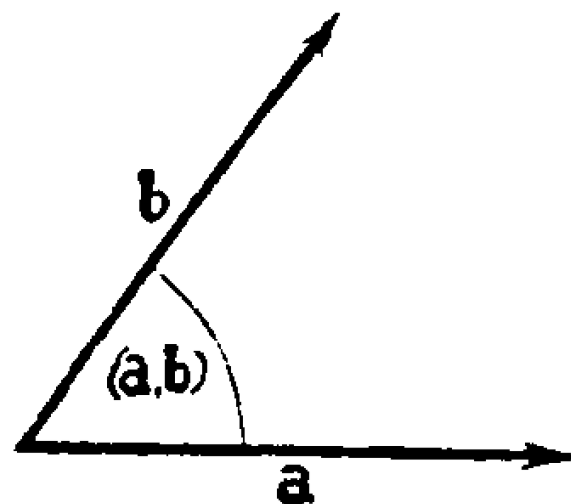


图 110

现在我们来求图 111 所画的三个矢量 **a**, **b** 和 **a**+ **b** 在单位矢量 **i** 上的投影. 因为矢量 **a** 和 **b** 的投影之和等于它们的和 **a**+ **b** 的投影，所以

$$[\mathbf{i}(\mathbf{a}+\mathbf{b})]\mathbf{i}=(\mathbf{ia})\mathbf{i}+(\mathbf{ib})\mathbf{i}.$$

我们注意到这个等式两边的所有矢量都有 k**i** 的形式，这里 k 是某一个数，于是我们得到

$$\mathbf{i}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{ia}+\mathbf{ib}.$$

最后，如果代替单位矢量 **i** 而取任意的矢量 **c**= n**i**，那么将最后这个等式所有的项乘上 n，于是它可以表示为

$$\mathbf{c}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{ca}+\mathbf{cb}.$$

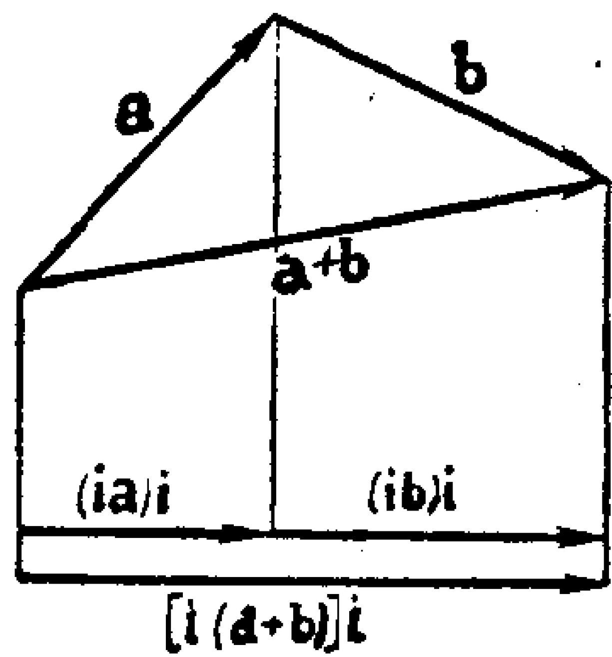


图 111

这样，我们证明了数量积具有分配律的性质. 这一重要的性质我们还可以用另外的办法来证明：选取和给定的矢量 **c** 平行的单位矢量 **i**，并且利用两个矢量之和在任一方向上(特别是在矢量 **c** 的方向上) 的投影等于这两个矢量的投影之和.

从所证明的数量积的性质推出：当任一矢量和两个或更多个矢量之和相乘时，只要计算这个矢量和被加的每一个矢量彼此的乘积，然后求所有这些乘积之和就行了，而且两个矢量和的数量积等于一个和的每一个被加项乘以另一个和的所有被加项的数量积之和.

于是，我们证明了：对于矢量来说，上面所采用的两个矢量的数量积的定义，保持了数的乘法的许多熟知的性质. 唯一的区别是：对于矢量来说，“两个因子的乘积，仅当其中一个因子为零时等于零”这一法则不再成立了.

知道了两个矢量 **a** 和 **b** 的坐标（a_1，a_2，a_3）和（b_1，b_2，b_3），我们来计算 **a** 和 **b** 的数量积。根据坐标的定义，矢量 **a** 和 **b** 可以表示成形式

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k},$$

$$\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}.$$

计算矢量 **a** 和 **b** 的分量的两两之间的乘积，并考虑到矢量 **i**，**j**，**k** 中任何两个的数量积等于 0，而它们之中的每一个与自身的数量积等于 1，我们得到

$$\mathbf{ab}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

当然，如果矢量在平面上，那么就没有必要引进第三个坐标了，而数量积仅仅是两对，

而不是三对坐标的乘积之和.

如果矢量 $\mathbf{v}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 数乘以矢量 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, 那么我们得到

$$x=\mathbf{i}\mathbf{v},\quad y=\mathbf{j}\mathbf{v},\quad z=\mathbf{k}\mathbf{v},$$

由此有

$$\mathbf{v}=(\mathbf{i}\mathbf{v})\mathbf{i}+(\mathbf{j}\mathbf{v})\mathbf{j}+(\mathbf{k}\mathbf{v})\mathbf{k}.$$

7) 用数量积可以毫无困难地引出**余弦定理**. 我们这样选取三角形的边 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 的方向, 使（图112）

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}.$$

这个等式的每一边和自身作数乘时得到

$$\mathbf{c}^2=(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2-2\mathbf{a}\mathbf{b},$$

即

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

8) 最后, 我们指出, 数量积可以解答某些题目, 甚至于在问题的条件中所涉及到的仅

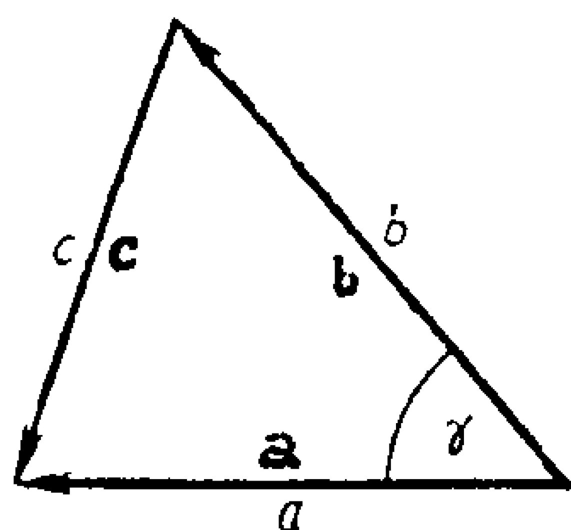


图 112

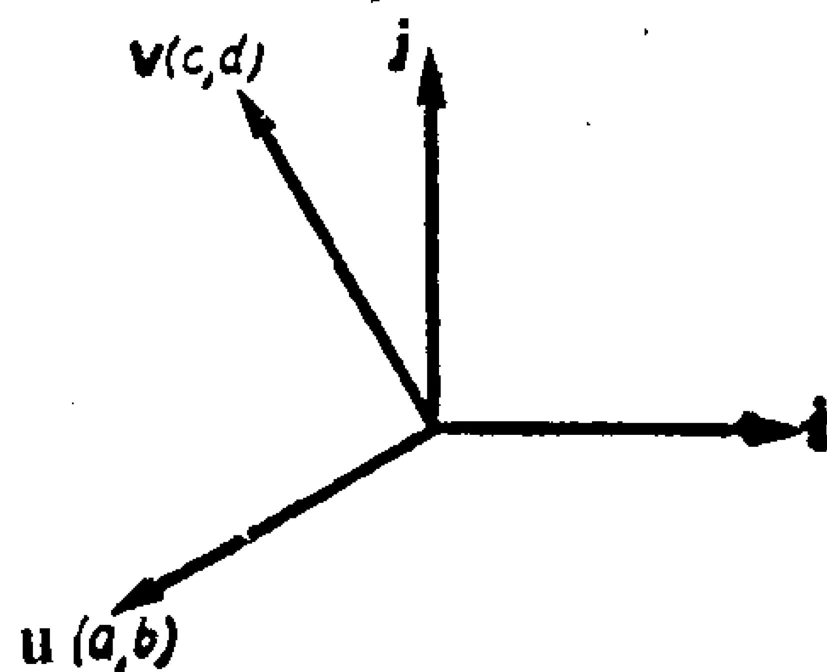


图 113

仅是数. 我们从109题开始.

由原题关系式（1）和（2）推出, $\mathbf{u}\{a,b\}$ 和 $\mathbf{v}\{c, d\}$ 是单位矢量（图113）, 而关系式（3）意味着 $\mathbf{u}\mathbf{v}=0$（向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 相互垂直）. 在6）中知道, 矢量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的坐标可以表示成

$$a=\mathbf{i}\mathbf{u},\quad b=\mathbf{j}\mathbf{u},\quad c=\mathbf{i}\mathbf{v},\quad d=\mathbf{j}\mathbf{v}.$$

利用在6）中最后得出的关系式, 且在它里面用矢量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 来代替 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$, 而一次用 $\mathbf{i}$ 代替 $\mathbf{v}$, 另一次用 $\mathbf{j}$ 代替 $\mathbf{v}$, 得到

$$\mathbf{i}=(\mathbf{u}\mathbf{i})\mathbf{u}+(\mathbf{v}\mathbf{i})\mathbf{v},$$
$$\mathbf{j}=(\mathbf{u}\mathbf{j})\mathbf{u}+(\mathbf{v}\mathbf{j})\mathbf{v}.$$

用矢量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的坐标来代替数量积, 我们得到

$$\mathbf{i}=a\mathbf{u}+c\mathbf{v},$$
$$\mathbf{j}=b\mathbf{u}+d\mathbf{v}.$$

计算矢量 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 的数量积, 我们求得

$$0=ab+cd.$$

（$\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 的数量积等于零, 因为这两个矢量相互垂直, 由此推出等式的左边为零. 在计算右边时, 我们利用了 $\mathbf{u}^2=\mathbf{v}^2=1$ 和 $\mathbf{u}\mathbf{v}=0$）. 计算一下矢量 $\mathbf{i}$ 与 $\mathbf{j}$ 的每一个和自身的数量积, 不难证实 $a^2+c^2=1$, $b^2+d^2=1$.

109题还可以有其它的解法. 我们把数 a, b, c, d 排成两行两列的表的形式:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

这种四个数的表叫做二阶矩阵. 所谓矩阵的两行（不一定是不同的行）的数量积是指这两行同一列的元素相互乘积之和. 这样的定义和前面所采用的两个矢量的数量积的定义是一致的. 用类似的方法来定义矩阵的两列的数量积. 109题的条件用“矩阵的语言”可叙述作: **如果二阶矩阵的任意不同行的数量积等于0，而每一行和自身的数量积等于1，那么矩阵的列也具有同样的性质.**

不但如此，类似的断言对于三阶矩阵也是正确的❶，三阶矩阵是由三行和三列构成的矩阵. 它的证明完全是重复前面所进行的，我们把它留给读者.

9） 利用矢量的数量积来解答某些其它试题.

在57题中说到了四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的对角线垂直的必要充分条件. 设 $\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$，$\mathbf{p}_3$，$\mathbf{p}_4$ 是四边形的顶点关于某个任意选取的点O的矢径（图114）. 四边形的边的平方等于相应的顶点的矢径之差的数量平方（即矢径之差和自身的数量积）. 例如，如果 $a=P_1P_2$，那么 $a^2=(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2$.

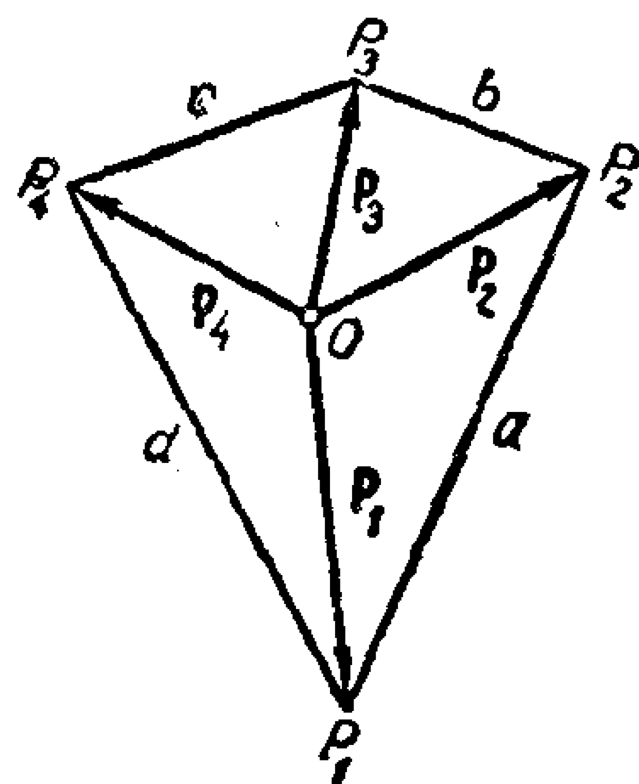


图 114

利用上面所列举的数量积的性质，我们将四边形的对边平方和之差变成下面的形式

$$\begin{aligned}&(a^2+c^2)-(b^2+d^2)=\\&=(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)^2+(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4)^2-(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3)^2-(\mathbf{p}_4-\mathbf{p}_1)^2=\\&=-2\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2-2\mathbf{p}_3\mathbf{p}_4+2\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3+2\mathbf{p}_4\mathbf{p}_1=\\&=2(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3)(\mathbf{p}_4-\mathbf{p}_2).\end{aligned}$$

由所得到的表达式推出，若要四边形（它的每一个顶点彼此不同）的对边平方和之差变为零，当且仅当矢量 $\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3=\overrightarrow{P_3P_1}$ 和 $\mathbf{p}_4-\mathbf{p}_2=\overrightarrow{P_2P_4}$ 相互垂直，即它的对角线彼此构成直角时才可能. 这正是57题所断定的.

10） 因为方向相同的矢量的数量积等于它们长度的乘积，而相互垂直的矢量的数量积等于0，73题所要证明的等式左端的被加项可以表示成下面的形式:

$$AB\cdot AE=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC},$$

类似地，

$$AD\cdot AF=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}.$$

因为根据平行四边形法则，矢量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 之和等于 $\overrightarrow{AC}$，所以由此可推出

$$AB\cdot AE+AD\cdot AF=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2=AC^2.$$

110. 在象棋盘的64个方格中，标出16个方格，使得8行中的每一行和8列中的每一列都有两个标出的方格. 证明: 可以把8个黑子和8个白子放在标出的方格上（每格放一子），使得每一行和每一列有一个白子和一个黑子.

【证明】我们从任意一个标出的方格开始，从它走到和它同一行的另一个标出的方格，再从这个方格走到和它同一列的第三个标出的方格. 就这样依次沿着行和列从一个标出的方

❶ 甚至于对任意阶的矩阵都正确. ——俄译编辑注.

格走到另一个标出的方格．我们迟早会遇到原来曾经到达过的标出的方格（图115）．这种方格只能是开始出发的方格．事实上，假设沿着我们走的路线，第一次走到了方格M，走进方格M的路线是直线段AM，从方格M走出来的路线是直线段MB．那么当我们离开了方格M以后，我们再也不会再回到方格M了．假若第二次沿着直线段CM又走到了方格M．且标出方格A,B,C是不同的．那么它们之中的每一个要么和M同行，要么和M同列．但这是不可能的．因为根据本题条件，在每一行和每一列（包括在方格M相交的行和列）只有两个标出方格．这样一来．我们所走的路线

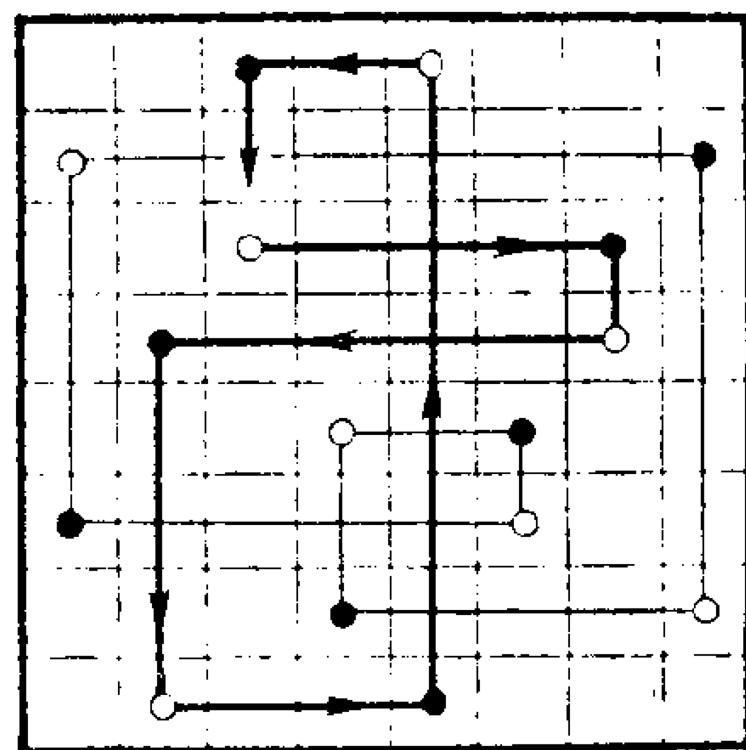


图 115

是封闭的，它包含有偶数个标出方格，因为各个单独的直线段轮流通过象棋盘的行和列．当沿着我们的路线走时，我们可以在每第二个走到的标出方格上放上黑子，而在其余的方格上放上白子，这样便使得我们走的路线所通过的每一行和每一列都是一个白子和一个黑子．

如果当走完一个封闭路线时，我们发现还有些行和列没有到过，有些标出方格在路线的外边，那么我们从它们之中的任何一个开始，又可以构作第二条封闭路线，并且在它转角的方格上交替放上黑子和白子，使得新的路线所通过的每一行和每一列仍然是有一个黑子和一个白子．新的路线和原来的路线不会有公共的（“角上的”）标出方格，因为在每一行和每一列中，我们所走的直线段只能属于一条路线，而属于公共方格所在的行和列已经被第一条路线“占用”了．

只要象棋盘的 8 行中的每一行和 8 列中的每一列不是都有一个黑子和白子，这种封闭路线的构作就一直进行下去．★

§52. 图论的某些知识

试将110题和下面的问题进行比较．某杂志发表了 8 个题目．当从读者寄来的解答中挑选每道题的两个解答，准备把它们刊登在下一期杂志上的时候，编辑发现所有16个挑选出来的解答是 8 个读者提出的，而且他们之中每一个人正好都提出了 2 个解答．

证明：编辑可以这样发表每一道题的一个解答，使得在发表的解答中，这 8 个读者中的每一个人都有一道解答．

两个题目明显的类似一眼就可看出来．为了更加强调这一点，我们把题目的条件用“图画”的形式来表示．我们利用象棋盘的记号法：用数字将棋盘的横行编号，用小写拉丁字母表示它的竖列．在平面上画16个点，其中 8 个点用数字 1 到 8 来编号，而其余 8 个点用字母 a 到 h 来表示．如果在我们的图中，将数字表示标出方格所在行的点和字母表示标出方格所在列的点用线连接起来，我们就在图中画出了这个标出的方格．

图116表明了满足110题的条件的标出方格的布局的一种方案．同时，如果把数字看作是发表在杂志上的题目的编号，把字母看作是寄来解答的读者的“笔名”，把连接点的线看作是指明解答出于哪个读者（线是连接读者的“笔名”和他所解答的题目的编号的），那么图116也可以看作是上面所叙述的题目的直观表示．

不难看出，不管对图116作哪一种解释，从它所引出的16根线中可以挑选出 8 根这样的线，它们的端点和所有16个点重合．因此，从数学的观点来看，竞赛题110和关于杂志的读者寄解答的问题是一样的（等价的）．

可以化为这一类数学问题的，还有许多其它的问题，例如下面的问题（其中用 n 来代替数字8）．

有 n 个姑娘和 n 个小伙子去参加舞会．每个小伙子认识两个姑娘，而每个姑娘认识两个小伙子．证明：可以将所有参加舞会的姑娘和小伙子分成 n 对，使得每一对舞伴中的小伙子和姑娘是彼此认识的．

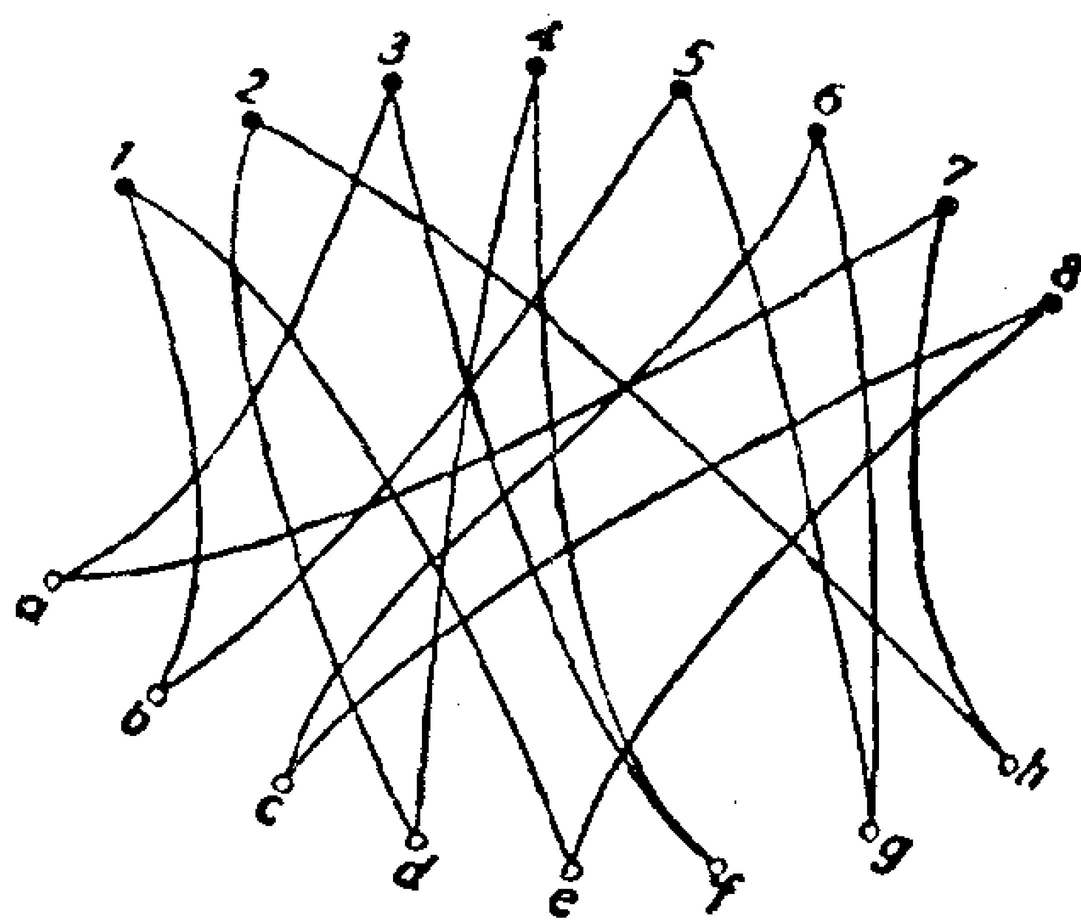


图 116

使每一个小伙子和一个带有数字（编号）的点对应，使每一个姑娘和一个带有字母的点对应，将其"主人"彼此相识的点用线连起来．可以断定：从所引的线中，可以挑选出这样 n 条线，它们的端点和所有 $2n$ 个点重合．

我们研究由点以及连接它们的线所构成的这些图案的某些一般的性质．

点（顶点）和将它们之中的某些点两两连接起来的线（边）的集合叫做图．

我们强调一下，图的边不一定是直线．我们规定，两个不同的边只能有有限个（一个或两个）公共点．如果图的边相交于内点，那么我们并不认为它是公共点．当把图的顶点放在三维空间中的时候，我们总可以用一条或若干条线将它们彼此成对连接起来，而所得到的图的任何两条边都不相交．但是为了做到这一点，在二维平面上是不够的．例如，平面上的任意5个点不可能彼此用线（为此总共要10条线）这样连接起来，使得所得到的图的边不相交于内点，不管我们使这些边具有多么复杂的形状．对有六个顶点 A_1，A_2，A_3，B_1，B_2，B_3 和边 A_1B_1，A_1B_2，A_1B_3，A_2B_1，A_2B_2，A_2B_3，A_3B_1，A_3B_2，A_3B_3 的任意的平面图，类似的断言也是正确的．

我们把上面两个断言的证明留给读者．（第二个断言不是别的，而是将古老的关于房屋和水井的问题"译成"了图论的语言：在平面上有三座房屋和三口水井，可以从每一座房屋到每一口水井修一条小路而任何两条小路都不相交吗？）

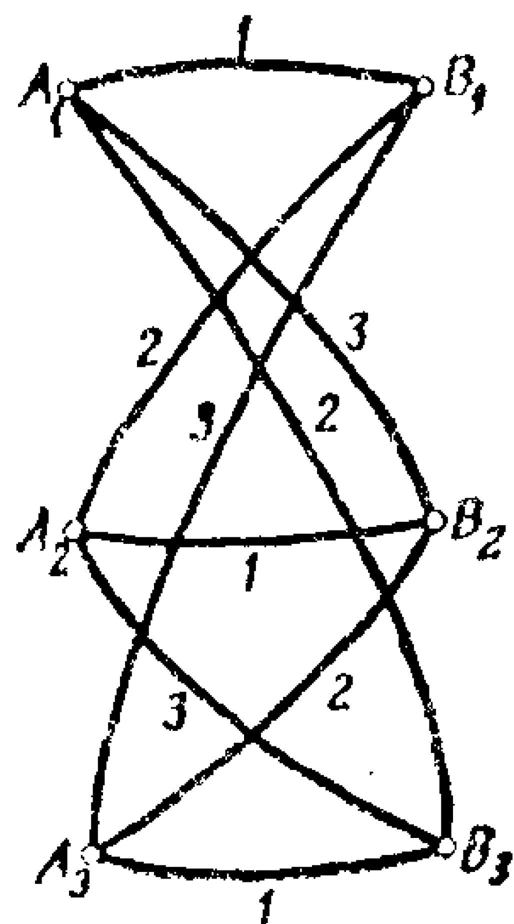


图 117

从上面所引的例子看出，在平面上构作具有任意个数顶点且彼此之间以任意给定的方式用边连接起来的图只有认为边的内交点（不和顶点重合）是"假的"的时候才有可能，即规定：在边的内交点处，一条边看成是从另一条边的下面通过的．于是图116所画的图只有16个顶点（其中一部分用数 1 到 8 编号，另一部分用 a 到 h 的字母表示）．图117所画的图有 6 个顶点：A_1，A_2，A_3，B_1，B_2，B_3．所有其余的边的交点应该认为是两个不同的点，一个属于"从上面"通过的边，另一个属于"从下面"通过的边．

对每一个平面图可以进行变形而"重新画图"．

图论从事于研究图的这样一些性质，它们仅仅依赖于顶点的个数和哪些顶点彼此之间有边连接（以及两个给定的顶点有多少条边相连）．图论中所证明的断言与图的形状或它的边的长度是毫无关系的．

两个特殊类型的图在图论中起着特别重要的作用．

如果图的每一个顶点属于（连接）同样个数的边，这种图叫做**正规的**或**齐次的**．对于正规图的所有顶点的这个共同的数，我们称之为图的**阶数**．例如，任意的正多面体的棱和顶点构成正规图．在图117中画的是三阶的这一类的图．如果图不是正规的，那么对于它的每一个顶点各别地定义阶数是合理的．所谓顶点的**阶数**是指它所属于的边的个数．

1 阶的正规图由单个的边组成．**2** 阶正规图要有趣得多．每一个这样的图由一个或若干个**封闭的线——环路**——组成．例如，两个四边形和一个三角形构成包含有11个顶点和11条边的 2 阶正规图．

如果包含在一个图里面的所有环路都由偶数个边组成，这个图叫做**偶回路**．立方体的顶点和棱所对应的图可以是偶回路的例子．不难证实，由它的棱不能挑选出 3 条，5 条或任意其它奇数条棱，使这些棱构成环路（即不能构作"三角形"，"五边形"或任何其它具有奇数个边的"多边形"）．上面所叙述的三个题目所对应的图也可以作为偶回路的例子：所有的回路含有偶数个顶点，因而含有偶数个边，因为边是轮流连接用数字表示的顶点和用字母表示的顶点的．

现在我们已经具有了定义**图的乘积**的所有必要知识．设图G_1，G_2，G_3，…具有相同的顶点，但是它们之中的任何两个图不含有公共边．这时由这些顶点以及图G_1，G_2，G_3，…所有的边所组成的图G叫做图G_1，G_2，G_3，…**的乘积**，记作

$$G=G_1G_2G_3\cdots.$$

于是，乘积图的顶点的个数等于因子图中任何一个图的顶点的个数．显然，正规图的乘积是正规的，它的阶数等于图因子的阶数之和．例如，四个 1 阶正规图的乘积是 4 阶正规图．

自然会产生逆问题：给定的正规图可以分解成因子的乘积吗？或者也可以说，它能"因子分解"吗？

我们从研究 2 阶正规图开始．（如果说 k 阶图，那么"正规的"这个词可以省略，因为图的阶仅仅是对正规图定义的．）这些图中最简单的是"三角形"：三个顶点，用三条边两两连接起来．显然，三角形不能分解成两个 1 阶图的乘积．换句话说，从三角形的三条边中不能挑选出这样两个边，使得三个顶点中的每一个顶点属于一个而且仅仅属于一个所选取的边．

和三角形不同，四边形可以分解成两个 1 阶图的乘积：其中一个包含两个对边，另一个包含四边形的另外两个对边．五边形不能分解成两个 1 阶图的乘积，六边形可以这样分解，等等．对于具有更多的边的 2 阶图可以断定：如果无论是原来的图，或者是包含在它里面的所有的环路都只含有偶数个边，那么这个图可以分解成两个 1 阶图的乘积．如果即使是一个环路的边数是奇数，那么一定不能分解．在第一种情况下，图是偶回路，在第二种情况下，图属于另一种类型的图．

于是，我们证明了定理：

A） **所有的 2 阶偶回路可以分解成两个 1 阶图的乘积．**

它是下面的Д・寇尼格定理的特殊情况：**所有的 n 阶偶回路可以表示成 n 个 1 阶图的乘积．**（我们注意到，当$n=2$时，图属于偶回路对于它能分解成两个 1 阶图的乘积是必要的．对于任意的 n，图属于偶回路不再是它能分解成 n 个 1 阶图的乘积的必要条件，而仅仅是充分的条件．这一点读者自己可以不困难地证实．）例如，图117所画的 3 阶图可以表示成 3 个 1 阶图的乘积．每一个 1 阶图的边分别用数 1，2，3 来表示．一般的寇尼格定理的证明

是十分复杂的（当$n=3$时已十分复杂了），因此，我们仅只限于在这里叙述它. 在$n=2$之后，最简单的情况是$n=4$. 我们建议读者试试自己的能力并设法证明当$n=4$时的寇尼格定理.

但是我们回到$n=2$的情况并设法回答下面的问题：**2 阶偶回路含有多少个1 阶的因子？**

显然，如果图由一个唯一的多边形（有偶数个边）组成，那么1阶因子的个数等于2：凡相邻的边分别属于两个因子，这样把所有的边分成两组，得到两个1阶因子. 在比较一般的情况下，当图由v个多边形（都有偶数个边）组成时，如果从每一个多边形的两个1阶因子中取出一个因子联合在一起，我们将得到图的所有1阶因子. 因此，整个图的1阶因子的个数等于这种不同取法的个数，即2^v.

B） **如果2 阶偶回路由v个连通的片（具有偶数个边的多边形）构成，那么包含在它里面的1 阶因子的个数等于2^v.**

在求解关于包含在大于2阶的图中的1阶因子的个数问题时遇到了非常大的困难，至今还没有得到完全的解决. 当$n>2$时，包含在n阶偶回路中的1阶因子的个数不仅仅由连通的分支（片）的个数v来决定. 读者可以研究n不太大的某个偶回路来证实这一点.

正像上面所引的例子所表明的那样，定理A和B可以解决某些组合问题. 只需要事先把这些问题"翻译成"图论的语言. 于是，图论能够解答110题，甚至能解答更一般的关于在$m\times n$的象棋盘上放黑子和白子的问题以及相应的关于在杂志上发表题目和寄来解答（这时题目的个数可以等于m，而解答的个数等于n）的问题. 关于舞伴的对子问题可以借助于定理A解决. 定理B可以判断任何一个问题可以有多少种解答，解答的总个数等于数2的某个正整数次幂.

应该看到，关于熟人对的问题以及关于题目和寄解答的问题都可以借助于图论来解决，甚至于如果代替2而取任意的自然数k也是如此. 为此只需要利用上面援引而未加证明的寇尼格定理就行了，根据这个定理，对任意的自然数n，n阶偶回路可以分解成1阶图的乘积.

111. 圆k_1和k_2相切于点P. 过点P作一条割线和圆k_1交于点A_1，和圆k_2交于点A_2. 另一条也通过点P的割线和圆k_1交于点B_1，和圆k_2交于点B_2. 证明：三角形PA_1B_1和PA_2B_2相似.

【证法1】 假设r_1是圆心为O_1的圆k_1的半径，r_2是圆心为O_2的圆k_2的半径（图118）.

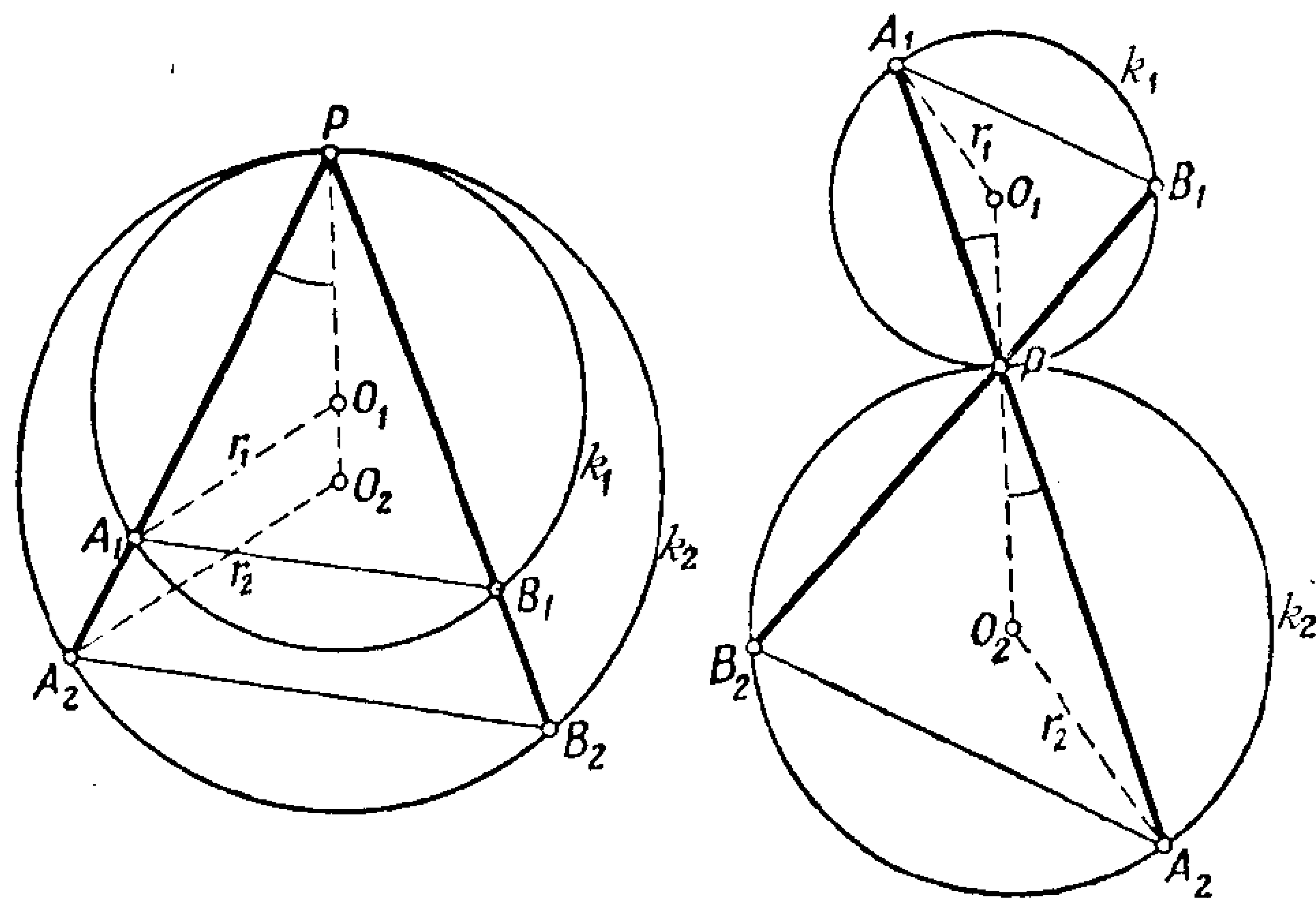


图 118

$\triangle PO_1A_1$和$\triangle PO_2A_2$是相似的，因为在顶点P处的顶角，或者重合（当圆k_1和k_2相内切时），或者作为对顶角而相等（当圆k_1和k_2相外切时），而且它们都是等腰三角形．用类似的办法可以证明$\triangle PO_1B_1$和$\triangle PO_2B_2$相似．由相似三角形的对应边成比例，我们得到

$$PA_1 : PA_2 = r_1 : r_2 \text{和} PB_1 : PB_2 = r_1 : r_2,$$

由此得到

$$PA_1 : PA_2 = PB_1 : PB_2.$$

于是，在$\triangle PA_1B_1$和$\triangle PA_2B_2$中，两组对应边成比例，且其夹角要么重合，要么作为对顶角而相等．因此，$\triangle PA_1B_1$和$\triangle PA_2B_2$相似，这就是所要证明的．

【证法2】❶因为k_1和k_2相切，我们可以通过它们的切点作两圆的公切线MN(图119).

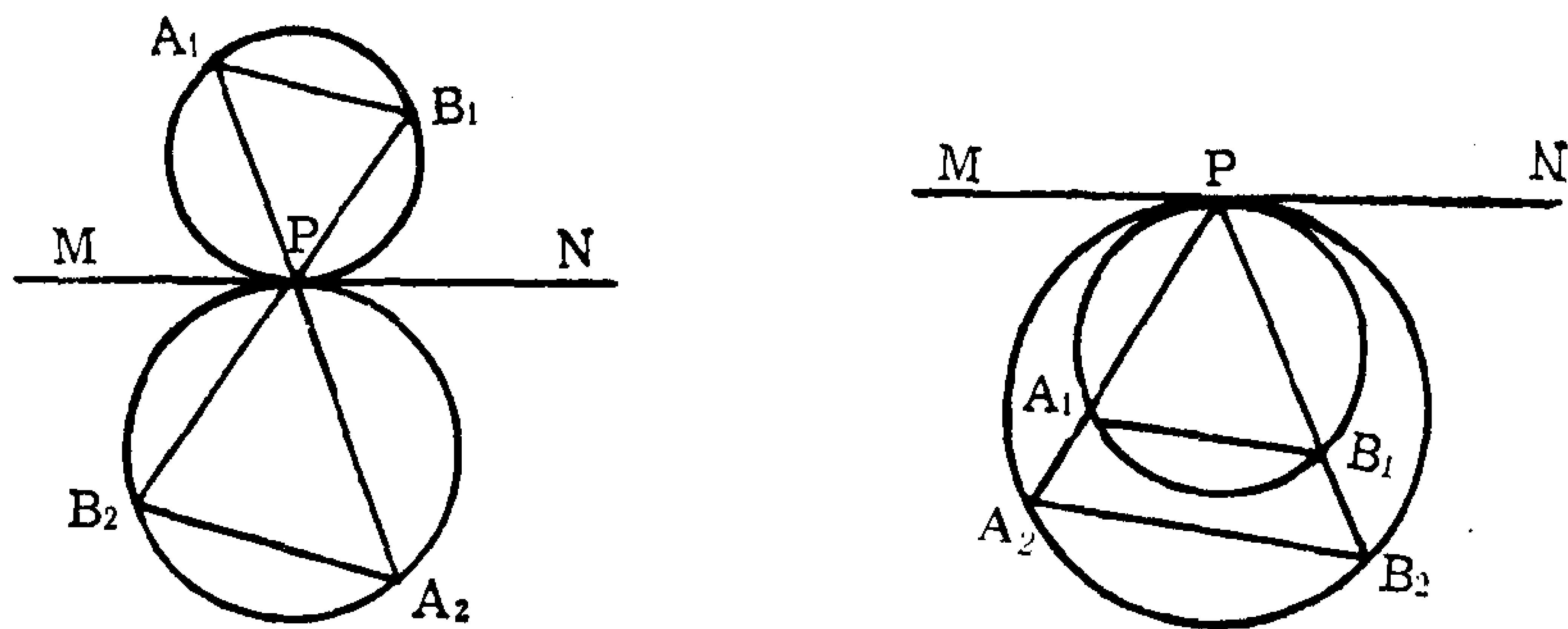


图 119

由于弦切角和它所夹的圆弧上的圆周角相等，于是当两圆内切时，

$$\angle PB_1A_1 = \angle MPA_2 = \angle PB_2A_2,$$

当两圆外切时，

$$\angle PB_1A_1 = \angle MPA_1 = \angle NPA_2 = \angle PB_2A_2.$$

对另一组角也可同样论证．总之，无论在哪种情况下，总有$\triangle PA_1B_1 \backsim \triangle PA_2B_2$．

❶ 系中译者补加.

十五、1934年—1935年试题及解答

112．假设

$$A=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n},$$

这里n是正整数．证明：在序列

$$A,2A,4A,8A,\cdots,2^kA,\cdots$$

中，从某处开始所遇到的都是整数．

【证明】将分数A的分子和分母同乘以$2\times4\times6\times\cdots\times(2n-2)$，我们得到

$$A=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times\cdots\times(2n-1)}{[2\times4\times6\times\cdots\times(2n-2)]^2\times2n}=$$

$$=\frac{1}{2^{2n-1}}\times\frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2n}=\frac{1}{2^{2n-1}}\times\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}=\frac{1}{2^{2n-1}}C_{2n-1}^{n-1}.$$

上式右端的二项式系数C_{2n-1}^{n-1}是整数（等于从$2n-1$个元素中取出$n-1$个元素的组合数）．因此

$$2^{2n-1}A$$

是整数，这就是所要证明的．

如果利用在阶乘的标准分解式中含有给定素数的最大指数的勒让德定理，也可以证明本题的断言．

113．在给定圆中，怎样的圆内接多边形的边的平方和达到最大值？

【解法1】1） 如果在圆内接多边形中，有一个角是钝角，那么当去掉这个钝角的顶点时，所得到的圆内接多边形，其边的平方和大于原来的圆内接多边形的边的平方和，因为在钝角三角形中，钝角所对的边的平方大于其它两边的平方和（见57题的证法2和§38)．

因为n边形的内角和等于

$$(n-2)180°=[n+(n-4)]90°,$$

所以在任何一个五边形和四边形（除了矩形以外）中，至少有一个钝角．于是应该在三角形和矩形中来寻求其边的平方和具有最大值的圆内接多边形．

2） 假设α,β,γ是内接于给定圆的三角形的三个角，r是圆的半径．三角形的边的平方和可以表示成下面的形式（见第6题解法1）：

$$4r^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma).\qquad(1)$$

利用§53和§9.1）中的公式，可以将括弧中的表达式变成

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1-\cos^2\alpha+\frac{1}{2}(1-\cos2\beta)+$$

$$+\frac{1}{2}(1-\cos2\gamma)=2-\cos^2\alpha-\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)=$$

$$= 2-\cos^2\alpha+\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)=$$

$$= 2-\left[\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos(\beta-\gamma)\right]^2+\frac{1}{4}\cos^2(\beta-\gamma).$$

上面最后一个表达式当

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\cos(\beta-\gamma), \quad \cos(\beta-\gamma)=1$$

时有最大值$\frac{9}{4}$. 由上式推出（因为我们所研究的是三角形的角）：$\beta=\gamma$，$\alpha=60°$. 因此，$\beta==\gamma=60°$. 于是由关系式（1），在半径为r的圆中，圆内接正三角形的边的平方和等于$9r^2$，而其它任何圆内接三角形的边的平方和小于$9r^2$.

3）在半径为r的圆中，圆内接矩形的边的平方和等于$8r^2$，因此，小于正三角形的边的平方和.

于是，在所有内接于给定的圆且自不相交的多边形中，正三角形的边的平方和最大. ★

【解法2】 1） **如果a，b，c是三角形的边，m是边c上的中线，那么**

$$a^2+b^2=\frac{c^2}{2}+2m^2.$$

假设k是中线在边c上的投影，h是边c上的高（图120）. 边a和b在边c上的投影是长为$\frac{c}{2}+k$和$\left|\frac{c}{2}-k\right|$的线段. 我们来研究三个直角三角形，它们具有公共的直角边h，其斜边分别为a，b，m. 根据勾股定理，

$$a^2+b^2=2h^2+\left(\frac{c}{2}+k\right)^2+\left(\frac{c}{2}-k\right)^2=$$

$$=\frac{c^2}{2}+2(h^2+k^2)=\frac{c^2}{2}+2m^2.$$

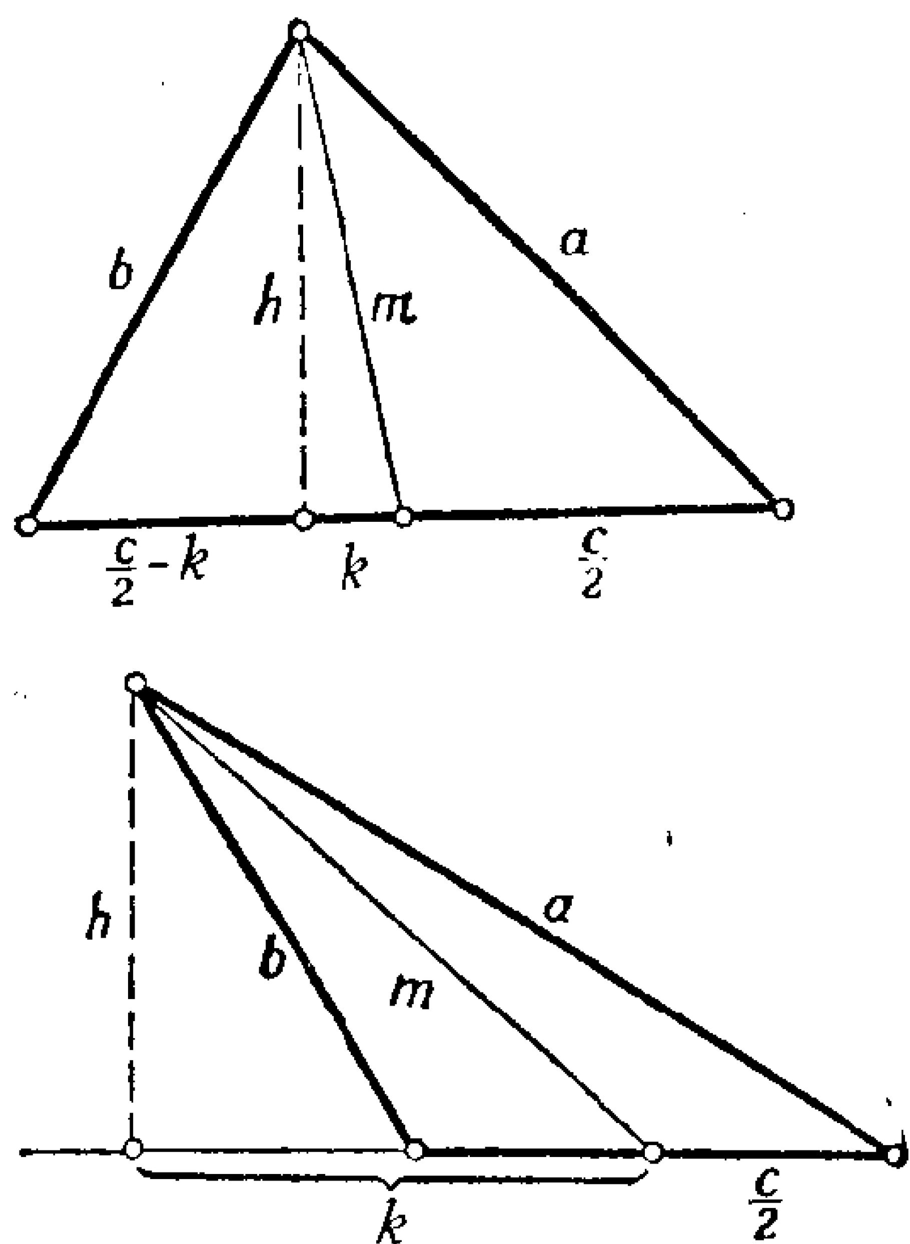


图 120

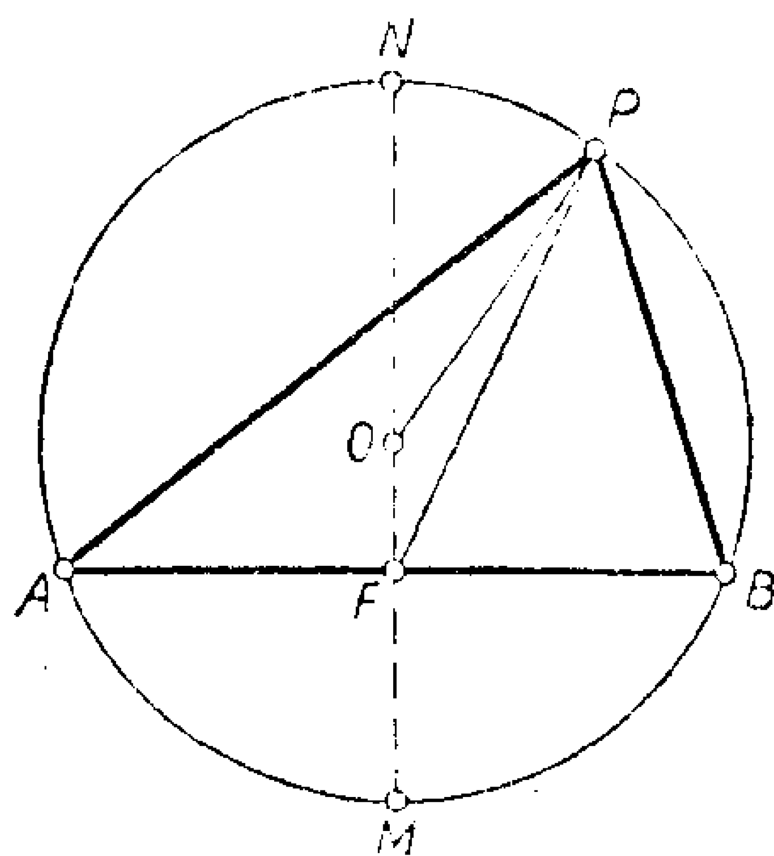


图 121

2） **如果AB是一条弦（小于直径），把圆周分成一条大弧和一条小弧，M是小弧的中点，N是大弧的中点. 那么，当点P沿着圆周从点M往点N移动时，平方和PA^2+PB^2单调上升**（图121）.

为了证明这个定理，我们利用上面已经证明过的断言. 于是只要证明当点P沿着圆周从M往N移动时，连接P和弦AB的中点F的线段PF的长度单调上升. 这可证明如下：当点P移动时，在$\triangle POF$中，边OF和OP的长度不变，而$\angle MOP$单调上升，所以它所对的边PF也单调上升（见§38）.

3） 由 2）中所证明的定理推出，对于圆内接多边形的顶点P来说，如果顶角APB是钝角或直角，那么当用弦来代替相邻的边AP和PB时，我们得到新的内接多边形，而且它的边的平方和大于（如果$\angle APB$是钝角）或等于（如果$\angle APB$是直角）原来的多边形的边的平方和.

重复“削去”钝角和直角足够多次，我们总可以把任意一个圆内接多边形化为内接于同一个圆的三角形，而且边的平方和大于或等于原来的边的平方和，仅仅当所得到的三角形的一个边和外接圆的直径重合时，边的平方和才会相等. 这样一来，如果我们证明了在所有的内接于给定圆的三角形中，正三角形的边的平方和最大，那么我们就证明了正三角形是本题的答案.

4） $\triangle APB$内接于给定圆，我们来研究它的边的平方和. 如果三角形是不等边的，我们选取这样的记号，使得$\overset{\frown}{PA}$是最大的弧，$\overset{\frown}{PB}$是最小的弧. 于是，$\overset{\frown}{AB}$小于圆周的一半，因为要不然的话，它就是最大的弧了. 由于$\triangle APB$不等边，所以$\overset{\frown}{AP}$大于圆周的三分之一. 我们将顶点P向点N移动（图121）. 根据在 2）中所证明的定理，$\triangle APB$的边的平方和将单调上升. 沿着圆弧移动点P，使点P到达那样的位置：或者$\overset{\frown}{AP}$等于圆周的三分之一，或者$\overset{\frown}{PB}$等于圆周的三分之一，或者$\overset{\frown}{AP}$和$\overset{\frown}{PB}$同时等于圆周的三分之一. 后一种情况只有当$\overset{\frown}{AN}$和$\overset{\frown}{NB}$都等于圆周的三分之一时才有可能. 如果$\overset{\frown}{AN}$和$\overset{\frown}{NB}$小于（或大于）圆周的三分之一，那么应该使点P移动到使$\overset{\frown}{AP}$（或$\overset{\frown}{PB}$）等于圆周的三分之一的位置. 因此，在给定圆中，对于任何一个不等边的内接三角形，都可以作出一个内接于同一圆的三角形，其边的平方和更大，而且一个边所对的劣弧等于圆周的三分之一.

对于所得到的三角形，我们又可以应用上面的论证，不过这时用$\overset{\frown}{AB}$表示等于圆周的三分之一的那一段弧.

于是，我们证明了：正三角形的边的平方和大于内接于同一圆的任何其它三角形的边的平方和.

§53. 关于将三角函数的和化为乘积

在上面所进行的变换中，我们利用了关系式

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

此外，注意到下面的关系式也是有益的：

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

它们可以从两角和的正弦和余弦的公式推出，如果在每一个关系式的左边代之以

$$x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}, \quad y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}.$$

114．假设在平面上给定了无穷多个矩形，它们的顶点的直角坐标是

$$(0,\ 0),\quad (0,\ m),\quad (n,\ 0),\quad (n,\ m),$$

其中 m 和 n 是正整数．证明：在这些矩形之中，总可以挑选出两个矩形，使得一个矩形在另一个矩形里面．

【证法1】我们把本题条件中所说的 n 叫做矩形的宽，m 叫做矩形的高．

因为矩形的宽 n 是正整数，所以，在它们之中有一个最小的（见§2和§3）．我们选取任意一个有最小宽 n_l 的矩形，假设 m_l 是它的高．另外再任意取 m_l 个矩形．如果在这 m_l 个矩形中，有一个矩形的高大于 m_l，那么这个矩形将把具有最小宽 n_l，高为 m_l 的那个矩形包含在内．如果在所取的 m_l+1 个矩形中，没有任何一个矩形的高大于 m_l，那么这 m_l+1 个矩形的高的值只能是 1，2，…，m_l，因此，它们的高不可能完全不同（见§30．狄里希利原理）．这样一来，在所取的 m_l+1 个矩形中，至少有两个矩形的高相等，而一个包含在另一个的里面．

【证法2】1）如果一个矩形的高或宽等于另一个矩形的高或宽，那么在这两个矩形中，一定有某一个包含另一个．

2）如果任意两个矩形的高和宽都不同，那么我们任取一个矩形，假设它的宽为 n，高为 m．由于任何两个矩形的宽和高都不同，所以，比我们所取的矩形要窄的矩形的个数是有限的（不多于 $n-1$ 个），而且比这个矩形要矮的矩形的个数也是有限的（不多于 $m-1$ 个）．除了这些有限个矩形之外，其它所有的矩形都包含我们所选取的那个矩形．

【证法3】我们来证明，在本题的条件下，**存在一个无穷的矩形序列，在这个序列中，前一个矩形包含在后一个矩形之中**．

1）如果任何一个矩形都包含在另外某一个矩形之中，那么所要证明的断言显然成立．

2）如果在矩形中有这样一个矩形，它不包含在任何其它的矩形内，那么，所有其它的矩形，要么比这个矩形窄，要么比这个矩形矮．但是给定的矩形有无穷多个，因此，比较窄或比较矮的矩形也有无穷多个．不失一般性，我们可以假设有无穷多个比较窄的矩形（在相反的情况下，只要在说到矩形的宽时，用它的高来代替就行了）．这样的矩形的宽只可能取有限个不同的值．因此，在它们之中，一定有无穷多个矩形的宽是相同的．显然，它们可以排成我们所要的序列．

§54. 有向无穷图

1）在114题的证法3的 2）中，我们得到了无穷的矩形序列，它们之中的每一个包含前一个矩形．显然在 1）中也可以得到具有同样性质的无穷的矩形序列．我们来证明这个比原题更强的断言对于任意的无穷矩形序列也是正确的，只要在它的每一个无穷的子序列中，至少有一个矩形包含这个子序列的另一个矩形．〔对于顶点在点（0，0），（0，m），（n，0），（n，m）的矩形，这个断言一定成立，因为对于这种矩形的任一无穷子集合，原题的

断言是正确的.〕我们先把上面所说的较强的断言变成图论的语言再来证明它.

关于什么是图以及图论研究什么，前面已经说过了（见§52）．虽然在那里说到的仅仅是有限个顶点的图，但是图的定义的本身决没有把图含有无穷多个顶点的情况排除在外．此外，在解决图论的某些问题的时候，指出边的方向，即在两个用给定的边连接起来的顶点中，指明哪一个顶点算作起点，哪一个顶点算作终点，将是方便的．具有给定方向的边叫做**有向边**．如果图的所有的边都是有向的，那么这个图叫做**有向的**．如果不是图的所有的边是有向的，而只是某些边是有向的，那么这样的图叫做**部分有向的**．（应该指出，如果每一条无向边用两条反向的边来代替，那么任何一个图都可以认为是有向的．）．如果在一有向图中，对于任何三个顶点，如果有从第一个顶点到第二个顶点的边和从第二个顶点到第三个顶点的边，则一定有从第一个顶点到第三个顶点的边，那么这样的有向图称为可传递的有向图.

还必须引入和任意的（不一定是有向的）图有关的两个概念．如果图的任何两个顶点之间都有边相连，这样的图叫做**完全图**．由图G的部分顶点和连接它们的边所构成的图叫做给定图G的**子图**．我们说子图是在给定图G的顶点的子集合上**张成的**，如果它包含所有以这个子集合的任意一对顶点为端点的边.

2）现在我们回到114题并且把它的条件表示成无穷的有向图的形式．每一个矩形对应于图的一个顶点．如果某一个矩形包含另一个矩形，那么图的对应顶点用有向边连接起来，有向边的起点“对应”的矩形被包含在另一个矩形之中．当然这样的图没有说到矩形的边长用整数表示，也没有说到矩形的顶点是怎样分布的．这些条件以及其它的条件只是在证明图中有边存在时需要用到．在1）中已经说过，所构成的图的任何一个无穷的子图含有边．此外，所构成的图是可传递的有向图，因为如果一个矩形包含另一个矩形，而这个矩形也包含一个矩形，那么第一个矩形包含第三个矩形.

正像在1）中所提到过的那样，从本题条件推出，从矩形中可以挑选出一个矩形包含在另一个矩形之中的无穷序列．这意味着本题的图包含无穷的、可传递的、有向的完全子图．产生一个问题：仅仅由我们刚才所说的子图的性质是否能推出这种子图的存在？我们来证明这个结论是正确的，甚至于不必假设原来的图是可传递的有向图，即我们证明下面的定理：

如果无穷有向图的顶点的任一无穷子集合包含彼此有边相连的两个顶点，那么这样的图包含无穷的、可传递的、有向的完全子图.

首先我们证明，我们的图包含这样的顶点，从它发出无穷多个边或者有无穷多个边进入这个顶点．我们取图的任意一个顶点，然后选取任意一个和它没有边相连的顶点（如果这样的顶点存在的话），再后又取一个和前面的任何一个顶点都没有边相连的顶点，如果这样的顶点存在的话，等等．经过有限步之后，这个过程就中断了，因为我们的图的顶点的任一无穷子集合包含两个彼此有边相连的顶点．因此，图的其余的每一个顶点至少和所选取的顶点中的某一个顶点有边相连．这样一来，在所选取的顶点中，至少有一个顶点（我们用A_1来表示它）和无穷多个顶点有边相连．在连接顶点A_1和图的其它的顶点的边中，或者有无穷多个边是由A_1发出的（在这种情况下，我们将把A_1叫做第1类的顶点），或者有无穷多个边进入它（第2类顶点）.

假设G_1是这样的无穷子图，如果A_1是第1类的顶点，那么G_1是由从A_1发出的边的终点组成的，如果A_1是第2类的顶点，那么G_1是由进入A_1的边的起点组成的．这个子图满足定理的条件，因此，在它的顶点中可以找到这样的顶点A_2，由它发出或进入无穷多个边．继续讨论下去，我们作出了一个无穷的顶点序列A_1，A_2，…，而且在这个序列中，或者由A_i发

出连接它和所有后面的顶点的边（A_i 是第 1 类的），或者以 A_i 之后的每一个顶点为起点的边都进入 A_i（A_i 是第 2 类的）. 研究我们的序列中由同一类顶点构成的两个子集合. 至少有一个子集合是无穷的. 当取属于这个子集合的顶点的时候，我们得到无穷的、可传递的、有向的完全子图.

115. 假设 b_1，b_2，…，b_n 是正数 a_1，a_2，…，a_n 的某一个排列. 证明：

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant n.$$

【证法 1】 我们利用数

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \cdots,\ \frac{a_n}{b_n}$$

的算术平均值和几何平均值之间的不等式（见 § 12）. 因为数 b_1，b_2，…，b_n 不是别的，而是数 a_1，a_2，…，a_n 在另一种次序下的排列. 所以

$$\frac{\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}}{n}\geqslant\sqrt[n]{\frac{a_1a_2a_3\cdots a_n}{b_1b_2b_3\cdots b_n}}=1.$$

于是证明了所要证明的不等式. 等号对应于下面的情况：

$$\frac{a_i}{b_i}=1\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

也就是说，只是把数 a_1，a_2，…，a_n 中相同的数重新排列.

【证法 2】 1） 我们用完全数学归纳法来证明不等式（见 § 3）. 当 $n=1$ 时，不等式蜕化成等式，它一定成立.

2） 假设不等式对任意 $n=k$ 个正数是成立的. 我们来证明它对任意 $k+1$ 个正数也成立. 如果对某个 i，数 a_i 和 b_i 重合，那么其余的数 b 是下标不为 i 的数 a 的一个排列. 这样的数有 k 个，而且根据归纳假设，形如 $\frac{a_j}{b_j}$（$j\neq i$）的 k 个分数的和大于或等于 k. 在不等式的两边加上 1，便得到所要的不等式. 在它的左边有 $k+1$ 个被加项，而右边是数 $k+1$.

3） 如果所有的分数 $\frac{a_i}{b_i}$ 都不等于 1，那么我们用 a_i 表示 a 中最大的（如果这样的数不止一个，我们任取其中的一个）. 假设 $b_j=a_i$. 将 b_i 和 b_j 对换以后，我们得到新的和数 S'，将 S' 和原来的和数 S 来进行比较. 根据假设，$b_i<a_i$，$a_j<b_j=a_i$，因此

$$S-S'=\frac{a_i}{b_i}+\frac{a_j}{b_j}-\frac{a_i}{b_j}-\frac{a_j}{b_i}=(a_i-a_j)\left(\frac{1}{b_i}-\frac{1}{b_j}\right)=(b_j-a_j)\left(\frac{1}{b_i}-\frac{1}{a_i}\right)>0.$$

因为在新的和数 S' 中，第 i 个被加项的分子和分母相同，所以根据 2）中所证明的有 $S'\geqslant k+1$. 因此

$$S>S'\geqslant k+1,$$

这就完成了归纳证明. ★

§55. 关于某些著名的不等式的一个共同来源

1） 如果利用下面的问题的解，就可以无困难地证明115题的断言和某些其它著名的不等式.

设

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

和

$$b_1, b_2, \cdots, b_n$$

是正实数，而

$$c_1, c_2, \cdots, c_n$$

是数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的任一排列. 在和

$$S=a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n$$

中，怎样的和最大，怎样的和最小？

在某些具体的情况下，也许每一次都能正确回答这些问题. 例如，我们假设在一个箱子中放的是面值为 1 角的人民币，在第二个箱子中放的是面值为 2 角的人民币，在第三个箱子中放的是面值为 5 角的人民币，在第四个箱子中放的是面值为 1 元的人民币，允许我们从这些箱子中分别取出 3，4，5，6 张人民币，但不指定从每一个箱子中取出的张数. 也许最有利的取法是从放最大面值（每张都是 1 元的）的箱子中取出最多张数（6 张），然后从放 5 角的箱子中取张数第二多（5 张）的人民币，等等. 也许大家都会同意最不利的取法是从放 1 角的人民币的箱子中取 6 张，从放 2 角的人民币的箱子中取 5 张，等等. 这样一来，如果 c_1, c_2, c_3, c_4 表示数 3，4，5，6 的任一排列，那么❶

$$10\times6+20\times5+50\times4+100\times3\leqslant10c_1+20c_2+50c_3+100c_4\leqslant$$
$$\leqslant10\times3+20\times4+50\times5+100\times6.$$

在一般的情况下，可以有下面的断言. **在和数 S 中，最大的和数所对应的情况是：数 b 按数 a 的大小次序调整好（即数 b 中最大的数对应于数 a 中最大的数，数 b 中第二大的数对应于数 a 中第二大的数，等等），❷而最小的和数所对应的情况是：两个序列的大小次序正好相反（数 a 中最大的数对应于数 b 中最小的数）.**

如果数 a 所有的数都相等，那么对于数 b 的任一排列，和数 S 具有相同的值（当数 b 所有的数都相等的时候也一样）. 我们假设在数 a 中有不相同的，例如，设 $a_r>a_s$. 我们来比较两个和数

$$S=a_1c_1+\cdots+a_rc_r+\cdots+a_sc_s+\cdots+a_nc_n$$

和

$$S'=a_1c_1+\cdots+a_rc_s+\cdots+a_sc_r+\cdots+a_nc_n,$$

它们不同的仅仅是在第二个和数中，c_s 和 c_r 调换了位置. 因为

$$S'-S=a_rc_s+a_sc_r-a_rc_r-a_sc_s=(a_r-a_s)(c_s-c_r),$$

所以若 $c_r<c_s$，那么 $S'>S$，若 $c_r>c_s$，那么 $S'<S$.

---

❶ 在上面的一段中，原文用的是匈牙利货币的名称，为了方便我国读者，改为人民币. 这里的10表示 1 角，等等. ——中译者注.

❷ 在数 a 和 b 中可能有相等的. 自然，调动相等的数并不改变大小次序.

由给定的数 a 和 b 只能构成有限个不同的和数 S. 在它们之中总有最大的和最小的.它们正好对应于上面所说的断言，因为对于数 c 的另一种排列，所得到的和数或者是上升的，或者是下降的.

第115题是上面所证明的断言的特殊情况. 事实上，我们将数 a_1，a_2，…，a_n 以上升的次序排好，并且取

$$b_1=\frac{1}{a_1},\ b_2=\frac{1}{a_2},\ \cdots,\ b_n=\frac{1}{a_n}.$$

这时，数 b 是以下降的次序排列的，和数 S 取最小值，它等于

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=n.$$

2） 由所证明的断言可以推出许多著名的不等式. 例如，由它可以引出：**任何正数**

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

的几何平均值不大于它们的算术平均值（见§42）.

设

$$c=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

是数 x_1，x_2，…，x_n 的几何平均值. 我们构造两个数列：

$$a_1=\frac{x_1}{c},\quad a_2=\frac{x_1x_2}{c^2},\quad a_3=\frac{x_1x_2x_3}{c^3},\ \cdots,$$

$$a_n=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{c^n}=1;\quad b_1=\frac{1}{a_1},\quad b_2=\frac{1}{a_2},\quad b_3=\frac{1}{a_3},\ \cdots,\ b_n=\frac{1}{a_n}=1.$$

因为在两个数列中的数互为倒数，所以和数

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n,$$

不大于

$$a_1b_n+a_2b_1+a_3b_2+\cdots+a_nb_{n-1},$$

即

$$1+1+\cdots+1\leqslant\frac{x_1}{c}+\frac{x_2}{c}+\cdots+\frac{x_n}{c},$$

$$n\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{c},$$

所以

$$c\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

等号仅可能在

$$a_1=a_2=\cdots=a_n,$$

或

$$\frac{x_1}{c}=\frac{x_1}{c}\cdot\frac{x_2}{c}=\frac{x_1}{c}\cdot\frac{x_2}{c}\cdot\frac{x_3}{c}=\cdots=\frac{x_1}{c}\cdot\frac{x_2}{c}\cdot\frac{x_3}{c}\cdots\frac{x_n}{c}=1$$

时成立，这时

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=c.$$

3） 在 1）中所引出的断言还能够证明契比雪夫不等式，比通常的直接证明要简单得多. 设

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,$$
$$b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$$

是两个有相同次序的序列（例如，两个序列或者以上升的次序排列，或者以下降的次序排列）．这时根据我们的基本定理

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$
$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_nb_1,$$
$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_3+a_2b_4+\cdots+a_nb_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_nb_{n-1}.$$

把所得到的关系式统统加起来，我们得到

$$n(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)\geqslant(a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_n),$$

即

$$\frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{n}\geqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+\cdots+b_n}{n}. \tag{1}$$

类似地可以证明：如果 a 和 b 是两个有相反次序的序列，那么

$$\frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}. \tag{2}$$

4） 如果a_1，…，a_n是正数，此外，$\alpha>0$，$\beta>0$，那么序列a_i^α和a_i^β（$i=1,2,\cdots,n$）有相同的次序，因此根据（1）有

$$a_1^{\alpha+\beta}+a_2^{\alpha+\beta}+\cdots+a_n^{\alpha+\beta}\geqslant\frac{1}{n}(a_1^\alpha+\cdots+a_n^\alpha)(a_1^\beta+\cdots+a_n^\beta).$$

如果$\alpha>0$，$\beta<0$（a_1，a_2，…，a_n仍然是正数），那么序列a_i^α，a_i^β有相反的次序，由(2)有

$$a_1^{\alpha+\beta}+a_2^{\alpha+\beta}+\cdots+a_n^{\alpha+\beta}\leqslant\frac{1}{n}(a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha)(a_1^\beta+a_2^\beta+\cdots+a_n^\beta).$$

在$\alpha=\beta=1$的特殊情况下，我们得到

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2,$$

或

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}, \tag{3}$$

即算术平均值不大于平方平均值．

如果a_1，…，a_n和b_1，…，b_n是有相反次序的正数序列，那么由不等式（2）和（3）得到不等式

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n) \tag{4}$$

和

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant\sqrt{n(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+\cdots+a_n^2b_n^2)}, \tag{5}$$

它们比柯西不等式（见§65）

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\leqslant\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)}$$

更强．

事实上，

$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)\leqslant\frac{1}{n}\sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}\sqrt{n(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)}=$$
$$=\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)}$$

和

$$\sqrt{n(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+\cdots+a_n^2b_n^2)}\quad\sqrt{n\cdot\frac{1}{n}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)}=$$
$$=\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)}\ .$$

不等式（4）和（5）中的哪一个更强，在一般的情况下是不可能断定的，因为适当选择数 a 和 b 时，既可以使不等式（4）的右边大于不等式（5）的右边，也可以使不等式（4）的右边小于不等式（5）的右边.

116．如果集 H 的任意一点关于O的对称点仍然属于 H，点O叫做点集 H 的对称中心. 证明：有限点集不可能有两个不同的对称中心.

【证法1】假设O是点集 H 的对称中心. 因为我们所研究的集合只有有限个点，所以在这个点集中，一定有一个点 A，它到点O的距离不小于 H 的其它所有的点到点O的距离. 换句话说，如果以点O为圆心，以 OA 为半径画一个圆 G，那么集合 H 的任何点都不会在这个圆外. 和点 A 关于圆心对称的点 B 在圆 G 上，且又属于集合 H.

如果 O' 是不同于O的点，那么

$$AO'+O'B\geqslant AB\,,$$

所以在线段 AO' 和 $O'B$ 中，至少有一个线段大于线段 AB 的一半[1]. 不妨设线段 AO' 大于 AB 的一半.

假设 C 是点 A 关于点 O' 对称的点，那么

$$AC=AO'+O'C=2AO'>AB\ .$$

这就是说，点 C 到点 A 的距离大于圆 G 的直径，因此点 C 不属于集合 H. 因此点 O' 不可能是有限点集合 H 的对称中心.

【证法2】我们来证明：任何一个点集若有两个对称中心，那么它是无穷集合.

假设 O_1 和 O_2 是所研究的集合 H 的对称中心，P_1 是 H 的一个点，P_1' 是 P_1 关于 O_1 的对称点，P_2 是 P_1' 关于 O_2 的对称点，P_2' 是 P_2 关于 O_1 的对称点，P_3 是 P_2' 关于 O_2 的对称点（图122）.

因为 O_1O_2 是 $\triangle P_1P_1'P_2$ 的两个边的中点的连线，所以线段 O_1O_2 和 P_1P_2 平行，且 $P_1P_2=2O_1O_2$. 这个断言对于 $\triangle P_1P_1'P_2$ 蜕化成直线段的情况也仍然有效. 类似地，线段 O_1O_2 也可以看作是 $\triangle P_2P_2'P_3$ 的两边中点的连线，于是线段 P_2P_3 和 O_1O_2 平行，且 $P_2P_3=2O_1O_2$. 因此线段 P_2P_3 是线段 P_1P_2 的延伸.

如果现在从点 P_3 开始，作出它关于 O_1 的对称点，然后再作所得到的点关于 O_2 的对称点，如此等等，那么这样无限重复地作下去，我们就会在线段 P_1P_2 所在的直线上得到无穷多个线段，这些线段的长度都等于 P_1P_2，而且是一个接着一个地延伸. 如果 H 有两个对称中心，那么这些线段的端点都应该属于点集 H. 但这是不可能的，因为根据本题条件，点集

---

[1] 如果 $AO'=O'B=\frac{AB}{2}$，那么 $O'=O$. ——俄译者注.

H只有有限个点.

实际上，我们不仅仅是证明了本题的，而是更一般的结论. 从上面的论证推出，如果点集的对称中心多于一个，那么这个集合不可能是有界的（即：不可能作一个圆，使得这个集合的点都在这个圆内）. 这样一来，有界点集顶多只有一个对称中心.

不难证明，如果点集有两个不同的对称中心，那么它有无穷多个对称中心. 事实上，在直线O_1O_2上，离线段O_1O_2的端点的距离为O_1O_2的整数倍的点都是这个集合的对称中心. ★

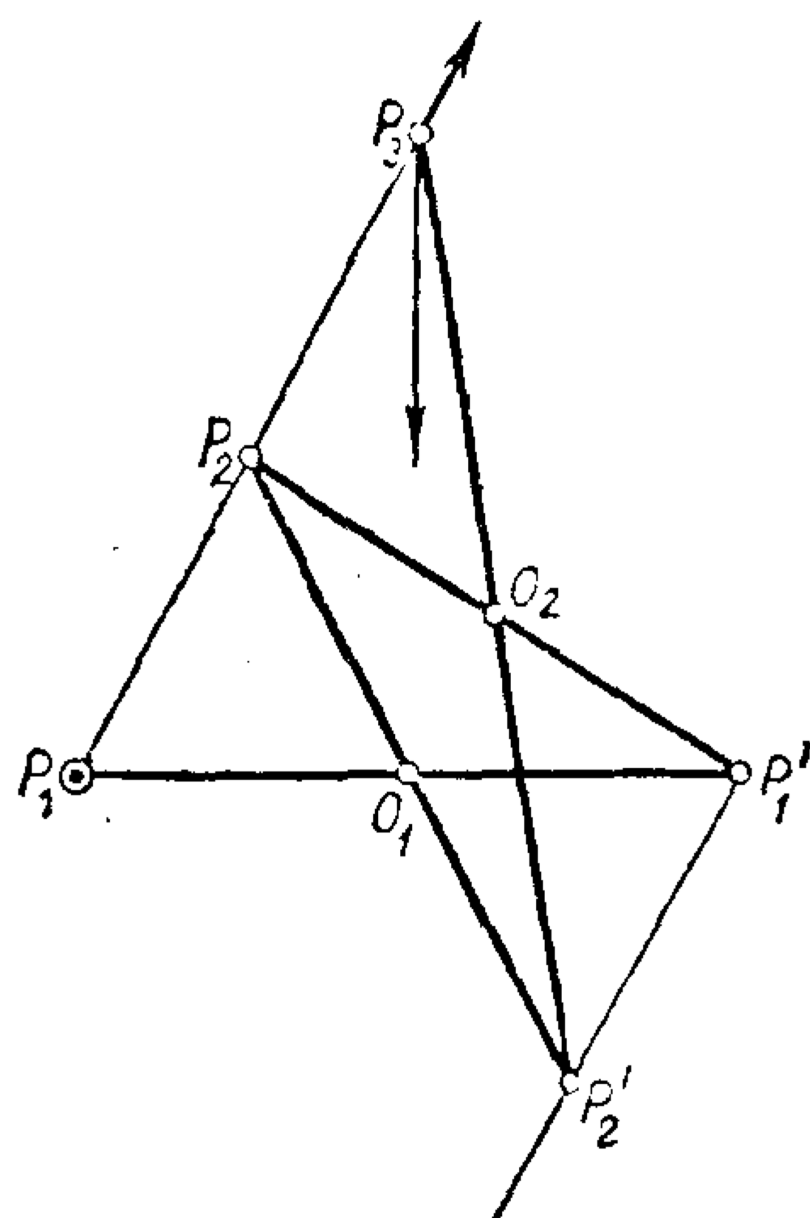


图 122

§56. 关于有限点集合的重心

1） 点P_1，P_2，…，P_n的集合的重心可以用下面的方式来定义. 选取任意一始点O，作集合的所有的点的矢径$\overrightarrow{OP_1}=\mathbf{p}_1$，$\overrightarrow{OP_2}=\mathbf{p}_2$，…，$\overrightarrow{OP_n}=\mathbf{p}_n$. 若点$S$的矢径$\overrightarrow{OS}=\mathbf{s}$满足关系式

$$\mathbf{s}=\frac{\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\cdots+\mathbf{p}_n}{n}, \tag{1}$$

则点S叫做点集合的重心.

我们来证明S与始点O的选取无关，为此将关系式（1）写成形式

$$(\mathbf{p}_1-\mathbf{s})+(\mathbf{p}_2-\mathbf{s})+\cdots+(\mathbf{p}_n-\mathbf{s})=\mathbf{0}, \tag{2}$$

或者根据矢量的减法写成形式

$$\overrightarrow{SP_1}+\overrightarrow{SP_2}+\cdots+\overrightarrow{SP_n}=\mathbf{0}. \tag{3}$$

对点S上式是否成立与始点O的选取是无关的. 因此，和等式（3）等价的等式（1）和(2)也与点O的选取无关.

2） 如果由有限个点组成的集合H具有对称中心O，那么O和集合的重心S重合（试比较§36中类似的断言）. 为了证明这一点，只要注意到下面的事实就够了：对于任何关于始点O对称的点A和B，它们的矢径之和等于零：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\mathbf{0}$. 因此，当把集合$H$的所有的点分成关于对称中心O对称的点对时，对每一个点对，矢径之和为零. 这样一来，对于对称中心O有关系式（3），这就是说，O和集合的重心S重合.

这个注解的简要意义可叙述如下：有限点集合H不可能有几个对称中心，因为对称中心总是和重心重合的，而集合H只有一个重心.

117. 将三棱柱的每一个顶点标上一个数. 使每一个顶点所标上的数等于所有相交于这个顶点的棱的另一个端点所标上的数的算术平均值. 证明：三棱柱的顶点所对应的所有六

个数都相等.

【证法1】假设 A_1，A_2，A_3是三棱柱的上底面的顶点，B_1，B_2，B_3是它的下底面的顶点，而a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3是标在这些顶点的数（图123）.

根据本题条件，数a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3满足方程

$3a_1=a_2+a_3+b_1$，　$3b_1=b_2+b_3+a_1$，

$3a_2=a_3+a_1+b_2$，　$3b_2=b_3+b_1+a_2$，

$3a_3=a_1+a_2+b_3$，　$3b_3=b_1+b_2+a_3$.

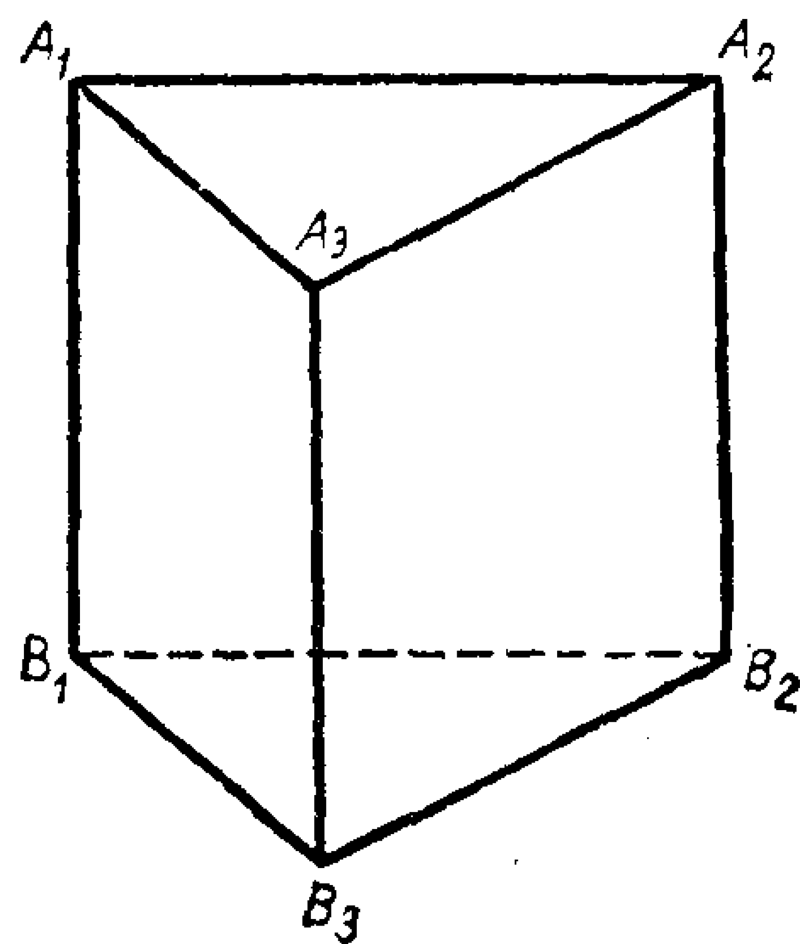


图 123

将第一行的第一个等式的两边加上a_1-b_1，第二个等式的两边加上b_1-a_1，我们得到

$$4a_1-b_1=a_1+a_2+a_3, \tag{1}$$

$$4b_1-a_1=b_1+b_2+b_3. \tag{2}$$

另一方面，将左边一列的三个等式两边分别相加，得

$$3(a_1+a_2+a_3)=2(a_1+a_2+a_3)+b_1+b_2+b_3,$$

由此有

$$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3. \tag{3}$$

因为有关系式（3），所以等式（1）和（2）的右边彼此相等，从而它们的左边也应该相等：

$$4a_1-b_1=4b_1-a_1,\quad 即\quad b_1=a_1. \tag{4}$$

用类似的办法可以得到其它两个等式

$$b_2=a_2,\quad b_3=a_3. \tag{5}$$

将所得到的关系式代入到原等式的左边，我们得到

$$3a_1=a_2+a_3+a_1=3a_2=3a_3.$$

由此式和关系式（4）和（5），我们得到

$$a_1=a_2=a_3=b_1=b_2=b_3,$$

这就是所要证明的.

【证法2】在三棱柱的顶点所对应的数中，我们选出最小的数（如果最小的数有几个，我们任取其中的一个），并记作a_1. 我们知道，对于若干个不相等的数来说，它们的算术平均值比它们当中最小的数要大，而相等的数的算术平均值等于它们的共同值.★

因为根据本题的条件，数a_1等于a_2, a_3, b_1（和我们的挑选相对应的数）的算术平均值，而它不大于它们之中的任何一个，所以这四个数应该相等. 因此b_1等于三棱柱顶点所对应的数中最小的数a_1. 这就是说，b_1也是这些数中最小的数. 另一方面，数b_1等于数b_2, b_3, a_1的算术平均值，因此，根据刚才的论证，这四个数也应该相等. 于是，标在三棱柱顶点的所有六个数都相等.

§57. 算术平均值的一个性质

如果在实数a_1，a_2，…，a_n中没有数小于a_1，也没有数大于a_n，那么

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\frac{na_1}{n}=a_1$$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} < \frac{na_n}{n} = a_n.$$

等号在两种情况下都只有在$a_1=a_2=\cdots=a_n$条件下成立. 这样一来，n个数的算术平均值总是包含在它们之中最小的数和最大的数之间，除了所有n个数相等的情况外（这时算术平均值和它们之中的任何一个相等）.

十六、1936年试题及解答

118. 证明：

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\times2n}=$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

【证法1】我们引入下面的记号：

$$S(n)=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n},$$

$$T(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

我们用完全数学归纳法来证明．当 $n=1$ 时，

$$S(1)=\frac{1}{1\times2}=T(1).$$

假设对某一个 $k\geqslant2$，有

$$S(k-1)=T(k-1).\tag{1}$$

因为

$$T(k)-T(k-1)=\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k}-\frac{1}{k}=$$

$$=\frac{1}{(2k-1)2k}=S(k)-S(k-1).$$

所以由归纳假设可推出

$$T(k)=S(k).$$

因而在 $n=k$ 时，本题断言成立．于是本题断言对所有的 n 都成立．

【证法2】将关系式

$$\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1},$$

$$\frac{1}{3\times4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2},$$

………………………………

$$\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n},$$

两边分别相加，我们就可得到所要的等式．

因为所得到的等式的右边可表示为

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\bigstar.$$

§ 58. 关于无穷级数的求和

1) 例如

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots,$$

$$2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\cdots+2\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+\cdots,$$

$$1-0.9+0.81-0.729+\cdots+(-0.9)^{n-1}+\cdots,$$

$$0.23+0.0023+0.000023+\cdots,$$

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\cdots,$$

$$2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+\frac{7}{6}+\cdots,$$

这些包含有无穷多项的表达式叫做**无穷级数**．所有这些表达式暂且还是毫无意义的，但是我们想就应该怎样理解无穷多项的和，给出一个简单的定义．这样的想法是有根据的，譬如第四个级数不是别的，而是无限循环十进制小数

$$0.232323\cdots,$$

只不过是把它写成了不太习惯的形式．仅仅只有在说明了应该怎样理解无限十进制小数以后才能对无限十进制小数进行运算．在进行计算的时候，这样的小数在某一个地方被截断了．应该在什么地方截断，这与所进行的计算所要求的精确度有关．在我们对无限十进制小数的认识中，最主要的是：在必要的时候，可以用任意多个有限的符号来近似地代替这个小数．当然，这时我们得到的只是无限十进制小数的近似值，但是误差可以任意小．

我们尝试一下对其它的无穷级数一项一项地求和．级数的前 n 项的和叫做级数的**第 n 个部分和**．前四个级数是等比级数．等比级数的任意多项的和的公式是知道的．对前四个级数的前 n 项应用求和公式，我们求得它们的第 n 个部分和

$$\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n,\qquad 2\,\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}=8-8\left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

$$\frac{1-(-0.9)^n}{1+0.9}=\frac{10}{19}-\frac{10}{19}(-0.9)^n,$$

$$0.23\,\frac{1-(0.01)^n}{1-0.01}=\frac{23}{99}-\frac{23}{99}(0.01)^n.$$

在每一个第 n 个部分和中都包含有其绝对值小于 1 的数的 n 次幂．大家知道（见35题的解答和 § 29），如果幂指数 n 大于以适当的方式所选取的某个数，那么正数 $\lambda<1$ 的 n 次幂可任意小．对于数 $\lambda<1$ 的 n 次幂，如果再将它乘以 2，8，$\frac{10}{19}$，$\frac{23}{99}$ 以及任何其它的（与 n 无关）常数，也可以得出同样的结论．因此，当 n 充分大时，第一个级数的第 n 个部分和与 2 相差很小（幂指数 n 应该大于与允许误差有关的数 v）．类似的断言对于第二、三、四个级数的第 n 个部分和也是对的．只需要用数 8，$\frac{10}{19}$，$\frac{23}{99}$ 来代替数 2．我们说这样的级数是**收敛的**，

而它们的和等于2.8，$\frac{10}{19}$，$\frac{23}{99}$. 在一般的情况下，无穷级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots,$$

如果对于任意的$\varepsilon>0$，可以找到这样一个数v，使得当$n>v$时，级数的第n个部分和与s的差的绝对值小于ε，则说这个级数是收敛的，且s是这个级数的和.

为了简单起见，常常写作

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=s,$$

但是所指的不是通常的和，而是在刚才所定义的意义下的和.

2） 在上面所给出的定义的意义下来理解的无穷级数的和，保持了有限个被加项的和的大多数性质，但不是所有的性质. 首先，并不是所有的无穷级数都有和. 例如，第六个无穷级数的每一项都大于1. 因此，当n充分大时，这个级数的第n个部分和将大于任何预先给定的数. 因此，满足上面所说的级数和定义的数s是不存在的. 我们说不存在级数和的无穷级数是**发散的**. 尽管级数的部分和，或者是部分和的绝对值，都不是无限上升的，然而这样的级数仍可能是发散的. 例如，无穷级数

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

是发散的，因为它所有的偶数个项的部分和等于0，奇数个项的部分和等于1，因而不存在数s，使这两个数值与s相差任意小.

同118题的证明直接有关的无穷多个被加项的和与有限多个被加项的和的其它区别将在§59中指出. 现在我们回到第五个无穷级数. 乍然看来要求出它的第n个部分和是不容易的，但是如果注意到对于任意的k，这个级数的一般项（第k项）可以表示成形式

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},$$

那么第n个部分和可以毫不困难地计算出：

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$
$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

对于充分大的n，量$\frac{1}{n+1}$任意小. 因此，

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots=1.$$

我们引作例子的仅仅是收敛性不难建立的无穷级数. 但是，正像在§59中研究的例子所表明的那样，在一般情况下要确定无穷级数的收敛性并不那么简单.

§59. 关于调换无穷级数的项

1） 正像在118题的证法2中所表明的那样，所要证明的恒等式的左边可以表示成形式

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}. \qquad (1)$$

这不是别的，而是无穷级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots \qquad (2)$$

的第 $2n$ 个部分和．我们来证明级数（2）收敛．

由118题所证明的恒等式的右边的每一项提出因子 $\frac{1}{n}$．所得到的表达式

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{n}{n}} \qquad (3)$$

具有下面的极好的性质．我们作函数 $y=\frac{1}{1+x}$ 的图象．将 x 轴上的区间〔0，1〕分成 n 等分，并且从每一个分点引这个函数的纵坐标（图124）．

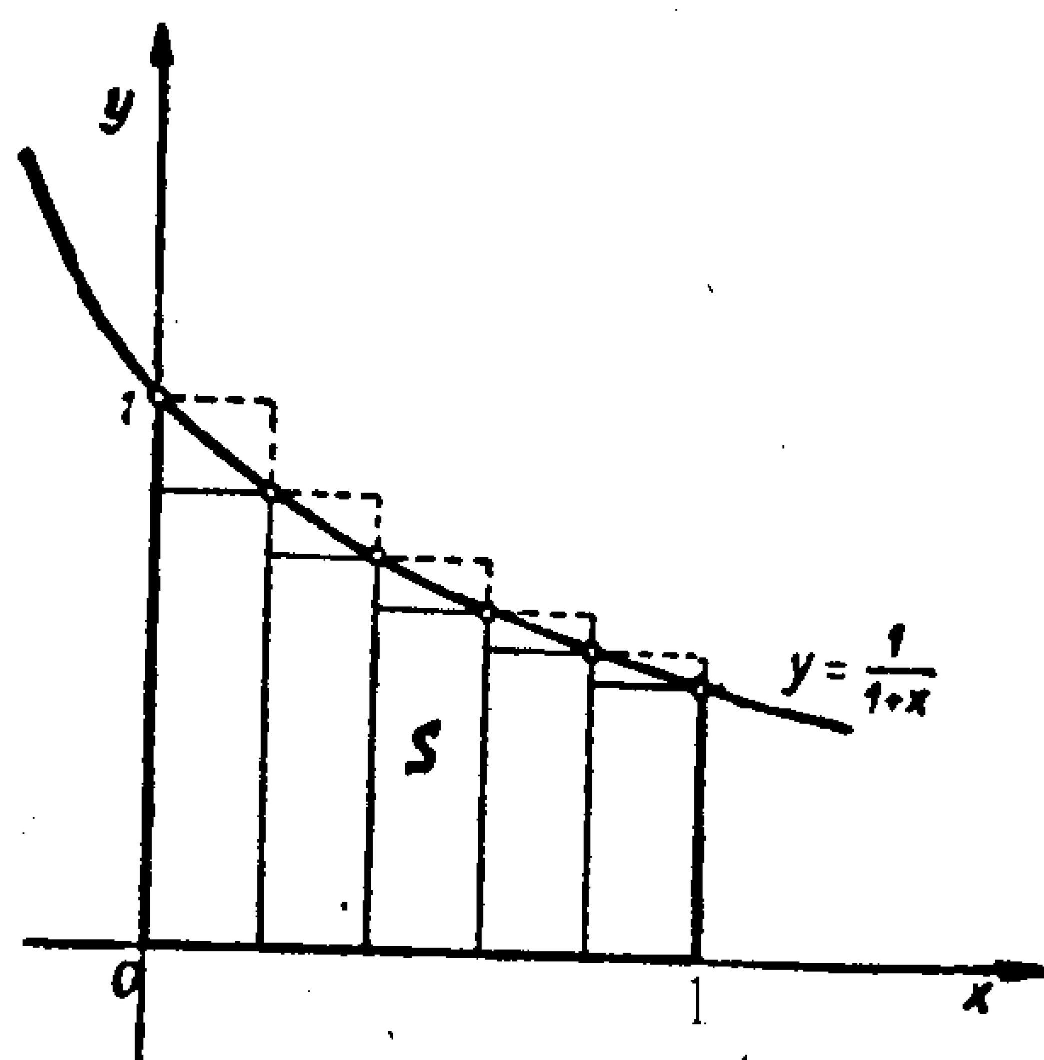


图　124

表达式（3）的每一项等于宽为 $\frac{1}{n}$，以右端分点的纵坐标为高的矩形的面积．这些矩形的面积之和即表达式（1）的值，将小于 S 的面积，这里的 S 是由曲线 $y=\frac{1}{1+x}$，x 轴上的线段〔0，1〕及通过端点 O 和 1 的纵坐标线所围成的曲线梯形．如果我们取宽为 $\frac{1}{n}$，以左端分点的纵坐标为高的矩形，它们的面积之和与表达式（3）不同的仅仅是在第一项的前面出现了新的项 $\frac{1}{n}$，而最后一项 $\frac{1}{2n}$ 没有了．因此，当 n 充分大的时候，级数（2）的部分和与 S 相差任意小，从而曲线梯形的面积❶和级数（2）的和重合．

把级数(2)的所有的项都除以 2 并且将级数所有的正项表示成 $\frac{1}{2k}=\frac{1}{k}-\frac{1}{2k}$ 的形式．这时

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\cdots=$$

$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\cdots.$$

---

❶ 熟悉积分学的人马上可算出 $S=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$．　　——俄译编辑注．

不难看出，最后的级数是收敛的，并且它的和等于$\frac{1}{2}S$. 因为$S\neq 0$，所以这个和的值与它原来的值S是不同的，虽然新的级数还是由级数(2)的那些项组成的：它包含所有奇数的倒数的正项和所有偶数的倒数的负项.

级数的和在调换项的次序后被改变了，这是因为由级数(2)的项的绝对值所构成的级数（所谓**调和级数**；见§64）是发散的. 如果由某个级数的绝对值构成的级数是收敛的，那么当任意调换它的项的次序时，原来的级数的收敛性不会破坏而且它的和仍然不变.

119. 在三角形ABC内取一点S，使$\triangle ABS$，$\triangle BCS$，$\triangle CAS$的面积相等. 证明：S是三角形ABC的重心.

【证法1】 过点S引一直线e和边AB平行(图125). 根据本题条件，$\triangle ABS$的面积等于$\triangle ABC$的面积的三分之一. 因此，由顶点S向边AB所作的高等于由顶点C向边AB所作的高的三分之一. 根据我们的作法，直线e和边AB平行，所以连接顶点C和边AB上任一点的线段（边AB的中线也在内）被直线e分成的两段的比是2∶1.因此，直线e通过$\triangle ABC$的重心. 通过点S作直线f和边BC平行，那么f也应该通过$\triangle ABC$的重心. 因为直线e和f不重合，所以它们只有一个交点S. 因此S和$\triangle ABC$的重心重合.

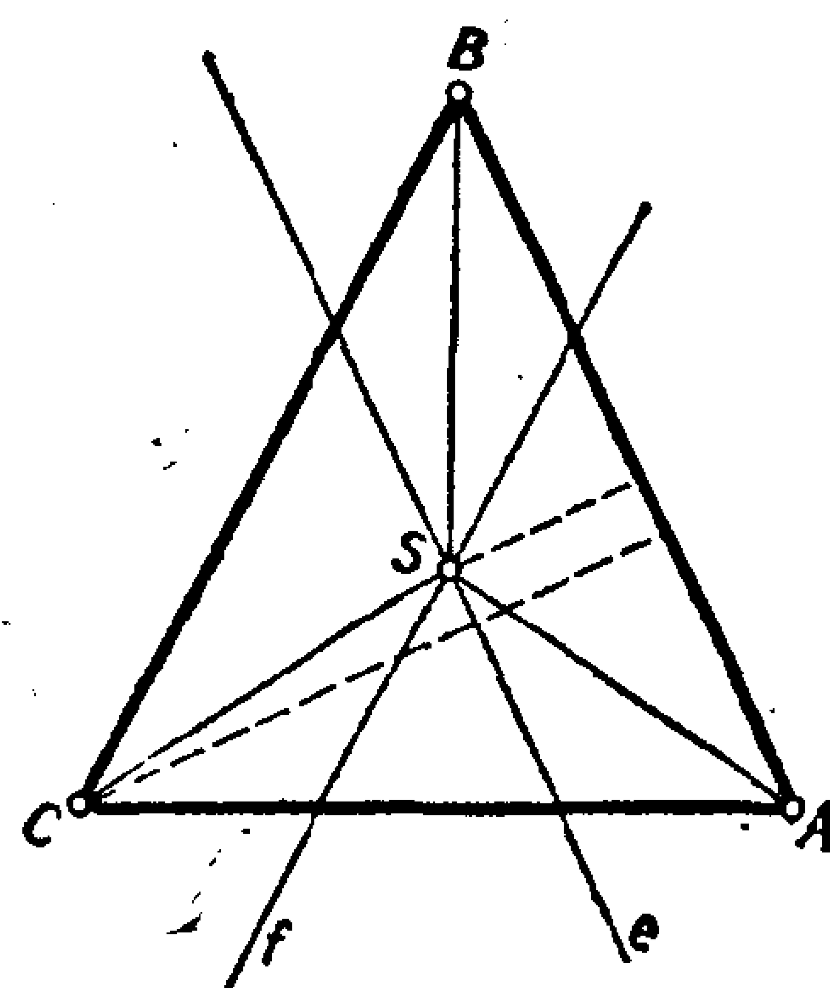


图 125

于是我们证明了：如果S是三个等积的三角形ABS，BCS，CAS的顶点，那么S是$\triangle ABC$的重心.

【证法2】 1) 由几何学可知，如果点A和B到直线e是等距的，那么，要么是直线e和线段AB平行（A和B在直线e的同一侧），要么是直线e通过线段AB的中点（A和B在e的两侧）. 除此之外，在所有其它情况下，点A和B到直线e的距离是不相等的.

因此，我们可以断言：如果在$\triangle ABC$所在的平面内的点D(不和顶点C重合)，使$\triangle ACD$和$\triangle BCD$的面积相等，那么，点D要么在$\triangle ABC$的通过顶点C的中线上，要么在通过顶点C和边AB平行的直线上，因为$\triangle ACD$和$\triangle BCD$的面积相等意味着点A和点B到直线CD的距离相等.

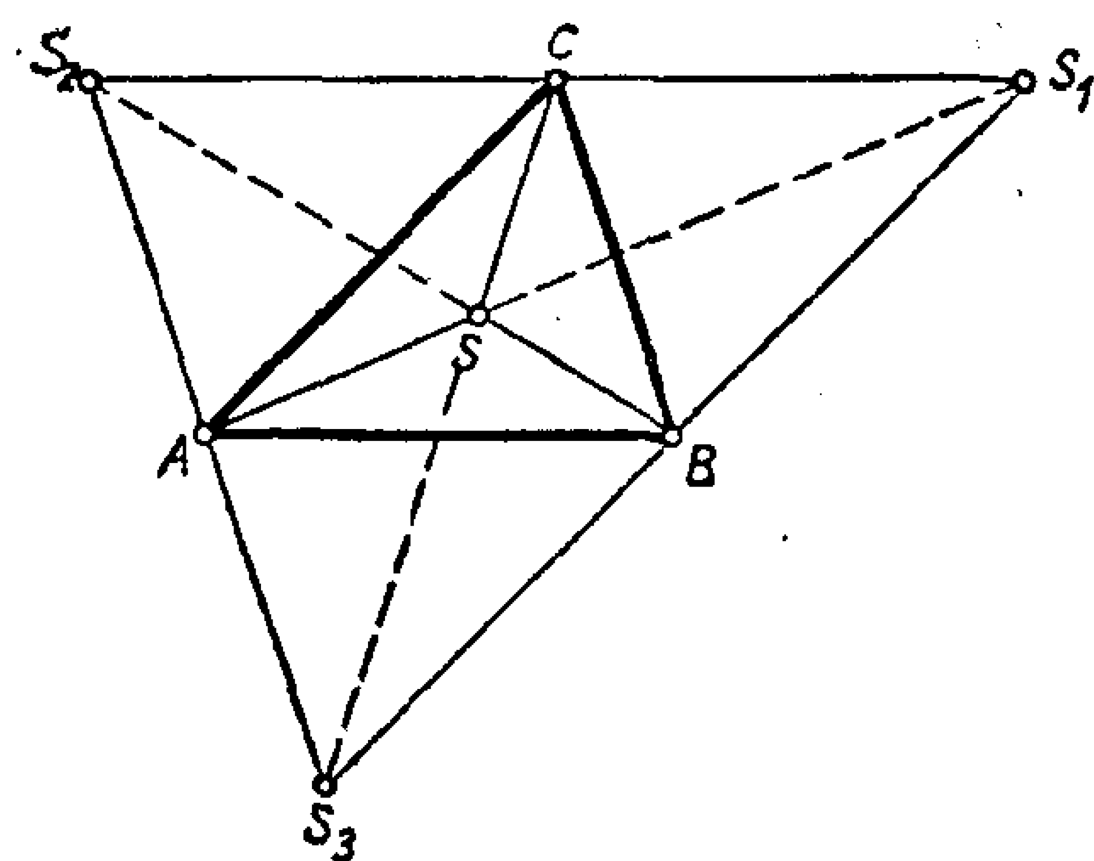


图 126

2) 由上面的证明推出，S在$\triangle ABC$的三条中线上，而且三中线的交点——三角形的重心——满足本题的条件. 为了证实这一点，只需指出在$\triangle ABC$内的点S不可能在三角形外部的任何一条直线上就行了.

3) 由1)的证明推出，如果等积三角形ABS，BCS，CAS的顶点S在$\triangle ABC$的外部，那么只可能是点S_1，S_2，S_3，这些点S_1，S_2，S_3中的每一个点是$\triangle ABC$的一个顶点关于对边中点的对称点(图126).

【证法3】 首先我们来证明，三角形的重心满足本题的条件. 假设AA_1是三角形的一条

中线，S 是重心．这时$\triangle AA_1B$ 和$\triangle AA_1C$ 的边 BA_1 和 A_1C 相等，而且这两个边上的高就是$\triangle ABC$ 中边 BC 上的高（图127）．因此，$\triangle AA_1B$ 和$\triangle AA_1C$ 的面积相等．同理可证，$\triangle BA_1S$ 和$\triangle CA_1S$ 的面积相等，因此$\triangle ABS$ 和$\triangle ACS$ 的面积相等．根据同样的理由，$\triangle BCS$ 的面积和它们之中的任何一个都相等．

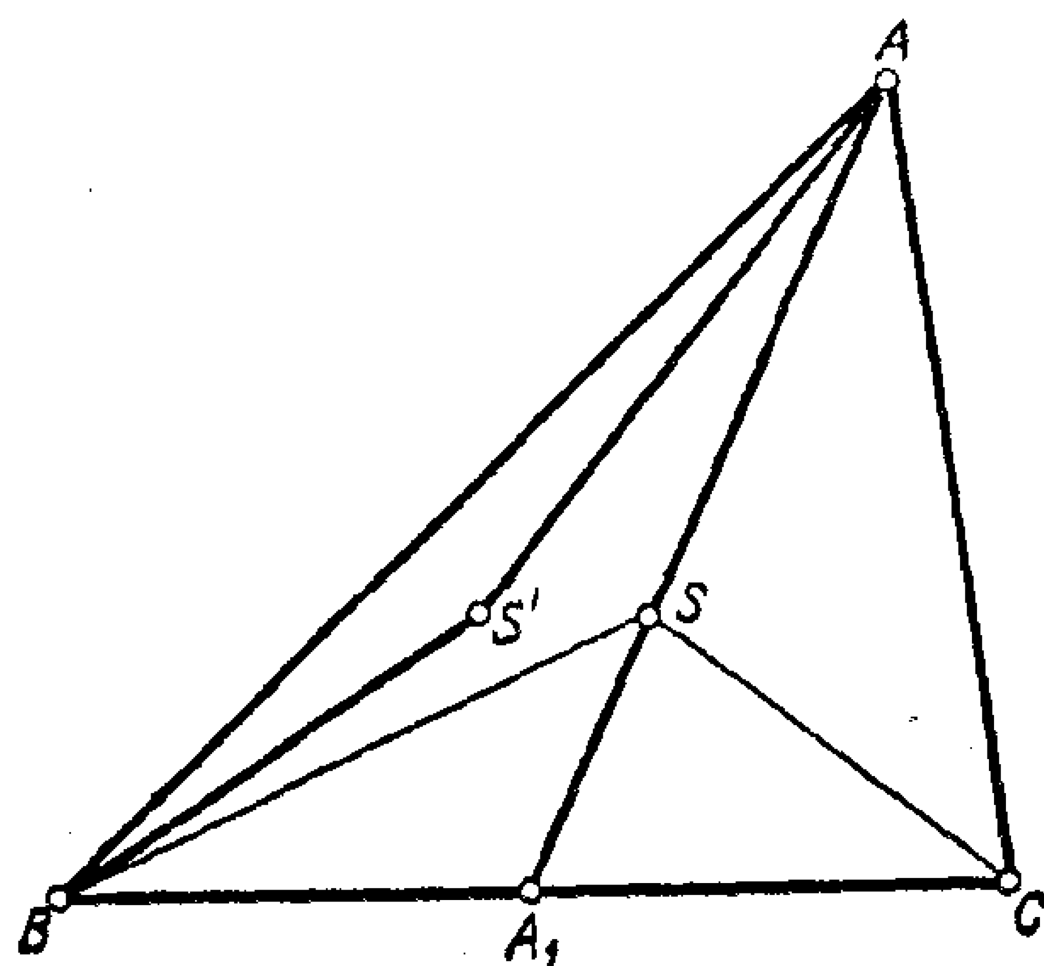


图 127

还需要证明，任何其它的点 S' 不具有这个性质．假设 S' 是$\triangle ABC$ 内任一和 S 不同的点．点 S' 在$\triangle ASB$，$\triangle BSC$，$\triangle CSA$ 中的某一个三角形的内部或边界上．例如，我们假设点 S' 在$\triangle ASB$ 内．这时$\triangle AS'B$ 仅仅是$\triangle ASB$ 的一部分，因而$\triangle AS'B$ 的面积小于$\triangle ASB$ 的面积，即小于$\triangle ABC$ 的面积的三分之一．因此点 S' 不具有所要求的性质，因为构成$\triangle ABC$ 的三个三角形 $AS'B$，$BS'C$，$CS'A$ 的面积不相等．

120．假设 a 是任意给定的正整数．证明：总可以找到一对且仅一对正整数(x,y)，使得有关系式

$$x+\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}=a.$$

【证法 1】假设 $x+y-1=k$，

这时 $$\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}=\frac{k(k-1)}{2},\qquad 0<x\leqslant k.$$

我们来研究数列

$$\frac{k(k-1)}{2}\quad(k=1,2,\cdots).\tag{1}$$

对于给定的数 a，k 的值必须满足下面的不等式：

$$\frac{k(k-1)}{2}<a\leqslant\frac{k(k-1)}{2}+k=\frac{(k+1)k}{2}.$$

这个不等式唯一地确定了 k 的值，因为它的左边和右边是序列(1)的连续的两项．知道了 k 的值以后，我们就可求得 x 和 y：

$$x=a-\frac{k(k-1)}{2},\qquad y=k+1-x.$$

x 和 y 的值是由数 a 和 k 唯一确定的，且都为正整数．

【证法 2】我们来证明：有序的正整数对可以这样来编号，使得数对(x,y)的编号为

$$x+\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}.$$

首先我们指出，当这样进行编号时，对于 $x+y$ 具有相同的值的数对来说，它们应该紧挨着．

我们将数对按下面的办法进行排队：对于任何两个数对来说，$x+y$ 的值较小的排在前面，$x+y$ 的值较大的排在后面，如果它们的 $x+y$ 的值相等，那么 x 的值较小的数对排在前面，x 的值较大的排在后面．

在这样的次序下，最初的若干个数对如下：

$$(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (3,1),$$
$$(1,4),\ (2,3),\ (3,2),\ (4,1),\ (1,5),\ \cdots.$$

和 $x+y$ 等于给定值 m 的数对 (x,y) 共有 $m-1$ 个．因此，由于和等于 2，3，…，$x+y-1$ 的数对都排在数对 (x,y) 的前面，所以这些数对的总个数等于

$$1+2+\cdots+(x+y-2)=\frac{(x+y-2)(x+y-1)}{2}.$$

接着往后排的数对是

$$(1,\ x+y-1),\ (2,\ x+y-2),\ \cdots,\ (x,y).$$

这样一来，在我们的排队中，数对 (x,y) 的顺序号等于

$$x+\frac{(x+y-2)(x+y-1)}{2}.$$

所得到的表达式取所有的正整数值，而且对于不同的数对来说，它们的编号是不一样的．从而证明了本题断言．

数对 (x,y) 可以用平面上坐标为 x 和 y 的点来表示．这些点是第一象限内的所有整点（图128），而且 $x+y$ 的值相同的点在一直线上．当我们从左下角开始，沿着每一根直线按箭头所指的方向从上往下走时，我们将会经过所有的点，而且经过这些点的先后次序就是数对 (x,y) 排队编号时的次序．★

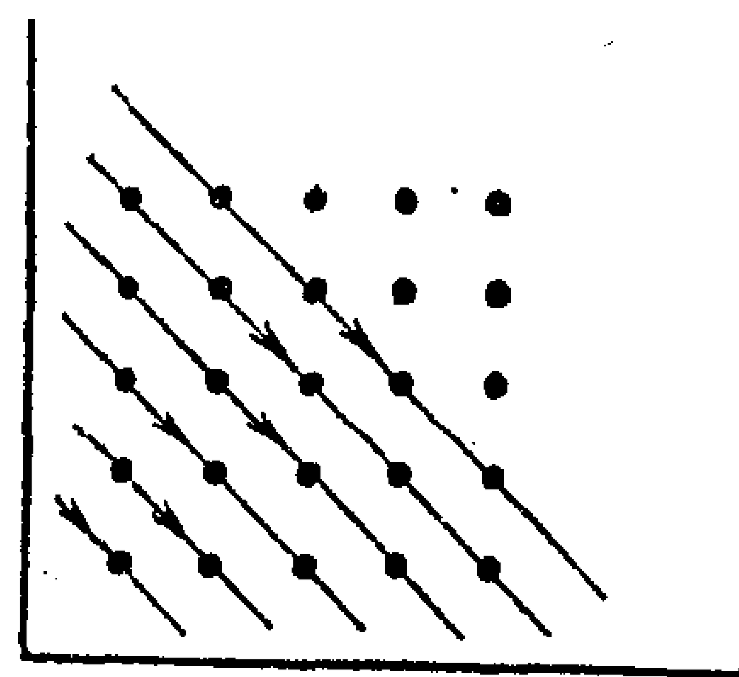


图128

§60．关于无穷集合的势的比较　可数集合

1）在120题的证法 2 中我们利用了下述事实：由自然数构成的数对可以排成无穷序列的形式．我们用分数 $\frac{m}{n}$ 来代替每一个数对 (m,n)，而且从序列中去掉可约分数．所得到的序列包含所有的正有理数．如果在序列的第一项的前面加上 0，在每一项的后面加上和它仅符号相反的数以及去掉等于 1 的分母，那么所有的有理数排成一个序列

$$0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 2,\ -2,\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ 3,\ -3,$$
$$\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ 4,\ -4,\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{5},\ \cdots.$$

这样一来，我们将每一个有理数和一个正整数对应，这个正整数是该有理数在序列中的编号，而且对不同的有理数，编号是不同的．

如果两个有限集合的元素可以这样分成对，使得在每一个对子中包含每一个集合的一个元素，而且任何一个元素都不会没有“伙伴”而剩下，那么两个有限集合中的任何一个集合所包含的元素和另一个集合的元素一样多．在比较两个无穷集合时，也可以用这个方法．因

此，由于我们将每一个有理数和一个且仅一个正整数对应起来了，所以“有理数和自然数是一样多的”．这个断言听起来是奇怪的，因为在有理数中不仅包含有自然数，而且还有无穷多个分数．由此可作出结论．比较无穷集合同比较有限集合相比，对前者要小心得多．

在一般的情况下，两个无穷集合的元素之间的对应关系可以用几种方法来建立，这时可能发现，在一种对应下，一个集合的某些元素没有“伙伴”而剩下，而在另一种对应下，两个集合所有的元素都能分成对子，每一个对子包含每一个集合的一个元素，而且在两个集合的任何一个集合中都没有“多余的”元素（这样的对应叫做**相互一意的对应**；我们注意，两个有限集合的元素之间的对应关系只能用上述两种方法中的一种方法来建立）．根据和有限集合的类比，如果对于任何两个集合（无论是有限的，或是无穷的），可以用一种方法将它们的元素分成对，使每一个对子包含每一个集合的一个元素，那么我们就认为这两个集合是“相等的”．如果两个集合的元素之间可以建立相互一意的对应关系，即可以这样分成对，每一对包含每一个集合的一个元素，使得任何一个集合的每一个元素对应于一个而且仅仅一个另一个集合的元素❶，我们说这两个集合是**等势的**、和自然数集合等势的集合叫做**可数的**．任何一个可数集合的元素可用自然数来编号．逆断言也是正确的：如果某集合的元素可用自然数来编号，那么它是可数的．

于是，**有理数集合是可数的**．

2） 由120题的证法2还可以得出下面的定理．

设H_1, H_2, H_3,…**是没有公共元素的可数集合的可数序列．这时包含所有的集合**H_1 H_2, H_3,…**的元素的集合**H **是可数的**．（集合H通常叫做集合H_i的**并集**．）

我们来证明这个定理．

我们把每一个集合的元素排成序列的形式．集合H_i的占据第k个位置的元素和与120题的证法2中的数对(i, k)的编号相对应．于是集合H的每一个元素将和某一个自然数对应，而且不同的元素将和不同的自然数对应．因此，H是可数集合．

我们来证明：**一元整系数多项式集合是可数的**．

如果知道了一个多项式的次数以及它所有的系数，那么这个多项式就被确定了．我们将每一个多项式和它的次数与它的系数的绝对值之和m对应．对应于同一个值m的多项式的个数是有限的．例如，当$m=4$时，只要列举0,1,2,3次的多项式就够了❷．在0次多项式（常数）中，对应于值$m=4$的只有$+4$，-4，在1次多项式中，只有多项式$x+2$、$x-2$，$-x+2$、$-x-2$，$2x+1$，$2x-1$，$-2x+1$，$-2x-1$，$3x$，$-3x$．在2次多项式中，对应于值$m=4$的是x^2+1，x^2-1，$-x^2+1$．$-x^2-1$，x^2+x，x^2-x，$-x^2+x$，$-x^2-x$，$2x^2$，$-2x^2$，而在3次多项式中，只有x^3和$-x^3$．

用类似的方式对任何值m可以列举出所有的整系数多项式．

于是，当一个接一个地写出具有$m=0,1,2,\cdots$的所有整系数多项式时，我们得到无穷序列．

$$0;\ 1,\ -1;\ 2,\ -2,\ x,\ -x;\ 3,\ -3,\ x+1,$$
$$x-1,\ -x+1,\ -x-1,\ 2x,\ -2x,\ x^2,\ -x^2;$$
$$4,\ -4,\ x+2,\ x-2,\ -x+2,\ -x-2,\ 2x+1,$$

---

❶ 上面所研究的例子表明，全体（有理数集合）可以和自己的部分（自然数集合）等势．
——俄译编辑注．

❷ 当$m=4$时，4次多项式的所有系数都等于0．——俄译编辑注．

$$2x-1,\ -2x+1,\ -2x-1,\ 3x,\ -3x,\ x^2+1,$$
$$x^2-1,\ -x^2+1,\ -x^2-1,\ x^2+x,\ x^2-x,\ -x^2+x,$$
$$-x^2-x,\ 2x^2,\ -2x^2,\ x^3,\ -x^3;\cdots,$$

它包含任意一个整系数多项式，而且仅仅一次．于是断言被证明了．

上述序列中的多项式的根叫做**代数数**（见§20）❶. 我们知道，多项式的根的个数不大于它的次数．一个一个取出整系数多项式，我们将它们的不同的根编成一个统计表，后面的多项式的根只有在它的根和序列中前面任何一项的根不相同时，才把它记入统计表中．所编成的根的序列包含所有的代数数．于是，**所有的代数数的集合是可数的**．

3）所列举的可数集合的例子以及某些无穷集合的可数性的证明自然会产生一个问题：在无穷集合之间可以说出什么区别吗？有无穷而不可数的集合吗？我们来证明：

小于1的正数的集合是不可数的．

我们把所有这些数写成无限十进制小数的形式．不难看出，有限十进制小数可以用两种方法表示成无限的形式．例如，小数

$$0.7352000000\cdots$$

和

$$0.7351999999\cdots$$

在写成通常的（非十进制的）分数时化为相同的数

$$\frac{7352}{10000}=\frac{919}{1250}.$$

我们规定从这两个办法中选取第一个．所有其余的小于1的正数唯一地表示成无限十进制小数．

如果我们证明了包含在0和1之间的数的任一无穷序列至少不包含0和1之间的一个数，那么上面所说的断言就被证明了．

我们研究0和1之间的数的一个序列．将它的每一个元素写成无限十进制小数的形式，设 a_{ik} 是第 i 个元素中小数点后第 k 个数字．这时我们的序列可以写成表的形式

$$0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots,$$
$$0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots,$$
$$0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

我们按下列规则构造一个新的数 $b=0.b_1b_2b_3\cdots$. 假设它在小数点后的第一个符号和第一个小数的第一个符号不同．(例如，如果 a_{11} 是不为5的任一数字，那么取 $b_1=5$，如果 $a_{11}=5$，可取 $b_1=6$.）类似地，若 $a_{22}=5$，设第二个数符 b_2 等于6，而在所有其它的情况下，设 b_2 等于5．一般地，如果 $a_{ii}=5$，那么设第 i 个数符 b_i 等于6，如果 $a_{ii}\neq5$，设 b_i 等于5．

上述序列中的任何一项都不会等于数 b，因为第 i 个小数的第 i 个符号和数 b 的第 i 个符号是不同的．另外，数 b 以另一种形式出现在上述序列中的情况也是不可能的，因为为此需要在数 b 的十进制展开式中，从某个地方开始应该都是数字9，而在构造数 b 所利用的数字中，没有任何一个9．于是断言被证明了．

我们来研究在2）的末尾所说的有序的全体代数数的序列．把这个序列的元素写成无限十

❶ 如果数 α 是具有有理系数的多项式 $p(x)$ 的根，那么它也是整系数多项式的根，当用 $p(x)$ 的所有系数的分母的最小公倍数来乘 $p(x)$ 时，就可以得到这个整系数多项式．——俄译编辑注．

进制小数（仅取 0 和 1 之间的代数数）的形式并构造数 b，我们得到超越数．于是证明了超越数的存在性．**超越数集合是不可数的**．事实上，如果它是可数的，那么，当把代数数和超越数排成两个序列的形式时，我们轮流从它们之中一个一个取元素将得到一个新的序列．所作出的序列包含所有的实数，但我们已经知道，全体实数的集合不是可数的．

对于 0 和 1 之间所有实数的集合的不可数性，我们所利用的证明方法是：把无限十进制小数写成表的形式，并求出一个数，它的符号和表的对角线上的符号不同．因此这个方法叫做**康托尔对角线法**（为了纪念集合论的奠基人乔治·康托尔）．

4） 我们仅研究了包含在 0 和 1 之间的数，这个区间范围是无关紧要的，数轴上任何两个区间的数的集合总是等势的．我们把数轴上的两个区间画成两个平行的线段 AB 和 CD 的形式．设 O 是直线 AC 和 BD 的交点，P 是线段 AB 上的一点，OP 与 CD 相交于点 P'，我们把“位于”点 P 的数与点 P' 的数对应起来（图129）．显然，这个对应关系是相互一意的．

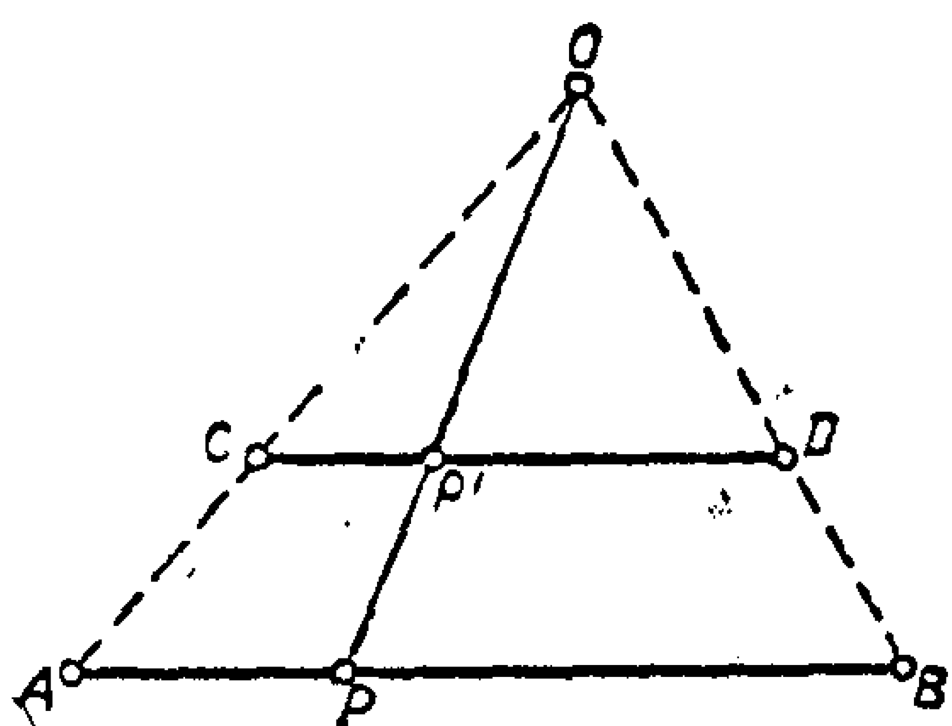


图 129

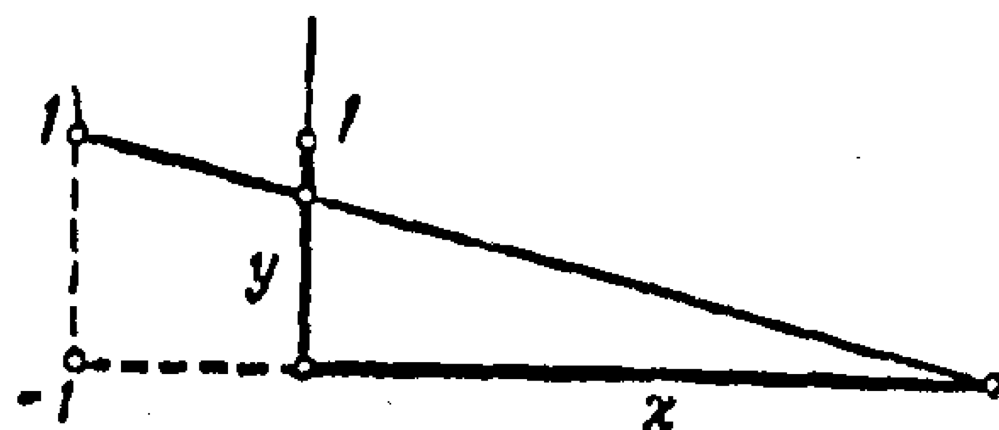


图 130

类似地可以证明，0 和 1 之间的数的集合和所有的正数集合等势．从坐标为$(-1,1)$的点，将 y 轴上的区间 $0<y<1$ 投影到 x 的正半轴上（图130）．不难算出，正数 x 和包含在 0 和 1 之间的数

$$y=\frac{x}{1+x} \tag{1}$$

对应，这种对应是相互一意的．由图131看出，属于数轴上任何一个有限区间的数的集合和全体实数的集合等势．

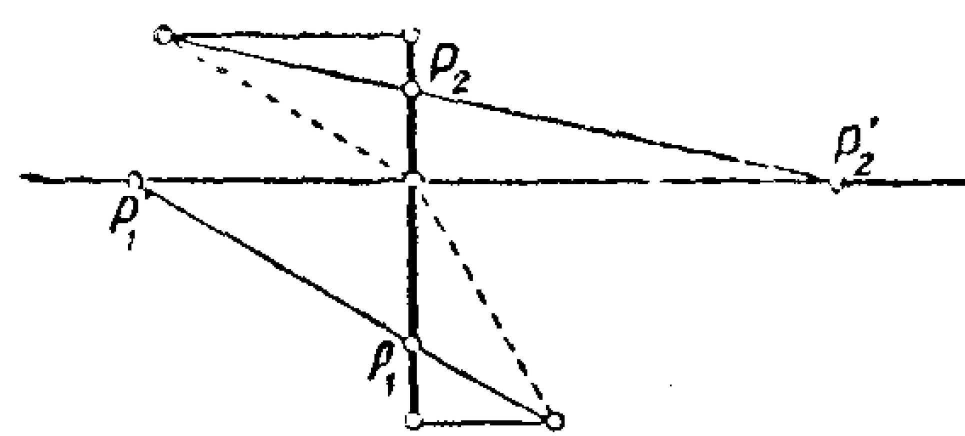


图 131

如果代替区间 $0<y<1$ 而研究区间 $0\leqslant y\leqslant 1$ 或者半区间 $0<y\leqslant 1$，$0\leqslant y<1$，可能会产生某些困难．为了证明这些集合中的任一个和全体正数的集合等势，我们用下面的办法来处理．

如果在区间 $0<y<1$ 的点和 x 的正半轴的点之间的对应关系由公式（1）规定了，那么彼此对应的数，或者两个都是有理数，或者两个都是无理数．我们将认为区间 $0\leqslant y\leqslant 1$的无理数和正半轴的无理数之间的对应关系按公式（1）来规定．属于区间的有理数集合是可数的．事实上，它的所有元素包含在全体有理数集合的元素之中．从 1）中所研究的全体有理数的无穷序列中划去多余的元素，我们得到只包含我们所研究的区间中的有理数的无穷序列．当建立了两个等势的（可数的）集合——全体正有理数集合和属于区间〔0，1〕的有理数集合——的元素之间的对应关系之后，我们得到了所需要的两个数集合的对应关系．对于半区间也可

类似处理.

§61. 关于连续统假设

包含在两个不同的数之间的实数集合的势，全体正数集合的势，全体实数集合的势叫做**连续统的势**. 可以认为连续统的势大于可数集合的势，因为任何一个具有连续统的势的集合包含可数的子集合，例如，实数集合包含可数的有理数子集合，但整个实数集合是不可数的.

可以证明：存在这样的集合，它的势大于连续统的势，并且可以构造其势无限上升的集合.

产生一个问题：存在其势界于可数集合的势和连续统的势之间的集合吗？乔·康托尔提出一个假设：这样的势是不存在的（**连续统假设**）. 现在我们知道，可以建立两种不相矛盾的集合论，在一种集合论中，连续统假设是成立的，而在另一种集合论中，它是不成立的.

十七、1937年—1938年试题及解答

121．假设正整数a_1，a_2，…，a_n的和小于某一个正整数k．证明：

$$a_1!\ a_2!\ a_3!\ \cdots a_n! < k!.$$

【**证明**】从阶乘$k! = 1\times 2\times 3\times\cdots\times k$中分出前$a_1$项，可以得到$a_1!$．如果$n>1$，那么当$1<i\leqslant n$时，在阶乘$k!$的展开式中，前$a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}$个因子后面的$a_i$个因子依次大于数1，2，…，$a_i$．因此，这$a_i$个因子的乘积大于$a_i!$．这样一来，乘积$a_1!\ a_2!\cdots a_n!$不超过$(a_1+a_2+\cdots+a_n)!$，后者一定小于$k!$．

122．空间中的三个圆两两彼此相切，且所有三个切点是不同的．证明：这些圆要么在一个球面上，要么在一个平面上．（空间中的两个圆，如果它们有一个公共点，并且在这点有公共的切线，我们说这两个圆相切．）

【**证明**】1）首先我们证明，两个彼此相切的圆，或者在一个球面上，或者在一个平面上．我们把通过圆心且和这个圆所在的平面垂直的直线叫做这个圆的轴．轴上任何一点到这个圆的所有的点的距离都是相等的．我们来研究两个彼此相切的圆的轴．两个轴都在通过圆的切点且和公切线垂直的平面上．这样一来，如果两个相切的圆不在一个平面上，从而它们的轴不平行，因此这两个轴应该相交（因为它们在一个平面上）．以交点为中心，通过两个圆的切点作一个球面．那么这两个圆在这个球面上，因为两个圆上的每一个点到轴的交点是等距离的，且等于球面的半径（轴的交点到两圆的切点的线段长）．

2）根据1）中的证明，在本题条件中所说的三个圆k_1，k_2，k_3中，每一对圆确定一个球面或者确定一个平面．必须证明，所有三对圆确定同一个球面，或者确定同一个平面．

假设圆k_1和k_3所确定的球面（或平面）G_1和圆k_2和k_3所确定的球面（或平面）G_2不重合．如果两个球面（或一个球面和一个平面）不重合，但有公共的圆，那么除了这个圆上的点以外，它们没有任何其它的公共点．因此，对于G_1和G_2来说，除了圆k_3上的点以外，不能再有其它的公共点．但这是不对的，因为G_1和G_2都包含了圆k_1和k_2的切点，根据本题条件，所有三个切点是不同的，所以这个点不在圆k_3上．所得到的矛盾表明G_1和G_2重合．

123．点A_1，A_2，…，A_n不在一直线上．假设P和Q是这样两个点（它们不同于A_1，A_2，…，A_n，且彼此不相重合），使得有

$$A_1P+A_2P+\cdots+A_nP=A_1Q+A_2Q+\cdots+A_nQ=s.$$

证明：存在这样一个点K，使得

$$A_1K+A_2K+\cdots+A_nK<s.$$

【**证明**】我们来证明，线段PQ的中点可以作为点K．假设B_i是点A_i关于点K的对称点（图132，*a*．）这时

$$A_iK=KB_i,\qquad A_iQ=B_iP.$$

由$\triangle A_iB_iP$（如果点A_i在直线PQ上，它蜕化成一个直线段）我们得到

$$A_iB_i = 2A_iK \leqslant A_iP + B_iP = A_iP + A_iQ.$$

因为由本题条件知，A_i 不在一直线上，所以所有的点不可能都在直线 PQ 上．于是对于



图 132

某些 i，上面不等式的左边严格小于右边．

把这些不等式对所有的 i 加起来，我们得到

$$2(A_1K + A_2K + \cdots + A_nK) <$$
$$< (A_1P + A_2P + \cdots + A_nP) + (A_1Q + A_2Q + \cdots + A_nQ) = 2s,$$

这就是所要证明的．

下面我们来证明，不仅是线段 PQ 的中点可以作为点 K，而且线段 PQ 内的任意点都可以作为点 K．

假设 K 是线段 PQ 内的任意一点，

$$\frac{PK}{QK} = \lambda.$$

我们将线段 A_iK 往点 K 外延长，过点 P 作一直线和 A_iQ 平行（图132，b），和 A_iK 的延长线交于点 B_i．根据作法，$\triangle B_iPK$ 和 $\triangle A_iQK$ 相似，且任意两个对应边的比为 λ．因此

$$B_iK = \lambda A_iK, \qquad B_iP = \lambda A_iQ.$$

利用这些关系式，由 $\triangle A_iB_iP$ 可得到不等式

$$A_iB_i = (1+\lambda)A_iK \leqslant A_iP + B_iP = A_iP + \lambda A_iQ.$$

将所得到的类似的不等式加起来，我们得到

$$(1+\lambda)(A_1K + A_2K + \cdots + A_nK) <$$
$$< (A_1P + A_2P + \cdots + A_nP) + \lambda(A_1Q + A_2Q + \cdots + A_nQ) =$$
$$= (1+\lambda)s.$$

（因为根据本题条件，A_i 不在一直线上，所以等号仍然可以去掉），这就是所要证明的❶.

124．证明：整数可以表示为两个整数的平方和的充要条件是这个数的二倍也具有这种性质．

【证明】假设整数 x 可以表示成两个整数的平方和：

$$x = a^2 + b^2.$$

则

$$2x = (a+b)^2 + (a-b)^2.$$

反之，如果对于整数 x 来说，有

---

❶ 令 $f(P) = A_1P + \cdots + A_nP$．正文中的论证表明，$f(K) < \frac{1}{1+\lambda} f(P) + \frac{\lambda}{1+\lambda} f(Q)$ 对任意不同的 P 和 Q（而不仅仅是使 $f(P) = f(Q)$ 的点）都成立，这就是说，函数 $f(P)$ 是**严格凸的**（见 § 44）．如果点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 在一直线上，这个断言已经不正确了（独自证明这一点）．——俄译者注．

$$2x=a^2+b^2,$$

那么数 a 和 b 要么同为偶数，要么同为奇数．无论在哪种情况下，x 都可以表示成两个整数的平方和的形式：★

$$x=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

§62. 关于将自然数表示成两个整数的平方和的形式

1) 由于解答124题而产生一个问题：什么样的自然数可以表示成两个整数的平方和的形式，什么样的自然数不能这样表示？由本题断言推出，如果奇数 m 可以表示成两个整数的平方和的形式，那么形如 $2^a m$ 的数也可以表示成两个整数的平方和的形式．这样一来，为了回答我们感兴趣的问题，只要弄清什么样的奇数可以分解成两个整数的平方和的形式就行了．

如果考虑到下面的断言，问题可得到实质性的简化：

两个可以表示为两个整数的平方和的形式的数的乘积，也可以表示为两个整数的平方和的形式．

这个断言的正确性可由恒等式

$$(a^2+b^2)(u^2+v^2)=(au+bv)^2+(av-bu)^2$$

推出．

我们证明两个定理：

1° **如果素数 p 被 4 除的余数等于 3，而数 p 的本身是两个整数的平方和的约数，那么这两个数中的每一个都能单独地被 p 整除．**

2° **被 4 除而余 1 的所有素数可以表示成两个整数的平方和的形式．**

在第一个定理中所说的素数 p 可以写成 $4k+3$ 的形式；在第二个定理中所说的素数 p 可以写成 $4k+1$ 的形式．显然，所有的奇素数具有这两种形式中的一种．

从这些定理推出：

一个自然数，当且仅当在它的标准分解式中不包含形如 $4k+3$ 的素数的奇次幂时，这个自然数可以表示为两个整数的平方和的形式．

事实上，因为 $2=1^2+1^2$，所以数 2 的任意次乘幂和（根据定理 2°）形如 $4l+1$ 的素数的任意次乘幂的乘积可以表示成两个整数的平方和的形式．如果两个整数的平方和乘上某一个整数的平方（例如，乘上这样一个数，它分解成形如 $4k+3$ 的素数的偶次幂的乘积），那么，当前两个平方中的每一个单独乘上它时，乘积又可以表示成两个整数的平方和的形式．这样一来，满足上面所说的条件的自然数能够分解为两个整数的平方和的形式．

另一方面，假设两个整数的平方和能被形如 $4k+3$ 的素数 p 整除．这时根据定理 1°，这两个数中的每一个都能被 p 整除．因此，当从平方和中提出因子 p^2 后，我们又得到另外两个整数的平方和．如果新的平方和能被 p 整除，那么它也能被 p^2 整除，又可以重复提取因子 p^2．这样一来，在可以表示成两个整数平方和的形式的自然数的标准分解式中，形如 $4k+3$ 的素数 p 的最高次数是偶数．于是断言被证明了（在假定定理 1° 和 2° 证明了的情况下）．

2) 为了证明第一个定理，我们利用费尔马小定理（见 §19）．设 a^2+b^2 能被形如 $4k+3$ 的素数 p 整除．我们利用同余理论（见 §12）中所采用的表示法时，这可写作

$$a^2+b^2\equiv 0\ (mod\ p)，\text{或 } a^2\equiv -b^2\ (mod\ p).$$

我们将后一个同余式的两边进行 $\frac{p-1}{2}=2k+1$ 次乘方．由于 $2k+1$ 是奇数，因此我们得到同余式

$$a^{p-1}\equiv -b^{p-1}\ (mod\ p).\qquad (1)$$

同余式的两边或者对于模 p 和 0 同余（即被 p 整除），或者它们之中的任何一个和零都不同余．第一种情况只有在数 a 和 b 中的每一个分别能被 p 整除时才有可能．我们来证明同余式（1）的两边对于模 p 都不和 0 同余的情况是不可能的．事实上，如果 $a^{p-1}\not\equiv 0\ (mod\ p)$ 和 $b^{p-1}\not\equiv 0\ (mod\ p)$，那么无论是 a 或 b，都不能被 p 整除．但这时根据费尔马小定理有

$$a^{p-1}\equiv 1\ (mod\ p),\quad b^{p-1}\equiv 1\ (mod\ p),$$

而且由同余式（1）我们得到

$$1\equiv -1\ (mod\ p)，即\ 2\equiv 0\ (mod\ p).$$

但是最后一个同余式意味着奇素数 p 是数 2 的约数，这是不可能的．

为了证明第二个定理，我们利用下面的断言（见 §69的 2））：

对于任意的形如 $4l+1$ 的素数 p，可以找到这样的整数 n，使 n^2+1 能被 p 整除，即有同余式

$$n^2+1\equiv 0\ (mod\ p).\qquad (2)$$

我们来研究所有可能的形如 $nx-y$ 的数，这里的 x 和 y 取小于 $\sqrt{p}$ 的非负整数值．设 k 是 x 和 y 所允许的值中最大的数，因为 $\sqrt{p}$ 是非整数，所以 k 是满足不等式

$$k<\sqrt{p}<k+1$$

的整数．形如 $nx-y$ 的数的总个数为

$$(k+1)^2>(\sqrt{p})^2=p,$$

因为数 x 和 y 的每一个分别取 $k+1$ 个值．当 $nx-y$ 被 p 除时，余数可以取 p 个不同的值：0，1，2，…，$p-1$．因为数对 (x, y) 可以取 $(k+1)^2>p$ 个，所以可以找到两个不同的数对 (x, y)，对于它们，形如 $nx-y$ 的数被 p 除时给出相同的余数．我们把这两个数表示作 nx_1-y_1 和 nx_2-y_2．这时

$$nx_1-y_1\equiv nx_2-y_2\ (mod\ p),$$

因此

$$(x_1-x_2)n\equiv y_1-y_2\ (mod\ p).$$

数 x_1 和 x_2 不可能相等，否则将有

$$y_1-y_2\equiv 0\ (mod\ p).$$

但是差 y_1-y_2 小于 p，因此它们对于模 p 和 0 同余，即能被 p 整除，只有在数 y_1 和 y_2 相等的条件下才有可能．但这时数对 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 不是不同的了．因此 $x_1\neq x_2$．

适当选取附标的值，使 $x_1>x_2$．设 $u=x_1-x_2$，$v=y_1-y_2$．数 u 和 v 满足不等式

$$0<u<\sqrt{p},\quad |v|<\sqrt{p},\qquad (3)$$

因为被减数 x_1，y_1 和减数 x_2，y_2 是正的，而数 x_1，x_2，y_1，y_2 中的每一个都小于 $\sqrt{p}$．数 x_1，x_2，y_1，y_2 适合

$$un\equiv v\ (mod\ p).\qquad (4)$$

将同余式（2）乘以 u^2，我们得到

$$u^2n^2+u^2\equiv 0\ (mod\ p).$$

利用同余式（4），将最后的同余式左边第一个项用 v^2 代替，得

$$v^2+u^2\equiv 0 \pmod p,$$

即 v^2+u^2 能被 p 整除. 因为 u 和 v 满足不等式(3)，所以

$$0<u^2+v^2<2p.$$

但是平方和 u^2+v^2 是 p 的倍数，所以

$$u^2+v^2=p.$$

于是定理2°被证明了.

§63. 关于华林问题

正象已经证实的那样，并不是所有的自然数都可以表示成两个整数的平方和的形式. 稍微比较困难地可以证明：形如 $4^a(8k+7)$ 的自然数，其中 a 和 k 是正整数或零，不能表示为三个整数的平方和的形式. 1770年华林在他自己的一篇著作中提出了一个未加证明的断言：所有的正整数可以表示成 4 个整数的平方和，9 个整数的立方和，19个整数的四次方和，“等等”（某些被加项可能等于 0）. 词句“等等”应该理解成下面的意思：对于任何一个幂指数 k，存在这样一个仅与 k 有关的数 S_k，使得每一个自然数可以表示成 S_k 个整数的 k 次方之和的形式.

当 $k=2$ 时，华林问题被同时代的拉格朗日解决了. 在一般形式下的问题过了一百多年由希尔伯特成功地解决了. 设 g_k 是这样一个数，任何一个自然数可以表示成 g_k 个整数的 k 次方之和的形式，但不能表示成更少个数的整数的 k 次方之和的形式. 例如，不难验证，数 $23=2\times2^3+7\times1^3$ 不能表示成少于 9 个整数的立方和，而数 $79=4\times2^4+15\times1^4$ 不能表示成少于19个整数的四次方之和. 因此，$g_3\geqslant9$，$g_4\geqslant19$. 当一个数一个数地检查时能够发现，除了23以外，只有一个数 $239=2\times4^3+4\times3^3+3\times1^3$ 可以分解成不少于 9 个数的立方和，除了已经说的两个数以外，总共有15个数不能分解成少于 8 个整数的立方和，虽然被检验的数要大大超过它们之中最大的数（等于8042）. 很有可能仅仅是自然数列开头的一些数能够分解成具有较多个数的被加项的立方和，因为只能在不多的一组数中选取被加项. 当把数分解成立方和而被加项可能的“候选者”变大时，被加项本身的个数将减少. 因此，对于把自然数分解成整数的立方和来说，更有特征性的不是数 g_3，而是另一个数 G_3，它表明超过某一个限度的任一自然数（但不是这个限度以内的数）可以分解成多少个整数的立方和. 类似地可对任意的 k 定义数 G_k.

希尔伯特研究了和华林问题有关的所有范围内的问题，得到了许多光辉的结果，并且创造了新的方法，这些方法后来在数论中得到了广泛的应用. 他仅仅在某些特殊的情况下成功地确定了 g_k 的精确值. 另一方面，对于充分大的自然数，用来代替 g_k 的 G_k 的值，除了在极个别的情况下可以精确地确定以外，都是考虑它的近似值. 之所以发生这种情况是因为 g_k 表征的仅仅是若干“小数”的性状，而 G_k 表征的是整个自然数列的性状. 例如，一个上面所说的极个别情况是找到了当 $k=4$ 时 G_4 的精确值（它等于16）. 关于 g_4 的值只知道它包含在19与27之间.

125. 证明：对所有的整数 $n>1$，有不等式

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}>1.$$

【证明】对于表达式

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

中所有的项，除第一项以外（即总共 n^2-n项），用它们中的最小的项（等于$\frac{1}{n^2}$）来代替，我们得到不等式

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}+\frac{n^2-n}{n^2}=\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}=1,$$

这就是所要证明的★.

§64. 关于调和级数

1） 无穷级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$$

叫做**调和级数**. 取这个名称是因为级数一连串的项之间的关系和调和地发出和声的频率之间的关系是一样的.

我们证明，当 $k>1$ 时有不等式

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{1}{2}.$$

事实上，将左边的表达式的每一项用最小的项（最后一项）来代替时，我们仅仅将左边缩小了，并得到

$$k\cdot\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}.$$

当我们用 s_k来表示第 k 个部分和时，所得到的不等式可以写成下面的形式

$$s_{2k}-s_k>\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

因此，调和级数是发散的（见§58）.事实上，如果调和级数收敛，那么对于给定的任意一个正数，例如 $\frac{1}{4}$，我们总可以找到这样一个附标 v，使得当 $k>v$ 时，级数的所有部分和 s_k 和它的和的差异小于$\frac{1}{4}$. 但是对于这样的 k 值，调和级数的部分和 s_k和 s_{2k}彼此之差应该小于$\frac{1}{2}$，因为它们之中的每一个和级数的和之差异小于$\frac{1}{4}$. 我们得到了矛盾，因为对于所有的 $k>1$，不等式(1)成立. 于是，调和级数发散.

关于调和级数，不仅可以证明它的部分和序列不收敛于一个确定的极限，而且可以证明它的部分和无限上升. 这个断言更精确地可叙述成下面的样子：对任一(随便怎样大的)数 ω，可以找到这样一个数 v，当 $k>v$时，有不等式

$$s_k>\omega.$$

为此，将调和级数分成段，使每一段各项的和大于$\frac{1}{2}$，于是将它写成：

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots\cdots.$$

我们这样选取 v，使得调和级数的前 v 项可以分成多于2ω的段（在上面的写法中，属于一段的项包含在圆括弧中）. 这时当 $k>v$时，调和级数的所有部分和 s_k将大于$\frac{1}{2}\times 2\omega$，即大于 ω. 于是证明了断言：调和级数的部分和不仅不收敛于一个确定的极限，而且无限上升.

2） 由不等式(1)直接推出，对所有的 $k>1$，

$$s_{4k}-s_k=(s_{4k}-s_{2k})+(s_{2k}-s_k)>1. \tag{2}$$

不等式(2)当 $k=1$ 时也成立，因为第一个括弧中的项之和大于$\frac{1}{2}$. 于是

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{4k}>1,$$

由此当 $m\geqslant 4k$ 时我们得到不等式

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{m}>1.$$

由后一个不等式可以推出125题的断言，因为当 $k=n-1$ 和 $m=n^2$时，条件 $m\geqslant 4k$ 变成不等式

$$n^2\geqslant 4(n-1),$$

它等价于不等式$(n-2)^2\geqslant 0$，它对所有的 n 都是成立的.

3） 我们来证明，在125题中所要证明的不等式的左边的和

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

当 n 上升时将无限上升.

这个断言由不等式

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}>\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)+\cdots+$$

$$+\left(\frac{1}{(n-1)n+1}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)>n\cdot\frac{1}{2n}+n\cdot\frac{1}{3n}+\cdots+n\cdot\frac{1}{n^2}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

推出，因为正象在1)中所证明的，调和级数的部分和随着 n的上升而无限上升.

126. 我们把连接三角形任一顶点和它的对边（或延长线）上任一点的直线段叫做三角形的截线. 证明：对空间中的任何一个锐角三角形，一定可以找到这样一个点，使得任一截线对这点所张的角都是直角.

【证法 1】 1） 如果满足本题条件的点存在，那么它对三角形的每一条边所张的角都是直角. 反之，如果空间某一点 O 对$\triangle ABC$ 的三边所张的角都是直角，那么线段 OA, OB, OC 互相垂直. 因此，如果我们选取三角形的顶点 C，那么 OC 垂直于平面 OAB，从而 OC 垂直于平面 OAB 上的任一直线. 这样一来，通过顶点 C 的任何一条截线对点 O 的张角都是直角，对于顶点 A 和 B 亦是如此. 于是，点 O 满足本题条件.

于是，为了证明本题，只要作出这样一个点，它对三角形的三边所张的角都是直角，也

就是说，连接这个点和三角形三个顶点所得到的三个线段互相垂直.

2） 现在原题可用下面的方式来叙述. 从空间点 O发出三条相互垂直的射线. 证明：在这些射线上可以选取三点 A，B，C（一条射线上取一个点），使△ABC 和已知的锐角三角形全等.

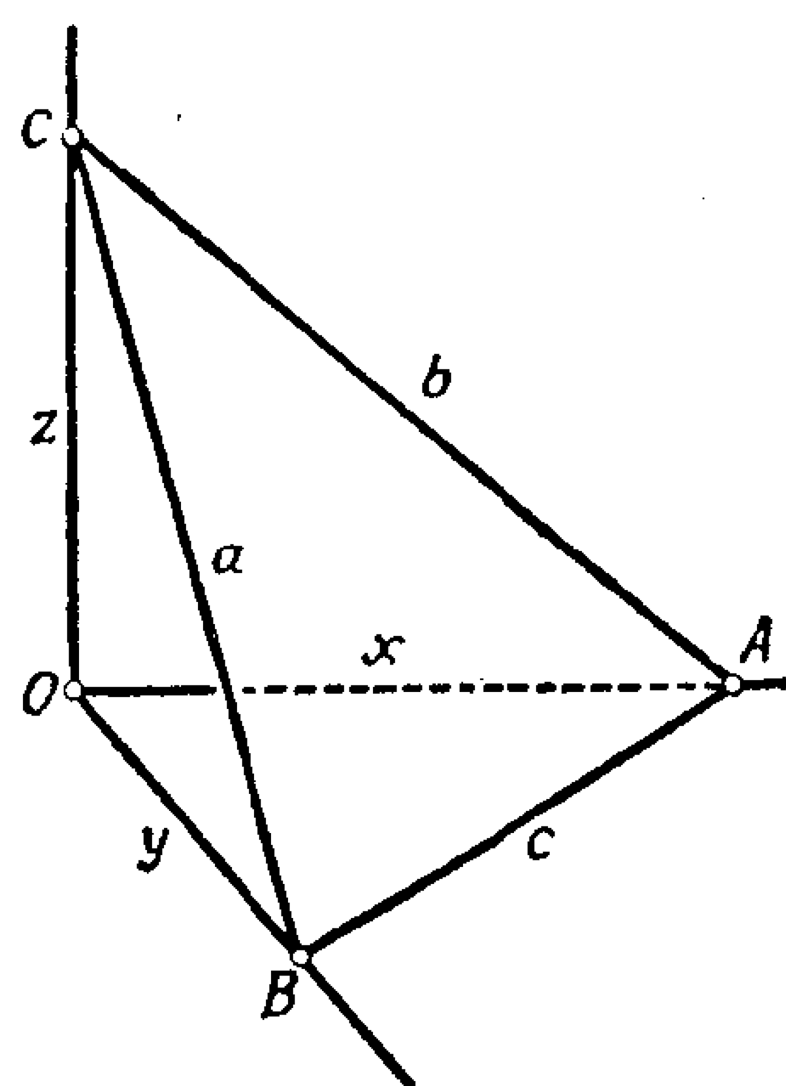


图 133

设 a,b,c 是已知三角形的三边的长，x,y,z是连接点 O 和它的顶点所得的线段 OA,OB,OC 的长（图133）. 这时

$$x^2+y^2=c^2,\quad y^2+z^2=a^2,\quad z^2+x^2=b^2,$$

由此推出

$$2x^2=b^2+c^2-a^2,\qquad 2y^2=c^2+a^2-b^2,$$
$$2z^2=a^2+b^2-c^2.$$

因为在锐角三角形中，任意一边的平方小于其它两边的平方和（见57题的证法 2 的1）和 § 38），所以满足本题条件的点 O 是存在的.

【证法 2】 在证法 1 的1）中证明了，如果存在这样一个点，它对三角形的三边所张的角都是直角，那么本题就解决了. 对三角形的一条边所张的角为直角的空间点的轨迹是以这条边为直径的球面. 因此必须证明，以三角形的三条边为直径的三个球面具有公共点.

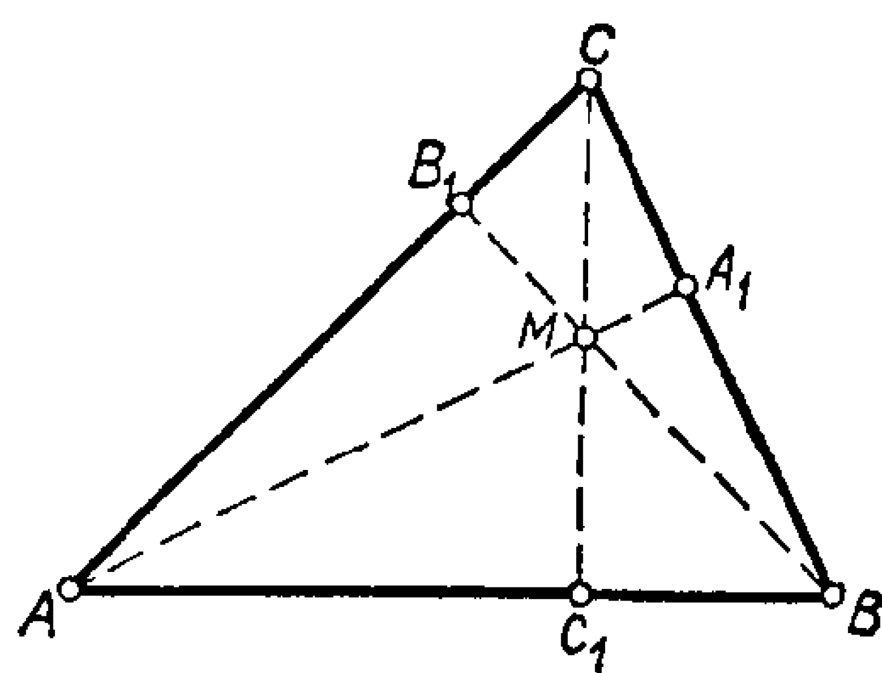


图 134

首先，我们研究两个这样的球面的公共点. 例如研究以 AB 和 BC 为直径的球面. 由顶点 B 作对边 AC 的垂线，垂足为 B_1，那么点 B 和 B_1 在以 AB 和 BC 为直径的球面上（图134）. 因为任何两个球面的交线是一个圆，而以 AB 和 BC 为直径的球面关于△ABC 的平面是对称的，所以，所交成的圆关于这个平面也是对称的. 因此，这个圆在和三角形 ABC 所在的平面垂直的平面上，且以线段 BB_1 为其直径. 同理可证，以 AC 和 BC 为直径的球面所交成的圆在和△ABC 所在的平面垂直的平面上，且以线段 CC_1 为其直径. 这样一来，如果以 BB_1和 CC_1 为直径的两个圆有交点，那么以△ABC 的三边为直径的三个球面也有交点. 这两圆的交点如果存在的话，只能在通过两高 BB_1和 CC_1的交点 M 所作的和△ABC 的平面垂直的直线 l 上. 这两个交点确实是存在的，因为每一个圆是以 BC 为直径的球面和以三角形另一个边为直径的球面的交线，因此，所要求的两个点是垂线 l 和第一个球面的交点.

在作所要求的点时，我们认为△ABC 的高的交点（我们把它叫做垂心）在三角形内，如果△ABC 是锐角三角形，这一点是成立的. 如果△ABC 不是锐角三角形，那么对三边的张角都是直角的点 O 是不存在的，因为三角形的垂心不在三角形内.

126题和129题有密切的联系. 这个联系将在129题的解法 2 中加以研究.

十八、1939年—1941年试题及解答

127．假设实数a_1，a_2，b_1，b_2，c_1，c_2满足不等式

$$a_1a_2>0,\quad a_1c_1\geqslant b_1^2,\quad a_2c_2\geqslant b_2^2.$$

证明：这时有

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2)\geqslant(b_1+b_2)^2.$$

【证明】由本题条件可推出，数a_1，a_2，c_1，c_2同号．

利用条件中所给的不等式可以得到

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2)=a_1c_1+a_2c_2+a_1c_2+a_2c_1\geqslant b_1^2+b_2^2+a_1c_2+a_2c_1. \qquad (1)$$

后面两项是非负的，因此对它们可以应用算术平均值和几何平均值之间的不等式：

$$a_1c_2+a_2c_1\geqslant 2\sqrt{a_1c_2a_2c_1}\ \geqslant 2|b_1|\cdot|b_2|$$

（后一个不等式由本题条件推出）．将所得到的不等式代入到关系式（1）的右边，得到不等式

$$(a_1+a_2)(c_1+c_2)\geqslant b_1^2+b_2^2+2|b_1|\cdot|b_2|=(|b_1|+|b_2|)^2\geqslant(b_1+b_2)^2,$$

这就是所要证明的．★

§65. 关于多元函数的琴生不等式

在所有的数a_1，a_2，b_1，b_2，c_1，c_2是正的且$b_1=\sqrt{a_1c_1}$，$b_2=\sqrt{a_2c_2}$这个特殊情况下，127题所证明的不等式（两边开平方以后）可以写成形式

$$\sqrt{a_1c_1}+\sqrt{a_2c_2}\leqslant\sqrt{(a_1+a_2)(c_1+c_2)}=$$

$$=2\sqrt{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{c_1+c_2}{2}}. \qquad (1)$$

由证明可推出，严格的等式仅在下述情况下成立：如果

$$a_1c_2+a_2c_1=2\sqrt{a_1c_1a_2c_2}\ ,$$

即如果

$$\frac{a_1}{c_1}=\frac{a_2}{c_2},\ 或c_1=\lambda a_1,\ c_2=\lambda a_2.$$

不等式（1）意味着对于函数$F(x,\ y)=\sqrt{xy}$有不等式

$$F(x_1,y_1)+F(x_2,y_2)\leqslant 2F\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right). \qquad (2)$$

如果对于属于一个给定的（有限的或无限的）区间的任意的x_1，x_2和属于另一个给定区间的任意的y_1，y_2，不等式（2）成立，那么不等式

$$F(x_1,y_1)+F(x_2,y_2)+\cdots+F(x_n,y_n)\leqslant$$

$$\leqslant nF\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\ \frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right)$$

对属于这些给定区间中的所有的x_1，x_2，…，x_n和y_1，y_2，…，y_n都成立.

这个不等式不是别的，而是二元函数的琴生不等式，在§43中证明的是一元函数的琴生不等式. 可以用§42中证明柯西不等式的方法来证明二元函数的琴生不等式.

因此，利用不等式（1），我们可以对任意的正数a_1，a_2，…，a_n，c_1，c_2，…c_n推出不等式

$$\sqrt{a_1c_1}+\sqrt{a_2c_2}+\cdots+\sqrt{a_nc_n}\leqslant n\sqrt{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n}}=$$
$$=\sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)(c_1+c_2+\cdots+c_n)}.$$

设 $\sqrt{a_1}=x_1$，$\sqrt{a_2}=x_2$，…，$\sqrt{a_n}=x_n$，$\sqrt{c_1}=y_1$，$\sqrt{c_2}=y_2$，…，$\sqrt{c_n}=y_n$，

则上面的不等式变为

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\leqslant\sqrt{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)}. \quad (4)$$

一步一步地考察琴生不等式的证明，不难相信，严格的等式仅当$y_1=\lambda x_1$，$y_2=\lambda x_2$，…，$y_n=\lambda x_n$时达到，其中的λ是任意的数.

不等式（4）以柯西不等式❶的名称而为人熟知. 在$n=3$这个特殊情况下，它具有下面的几何意义. 不等式的左边和矢量（x_1，x_2，x_3）与（y_1，y_2，y_3）的数量积相同（见§51），而右边是这两个矢量的长度之积. 柯西不等式在$n=3$时可由下推出：两个矢量的数量积等于这两个矢量的长度之积乘它们夹角的余弦，而任何角的余弦不大于1.

128. 在能除尽2^n！的2的所有乘幂中，其最高的幂次是多少？

【解】这个题的解法完全类似于86题的解法. 在数

$$(2^n)!=2^n\times(2^n-1)\times(2^n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$$

的展开式中，每隔一个因子才是一个偶数. 因此总共有2^{n-1}个偶数因子，其中有2^{n-2}个因子能被4整除，有2^{n-3}个因子能被8整除，等等. 最后，有两个因子能被2^{n-1}整除，有一个因子能被2^n整除. 这样一来，在（2^n）！中包含2的最大幂次等于

$$2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1=2^n-1.$$

129. 以锐角三角形ABC的三边AB，BC，CA为直径向外作三个半圆. 在这三个半圆上求点C_1，A_1，B_1，使

$$AB_1=AC_1，BA_1=BC_1，CA_1=CB_1.$$

【解法1】1) 假设点A_1，B_1，C_1满足本题要求. 由它们向$\triangle ABC$的三边作垂线，垂足分别为A_2，B_2，C_2（图135）. 因为$\triangle BC_1A$和$\triangle AB_1C$的顶角$\angle C_1$和$\angle B_1$是直角，根据在直角三角形中关于比例中项的定理，有

$$AC_1^2=AC_2\cdot AB，AB_1^2=AB_2\cdot AC, \quad (1)$$

又因为根据本题条件$AB_1=AC_1$，所以

$$AC_2\cdot AB=AB_2\cdot AC. \quad (2)$$

根据由一点向圆引割线的定理的逆定理（逆定理将在下面证明），点B，C_2，B_2和C在一个圆上. 同理可证，点C，A_2，C_2，A在一个圆上，点A，B_2，A_2，B亦具有同样性质. 由圆周角的定理可以推出，$\triangle ABC$的每一条边对其它两边上的垂足所张的角都相等而且都等于直角. 事实上，例如，我们来研究点A_2. 它对于边AB和AC张的角分别等于点B_2和C_2

❶ 常用"许瓦尔兹不等式"和"柯西—布涅柯夫斯基不等式"这些名称. ——俄译编辑注.

对于边 BC 所张的角的补角，但是后两个张角相等，所以它们的补角也相等. 因为点 A_2 对 AB 和 AC 所张的角相等，这两个角之和为 $180°$，所以它们都是直角.

于是，所要求的点只能是三角形的高和以它的边为直径向外作的半圆的交点.

2） 这样的交点是存在的，因为对于锐角三角形来说，任何一个顶点到对边的高将和对边的本身（而不是这条边的延长线）相交，因而和这些边上的半圆相交. 高和半圆的交点满足本题的全部要求. 例如，由顶点 B 和 C 所作的高的垂足 B_2 和 C_2，对三角形的边 BC 所张的角是直角. 因此，点 B，C_2，B_2，C 在一个圆上，且满足关系式（2）. 但这时对于直角三角形 BC_1A 和 AB_1C 来说，应该满足等式（1），也就是 $AC_1 = AB_1$.

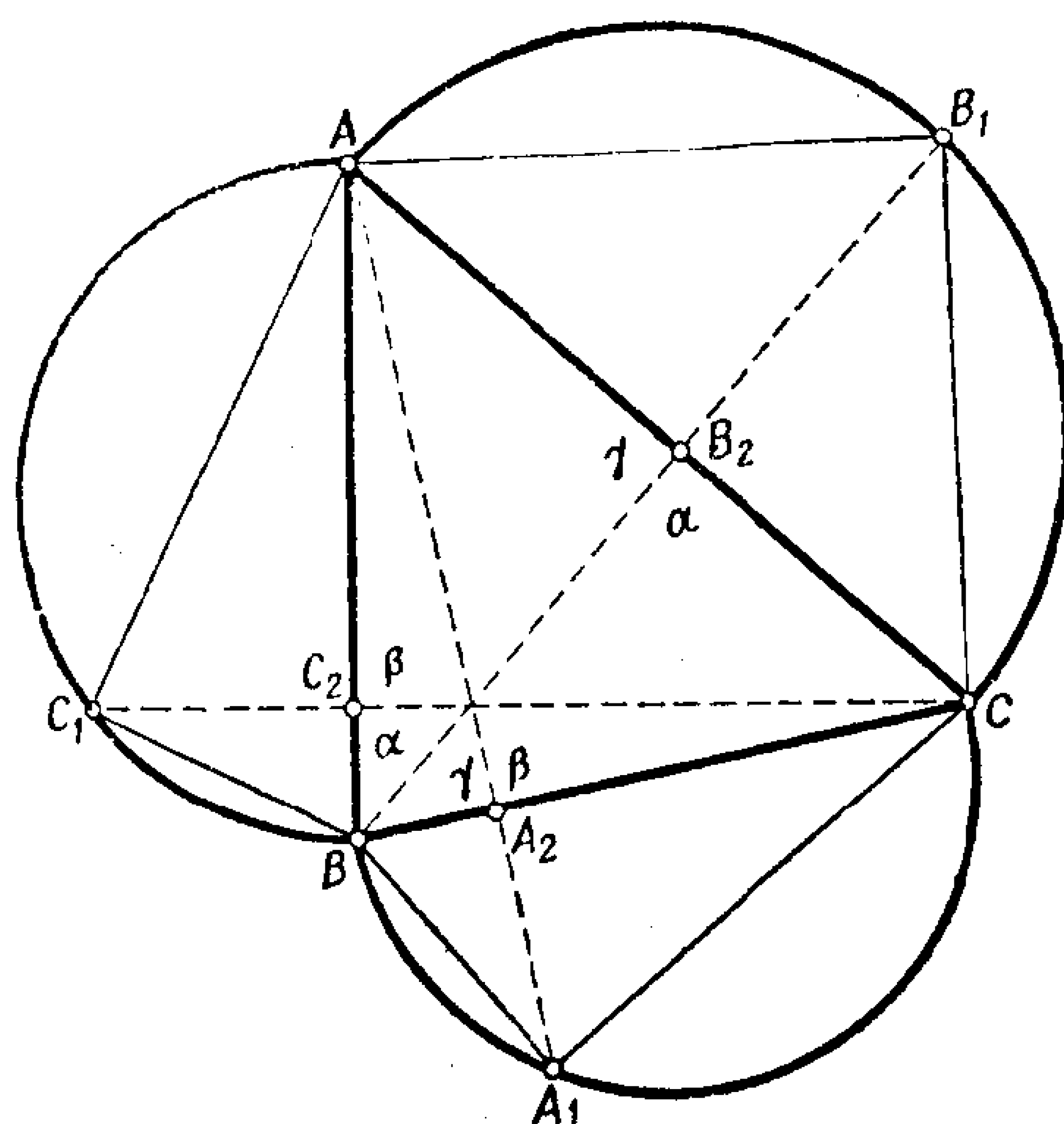


图 135

用同样的办法可以证明其余的等式.

现在我们来证明关于由一点向圆引割线的定理的逆定理（这个定理，我们在解答本题时用了）：**如果点 C_2 在线段 AB 上，点 B_2 在线段 AC 上，且满足关系式（2），那么点 B, C_2, B_2 和 C 在一个圆上**（图136）.

不难看出，由关系式（2）可得到等式

$$AB : AC = AB_2 : AC_2.$$

$\triangle ABC$ 和 $\triangle AB_2C_2$ 有公共的顶角 $\angle A$. 因此，它们是相似的，特别有

$$\angle ABC = \angle AB_2C_2, \qquad \angle C_2BC + \angle C_2B_2C = 180°,$$

这就意味着，对四边形 BC_2B_2C 可作一外接圆.

【**解法2**】1） 假设我们已经作出了满足本题要求的点 A_1，B_1，C_1. 以顶点 B 为圆心，作一圆通过点 A_1 和 C_1，以顶点 C 为圆心，作一圆通过点 A_1 和 B_1（图137）. 因为

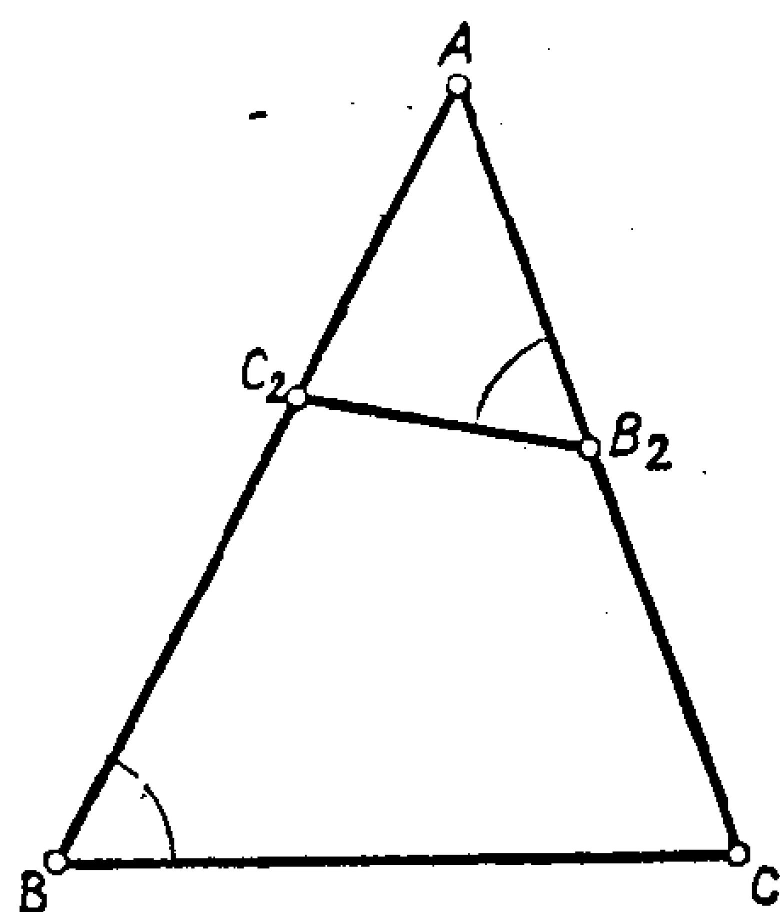


图 136

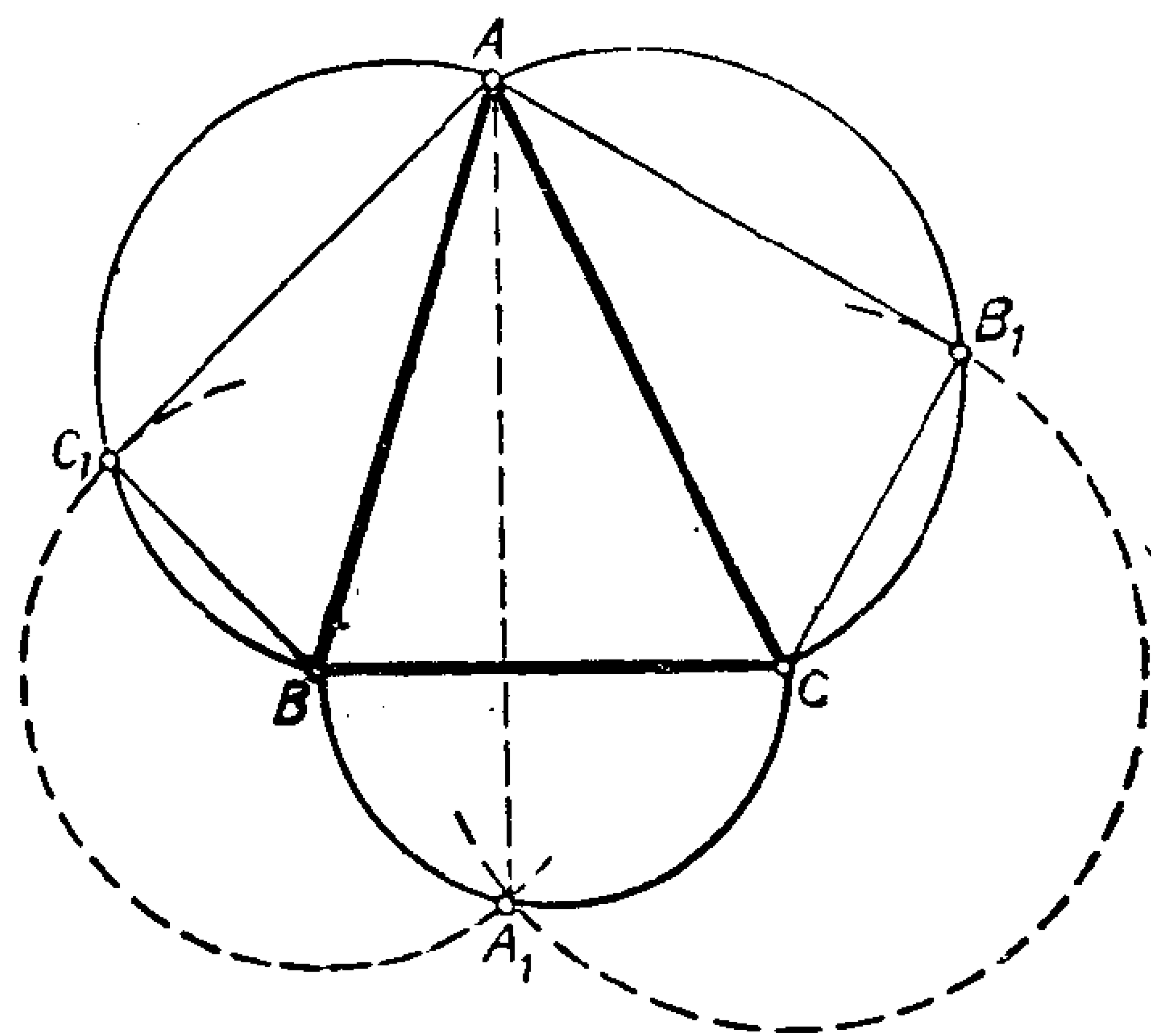


图 137

$$\angle AB_1C = \angle AC_1B = 90°, \quad (1)$$

所以线段AC_1，AB_1和所作的圆相切．根据本题条件，$AB_1 = AC_1$，因此，点A在这两个圆的根轴上（见§48）．但是根轴通过两圆的交点A_1且和它们两圆的连心线BC垂直．因此，点A到BC上的高与以BC为直径所画的半圆的交点和点A_1重合．

2）设A_1是顶点A到BC上的高与以BC为直径所画的半圆的交点．以顶点B和C为圆心，以BA_1和CA_1为半径作辅助圆，这两个圆和以三角形的边AB及AC为直径的半圆相交于点C_1和B_1．因为$\angle AB_1C = \angle AC_1B = 90°$，所以$AC_1$和$AB_1$是所作的辅助圆的切线．但是点$A$在辅助圆的根轴上，因此$AC_1 = AB_1$．根据我们的作法，本题条件所说的其它两个等式也成立．因此，点A_1，B_1，C_1是本题的解．

我们将边AB和AC上所作的半圆绕它们的直径转动，使点C_1和B_1和空间某点O重合．因为$\triangle BOC$和$\triangle BA_1C$全等，所以$\triangle ABC$所有的边对点O所张的角都是直角．因此，点O满足126题的条件．反之，如果知道了点O是126题的解，那么，如果把$\triangle AOB$，$\triangle BOC$，$\triangle COA$绕边AB，BC，CA转动到$\triangle ABC$所在的平面上，我们便得到129题的解．

因此，在这两个题中，只要解答了一个，便可得到另一题的解答．

130．假设有若干个物体，每一个都被染成两种颜色中的某一种颜色(两种颜色的都有)，且具有两种形状中的一种形状（两种形状的都有）．证明:在这些物体中,可以挑出这样两个物体，它们颜色不同，形状也不同．

【证明】我们来考察被染成某一种颜色的全部物体．如果在它们当中有两种不同形状的物体，那么就可以从它们之中选取与另一种颜色的形状不同的物体，这时我们便可得到两个物体，它们具有不同的形状，也具有不同的染色．如果我们所考察的这种颜色的物体，形状完全一样，那么从它们之中任意选取一个物体，再加上另一形状的物体，我们也可得到两个物体，它们的染色不同，形状也不同．

131．假设m和n是两个不同的正整数．证明：

$$2^{2^m} + 1 \quad 和 \quad 2^{2^n} + 1$$

不可能有大于1的公因子．

【证明】设$a_k = 2^{2^k}$．首先证明，序列

$$a_1 - 1,\quad a_2 - 1,\quad a_3 - 1,\ \cdots$$

中的每一项，从第二项开始，都能被前一项整除，从而能被它前面所有的项整除．事实上，因为

$$a_{n+1} - 1 = a_n^2 - 1 = (a_n + 1)(a_n - 1),$$

所以$a_{n+1} - 1$能被$a_n - 1$整除．不难看出，$a_n + 1$是数$a_{n+1} - 1$的约数，从而是数$a_m - 1$的约数，这里$m > n$．

由此推出，当$m > n$时，

$$a_m + 1 = q(a_n + 1) + 2,$$

这里q是整数．同样，这意味着奇数$a_m + 1$和$a_n + 1$的最大公约数是数2的约数．因此，数$a_m + 1$和$a_n + 1$的最大公约数只可能等于1．

如果利用后面133题的解答，我们还可以得到本题的另一个证法．

132. 证明：每一个三角形的三条中线可以构成新的三角形. 再证明：如果 H_1 是原来的三角形，H_2 是 H_1 的中线构成的三角形，H_3 是 H_2 的中线构成的三角形，那么三角形 H_1 和 H_3 相似.

【证法1】 1） 假设 A，B，C 是三角形 H_1 的顶点，A_1，B_1，C_1 是边 BC，CA，AB 的中点. 把三角形 H_1 扩充成平行四边形 $ABCD$. 假设 A_1E 和 C_1F 是平行四边形对边中点的连线（图138）. 我们来证明：$\triangle AA_1F$ 的边等于三角形 H_1 的中线. 对于边 AA_1 来说，这是显然的，由于四边形 AC_1CF 和 A_1BB_1F 是平行四边形，所以对其它两个边，上面的断言也是成立的.

2） 从图138看出，$\triangle AA_1F$ 的中线和原来的 $\triangle ABC$ 的对应边的比是 3/4 ∶ 1，因为平行四边形 A_1B_1FC，AB_1FE，$AB_1A_1C_1$ 的对角线被交点平分，且 B_1 是 $\triangle AA_1F$ 的重心. 这样一来，三角形 H_3 和 H_1 相似，而且三角形 H_3 和 H_1 的对应边的比等于 3/4.

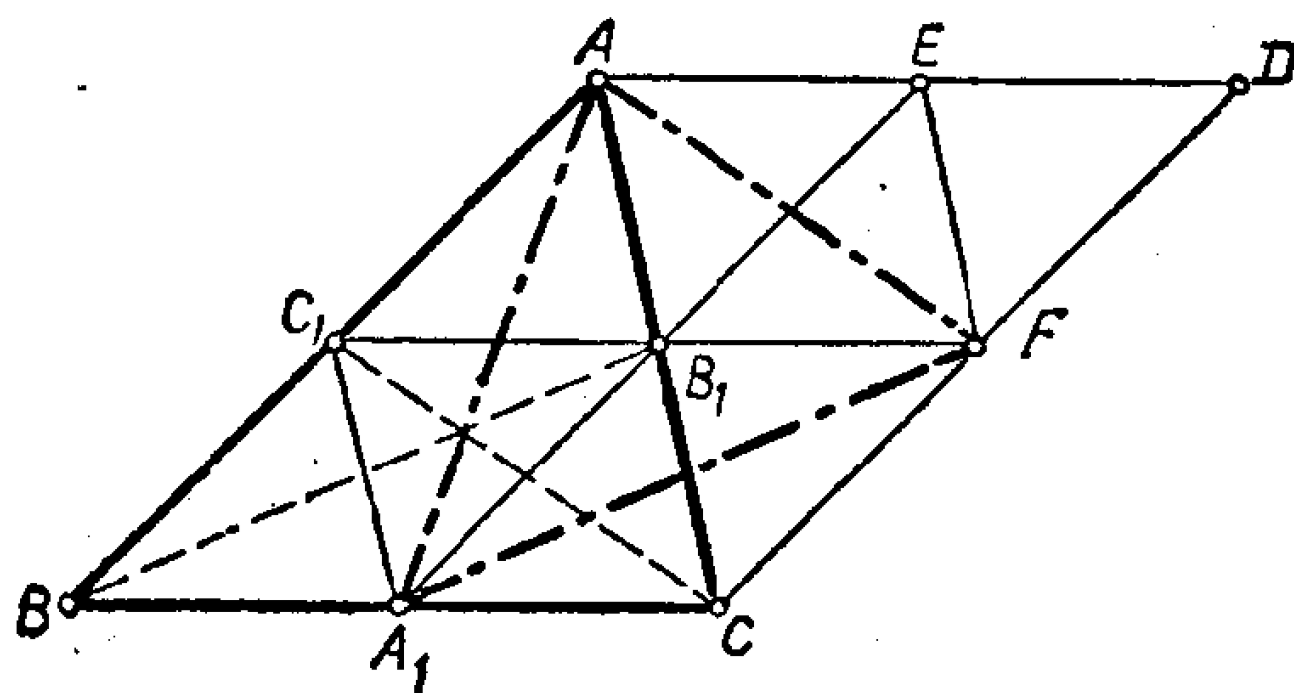


图 138

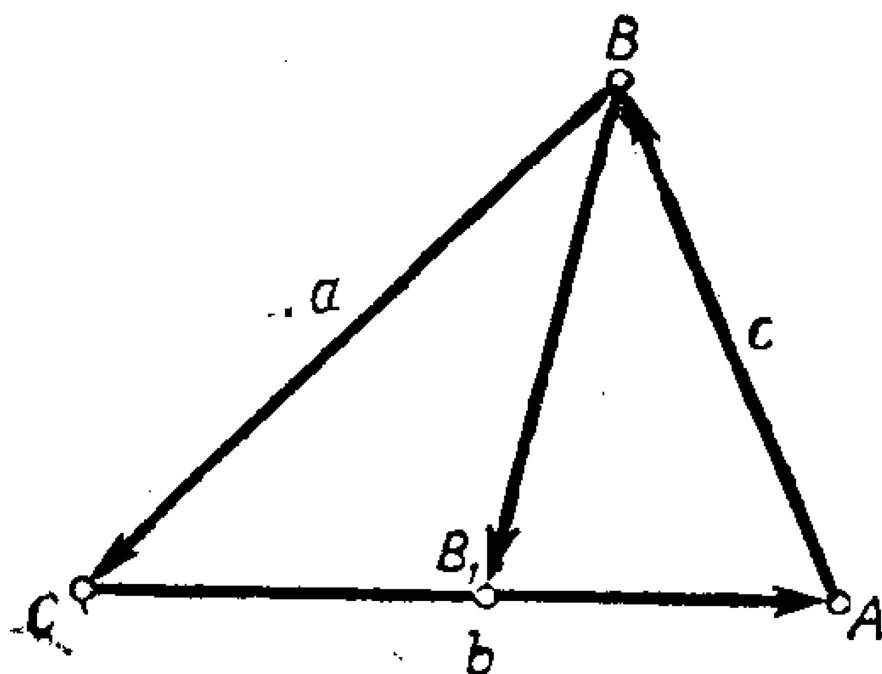


图 139

【证法2】 1） 我们将三角形 H_1 的三边取定方向，使得一个矢量的始点和另一个矢量的终点重合（关于矢量，见§51）. 这时

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0. \qquad (1)$$

中线 BB_1 的方向这样来取，使得它可以表示成矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\frac{\mathbf{b}}{2}$ 的和（图139）.

用类似的方法选取其它两个中线的方向，我们得到矢量

$$\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{2}, \quad \mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{2}, \quad \mathbf{c}+\frac{\mathbf{a}}{2}.$$

因为由关系式（1）有，矢量 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$ 的和等于零，所以，当我们把矢量 $\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{2}$，$\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{2}$，$\mathbf{c}+\frac{\mathbf{a}}{2}$ 一个接一个地放，使后一个矢量的始点和前一个矢量的终点相重合的时候，我们便作出了一个封闭的三角形. 于是便证明了，可以作出一个三角形 H_2，它的边和原来的三角形 H_1 的中线相等，甚至于和它平行.

2） 按照在三角形 H_1 中选取中线方向的原则，我们在三角形 H_2 中来选取中线的方向. 这时利用关系式（1），三角形 H_2 的一个中线可以表示成下面的形式

$$\left(\mathbf{a}+\frac{\mathbf{b}}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{2}\right)=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\frac{\mathbf{c}}{4}=-\frac{3}{4}\mathbf{c}.$$

对于三角形 H_2 的其它两个中线，可以写出类似的表达式，我们得到矢量

$$-\frac{3}{4}\mathbf{a},\quad -\frac{3}{4}\mathbf{b},\quad -\frac{3}{4}\mathbf{c}.$$

它们构成三角形 H_3. 不难看出，它的边和原来的三角形 H_1 的对应边的比是 3/4 ∶ 1. 因此，三角形 H_1 和 H_3 相似.

133. 证明:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^{k-1}})=$$
$$=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2^k-1}.$$

【**证明**】当 $k=1$ 时，本题断言显然成立，假设它对某 $k>1$ 成立. 将恒等式的两边同乘以 $1+x^{2^k}$. 这时，原式右边的项增加了用 x^{2^k} 乘 1，x，x^2，…，x^{2^k-1} 的项，即包含了 x 的从 0 次到 $2^{k+1}-1$ 次的所有乘幂. 于是由归纳假设所成立的恒等式出发，我们又得到了一个恒等式，这两个恒等式不同的仅仅是数 k 被 $k+1$ 代替了. 因此，所要证明的恒等式对所有的自然数 k 都是成立的.

将恒等式两边乘以 $x-1$，我们得到

$$(x-1)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots(1+x^{2^{k-1}})=$$
$$=x^{2^k}-1.$$

新的恒等式可以给出131题另一个证法. 假设 $F_k=2^{2^{k-1}}+1$. 在恒等式中令 $x=2$，且两边同加以 2，恒等式可化成关系式

$$F_1F_2\cdots F_k+2=F_{k+1}.$$

当 $l\leqslant k$ 时，数 F_l 是左边乘积中的因子. 因此，数 F_l 和 F_{k+1} 的最大公约数应该是数 2 的约数，但由于数 F_l 和 F_{k+1} 都是奇数，所以，最大公约数只能等于 1. ★

§66. 关于费尔马数

费尔马说出一个假设：所有的数 F_k 都是素数. 当 $k=0$，1，2，3，4时，费尔马假设被证实了. 但是数 F_5 已经是复合数了：正像欧拉所证明的，$2^{2^5}+1=641\cdot 6700417$. 自那时起，为了研究每一个特定的费尔马数是素数还是复合数，提出了许多数论方法，并且利用了快速计算机. 但是在费尔马数中未能发现任何一个新的素数. 至今还未解决下面的问题：除了我们已经知道的以外，是否还有其它的费尔马数是素数，如果有，那么有多少个，是无穷多个还是有限多个?

虽然关于 $k>5$ 时是否有素费尔马数的事谁也不知道，但是我们毕竟可以利用费尔马数序列来证明：**在自然数中有无穷多个素数**. 事实上，任何两个具有不同附标的费尔马数没有公约数. 因此，它们的标准分解式包含有不同的素数. 但这时所有后面的费尔马数的素约数是不同的，因此，素数有无穷多个.

还存在很多其它的序列，它的任意两项是互素的整数. 例如，不难证明：如果 a 和 b 是互素的数并且按下面的规律来构造序列

$$a_0=1,\quad a_k=a+b\cdot a_0a_1\cdots a_{k-1}\quad (k\geqslant 1),$$

那么序列的任意两项是互素的. 如果 $a=2$，$b=1$，那么按定义设 $F_0=1$，我们得到费尔马数序列 F_k.

134．其坐标（关于某个直角坐标系）为整数的点叫做整点．证明：如果某一平行四边形的顶点和整点相重合，在平行四边形的内部或它的边上还有另外的整点，那么，这个平行四边形的面积大于1．

【证明】我们把顶点和整点重合的多边形叫做**整点多边形**．

我们来研究整点三角形的顶点

$$P_i(x_i,\ y_i),\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

如果这样的三角形不是蜕化的，那么它的面积满足不等式

$$S=\frac{1}{2}\left|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|\geqslant\frac{1}{2},$$

因为绝对值符号里面的数是整数，而 $S\neq 0$．

假设在整点平行四边形内或它的边上，除了顶点以外，至少还有一个整点．将这个整点和平行四边形的所有顶点连接起来，于是我们将整点平行四边形至少分成三个非蜕化的整点三角形．因为它们之中每一个的面积都不小于$\frac{1}{2}$，所以平行四边形的面积不小于$\frac{3}{2}$，于是必定大于1，这就是所要证明的．

因为所有的整点平行四边形都可以分成两个整点三角形，所以任何一个整点平行四边形的面积都不小于1．而且逆命题也成立：**如果整点平行四边形，除了顶点外，不再包含其它的整点，那么它的面积等于1**．这个命题的证明见§67.

135．六边形 $ABCDEF$ 内接于一圆，它的边 AB，CD，EF 等于圆的半径．证明：六边形 $ABCDEF$ 的其它三边的中点是正三角形的顶点．

【证法1】假设O是外接圆的圆心，r 是它的半径，G，H，J 是边 FA，BC，DE 的中点．此外，设 $\alpha=\angle GOF=\angle GOA$，$\beta=\angle HOB=\angle HOC$，$\gamma=\angle JOD=\angle JOE$（图140）．这时

$$\alpha+\beta+\gamma=90°.$$

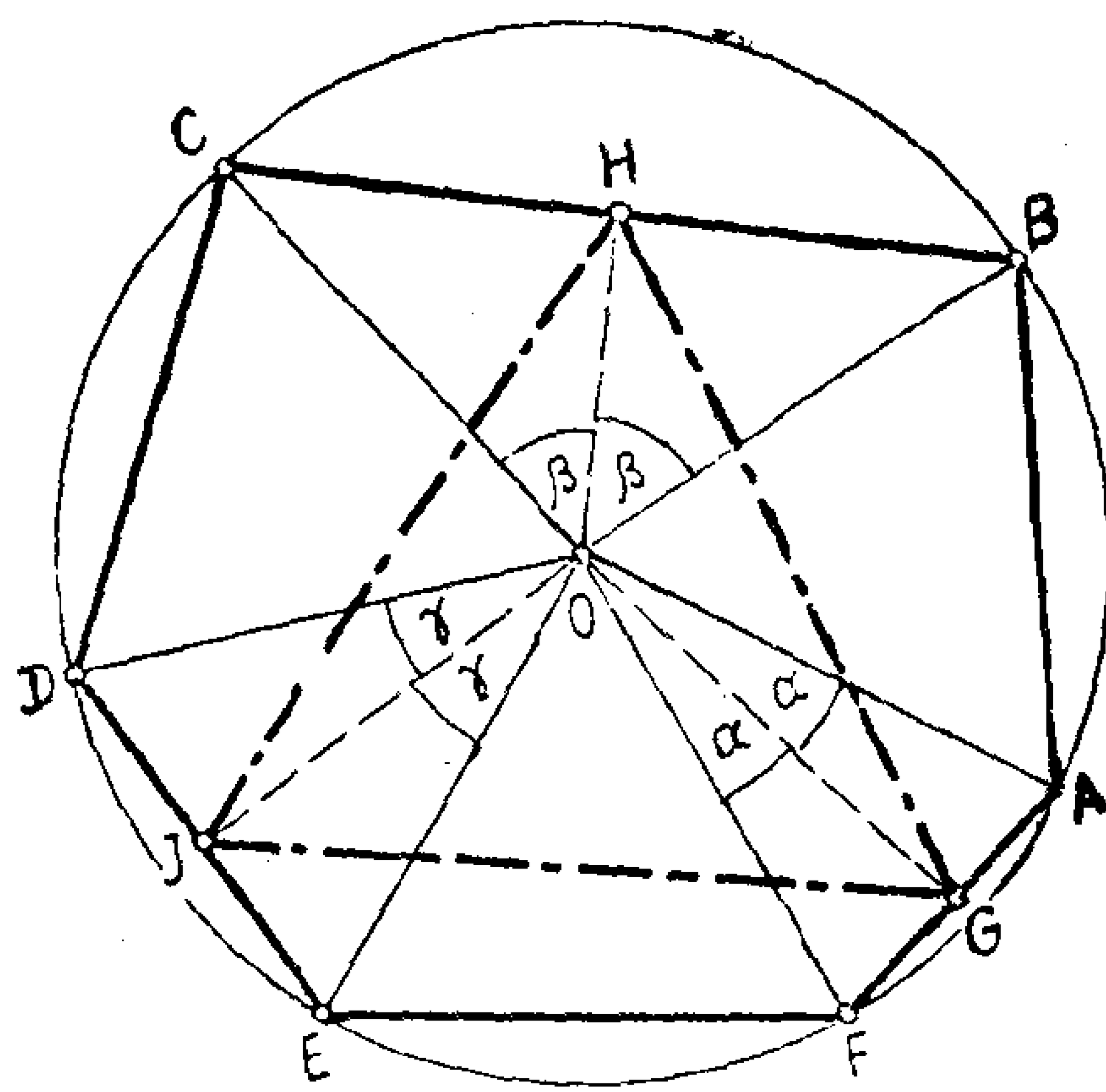


图 140

我们将 $\triangle GHJ$ 的某一边，例如 GH，用 r，α，β，γ 来表示．对于边 HJ 和 JG 的表达式，其不同的仅仅是将 GH 的表达式中的角 α，β，γ 改为 β，γ，α 和 γ，α，β．如果 GH 的表达式与角 α，β，γ 的排列次序无关，那么就证明了 $\triangle GHJ$ 是等边的．

对 $\triangle GHO$ 应用余弦定理，我们得到

$$GH^2=GO^2+HO^2-2GO\cdot HO\cdot\cos(\alpha+60°+\beta).$$

但是

$$GO=r\cos\alpha,\quad HO=r\cos\beta,\quad \alpha+60°+\beta=150°-\gamma,$$

因此

$$GH^2 = r^2[\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos(150° - \gamma)] =$$
$$= r^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos 150° - \cos^2\gamma -$$
$$- \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma).$$

显然，当角α，β，γ重新排列时，圆括弧中的表达式的前四项是不变的．后两项可变为

$$\cos^2\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma =$$
$$= 1 - \sin\gamma(\sin\gamma - \cos\alpha\cos\beta) =$$
$$= 1 - \sin\gamma[\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha\cos\beta] =$$
$$= 1 + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

显然，当角α，β，γ重新排列时，后一等式的右边也不改变．这就证明了本题．

【证法2】设G，H，J，K，L，M是六边形的边FA，BC，DE，AB，CD，EF的中点．线段HK作为$\triangle ABC$的中点连线而平行于弦AC且长度为它的一半（图141）．因此，同位角$\angle BHK$和$\angle BCA$相等，又因为$\angle BCA$是弦AB上的圆周角，根据本题条件，弦AB等于外接圆周的半径，所以$\angle BHK = 30°$．类似地可以证明$\angle CHL = 30°$．线段HK和HL是相等的，因为它们之中的每一个都等于等腰梯形$ABCD$的对角线的一半（$HK = \frac{1}{2}AC, HL = \frac{1}{2}BD$）．以点$H$为圆心，$HL = HK$为半径画圆．线段$KL$在这个圆上所截的弧$KL$是$120°$，因为圆心角$\angle KHL$等于$120°$．以点$J$为圆心，以$JL = JM$为半径画圆，我们又得到$120°$的弧$LM$．线段$MK$对两弧交点$N$所张的角$\angle MNK$等于$120°$，这是因为和它共组成$360°$角的$\angle MNL$和$\angle KNL$都等于$120°$．因此，点$N$在以点$G$为圆心，$GM$为半径所画的圆的弧$MK$上．两两连接所有圆的圆心$G$，$H$，$J$所得的线段垂直于它们的公共弦，因此$\triangle GHJ$的边垂直于线段$NK$，$NL$和$NM$．这些线段中的任意两个的夹角是$120°$（顶点在点$N$），因而$\triangle GHJ$的所有的角都等于$60°$，即$\triangle GHJ$是等边的，这就是所要证明的．

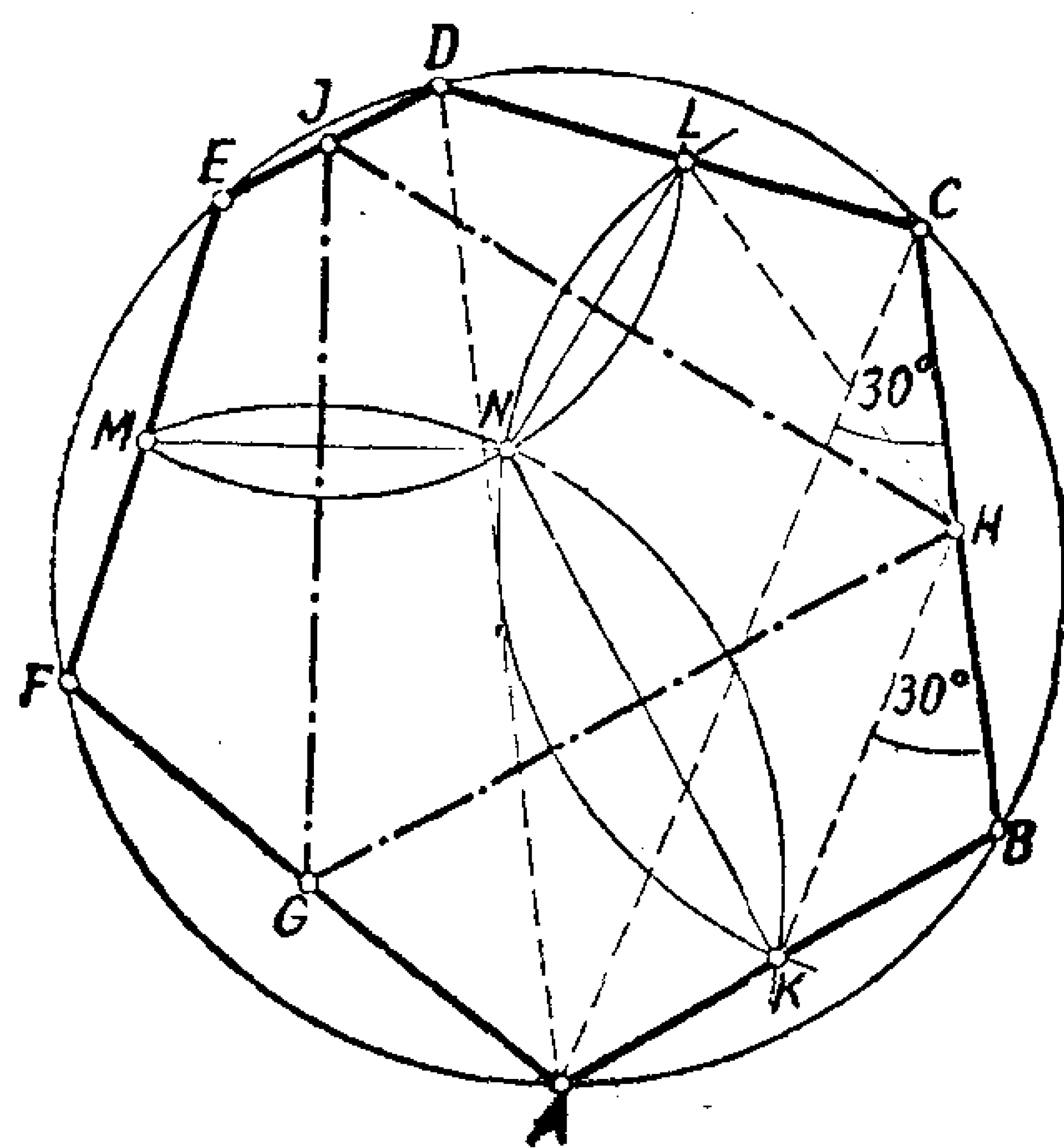


图 141

【证法3】我们在下面更一般的形式下证明本题．

如果$\triangle OAB$，$\triangle OCD$，$\triangle OEF$是等边三角形，且记号是这样选取的：所有三个三角形的环绕方向相同（每一个三角形的顶点以这个三角形记号中的次序环绕），那么以线段FA，BC，DE的中点为顶点的三角形是等边三角形．

设G，H，J是边FA，BC，DE的中点．

我们假设当三角形成某一种分布时，断言是对的．然后我们将$\triangle OAB$旋转到某一新的位置，例如旋转到$\triangle OA'B'$的位置（图142）．边FA'和$B'C$的中点用G'和H'来表示．线段GG'作为$\triangle FAA'$的两边中点的连线而平行于线段AA'且等于它的一半．类似地，HH'平行于BB'且$HH' = \frac{1}{2}BB'$，而且线段BB'等于线段AA'，且旋转$60°$时BB'和AA'重合．根据

假设，$\triangle GHJ$ 是等边的，所以线段 JH 等于线段 JG，且往同一方向旋转60°时，JH 和 JG 重合．因此，$\triangle JGG'$ 和 $\triangle JHH'$ 全等，且当旋转60°时，一个三角形和另一个三角形重合．这就意味着线段 JG' 和 JH' 相等且所夹之角为60°，因此 $\triangle G'H'J$ 是等边的．

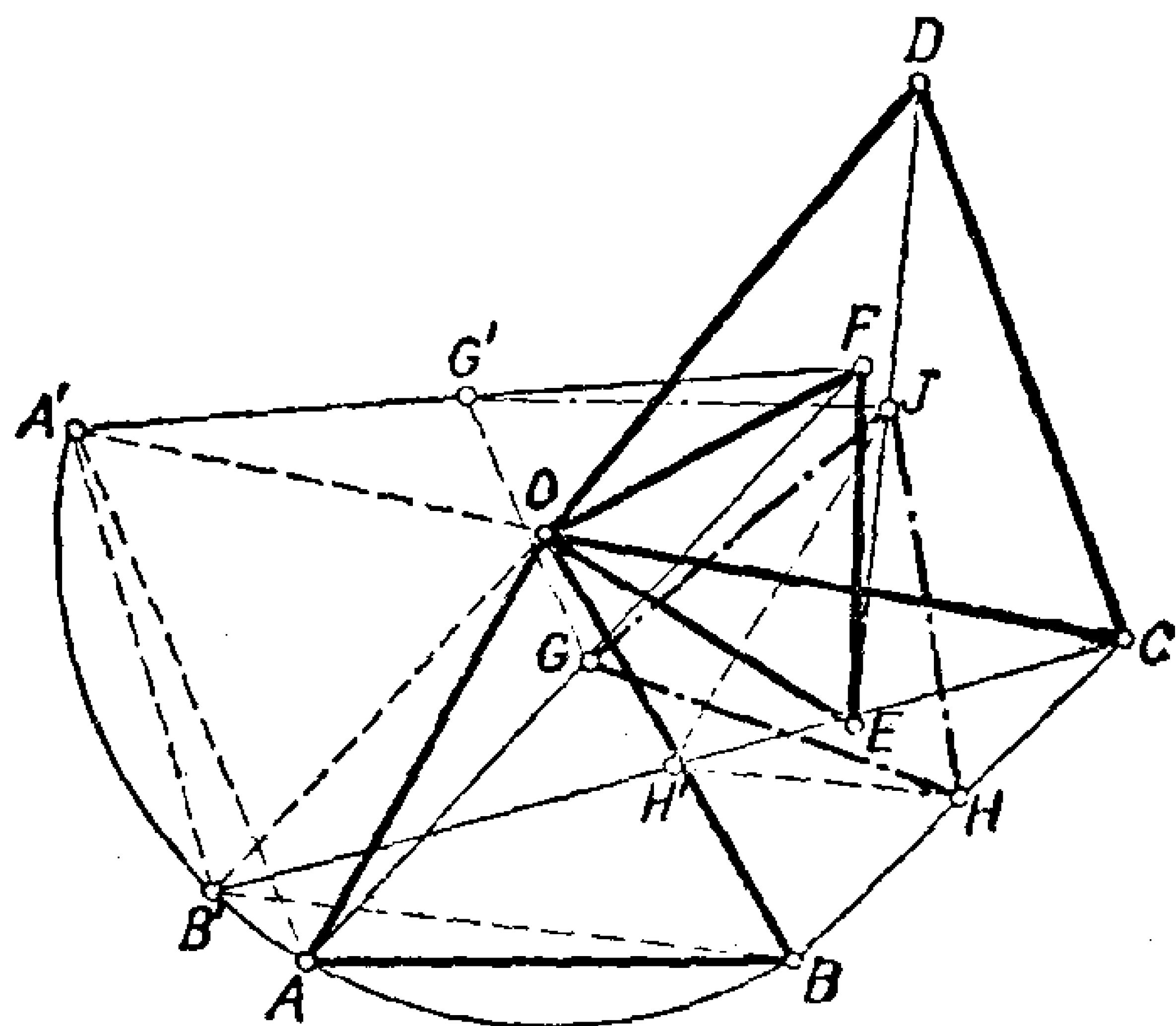


图 142

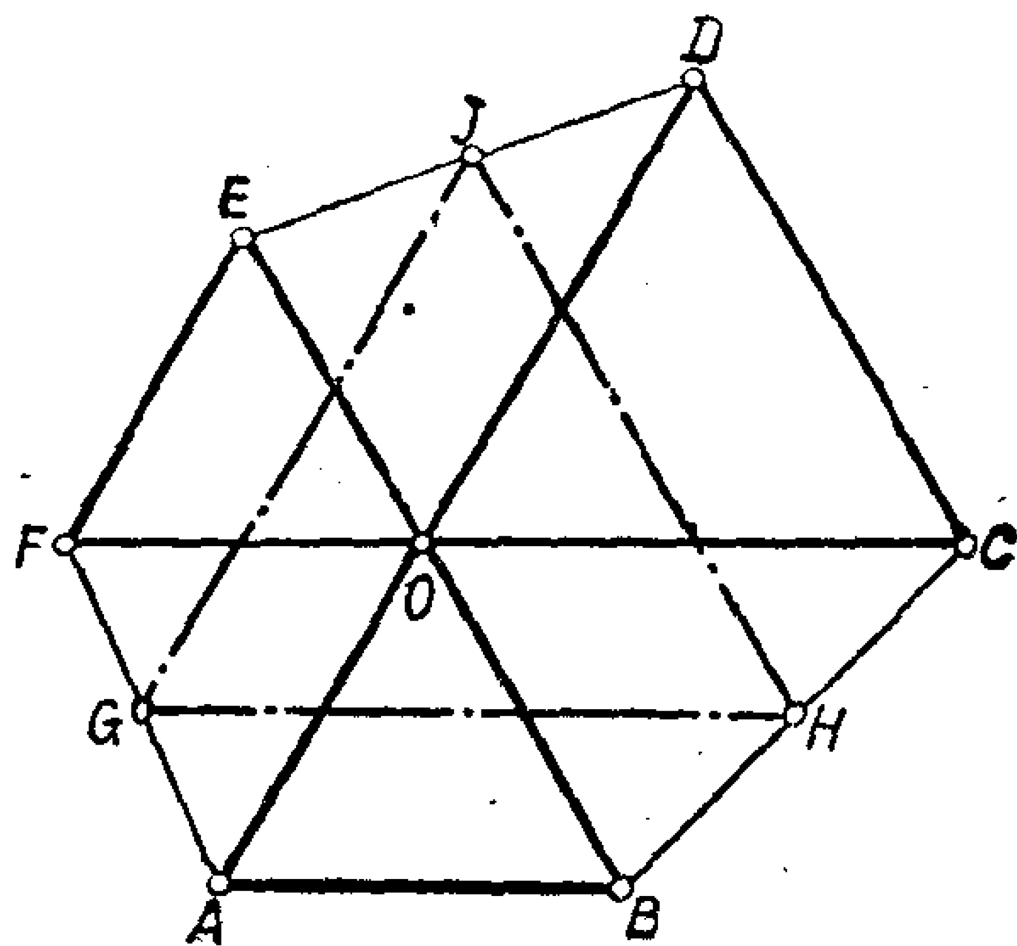


图 143

于是，为了证明比135题更一般的断言，只要找出三角形的这样一种分布，使得在这种分布中，所说的 $\triangle GHJ$ 是等边的就行了．我们将 $\triangle OAB$，$\triangle OCD$，$\triangle OEF$ 这样放，使得相邻两个三角形的边之间的夹角等于60°（图143）．这时 $\triangle GHJ$ 的边将是梯形 $FABC$，$BCDE$，$DEFA$ 的两腰中点的连线．因为它们平行于线段 FC，BE 和 DA，而这些线段两两之间的夹角为60°，所以 $\triangle GHJ$ 的任意两边之间的夹角等于60°．因此，$\triangle GHJ$ 是等边的，这就是所要证明的．

本题原来断言的推广可以用证法2的方法得到．事实上，不难看出，如果 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 是环绕方向一致的等边三角形，而 K，H，L 是边 AB，BC，CD 的中点，那么线段 HK 和 HL 相等，且其夹角为120°（图144）．事实上，容易看出，$\triangle BOD$ 是由 $\triangle AOC$ 旋转60°得到的．

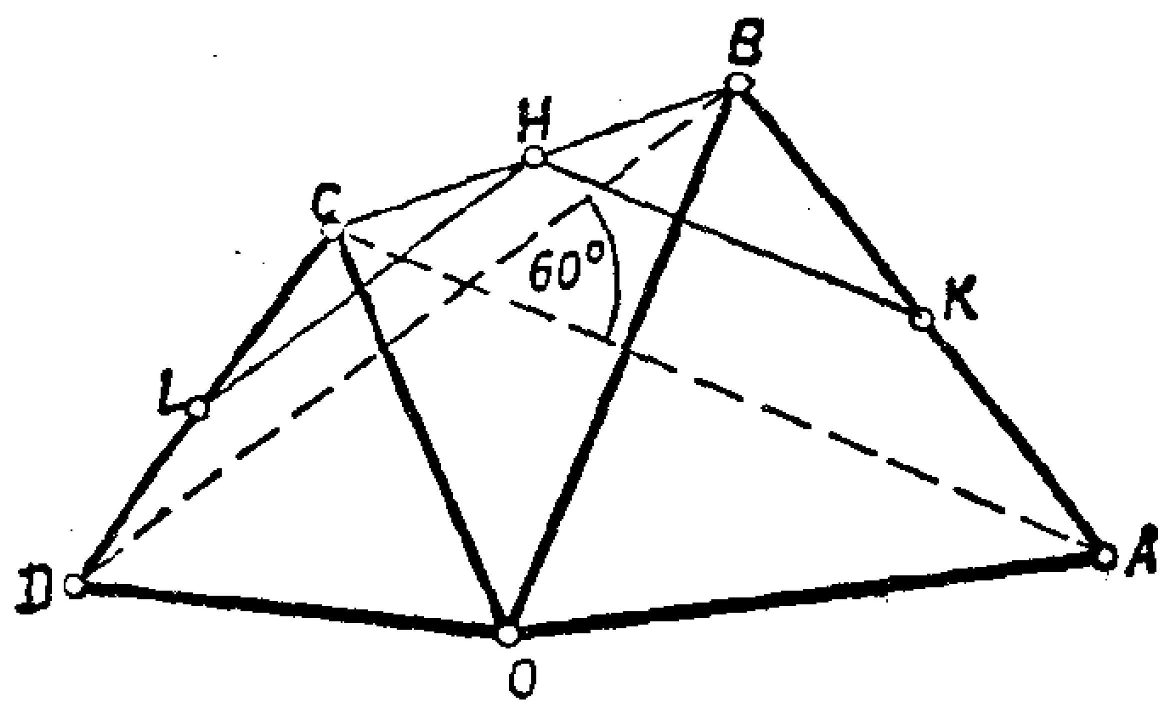


图 144

【证法4】 我们对上一证法中所叙述的原题推广，再给出一个证明．

假设 $\triangle G_1H_1J_1$ 是和 $\triangle GHJ$ 关于点O的同位相似三角形，相似系数为2．显然，我们只要证明 $\triangle G_1H_1J_1$ 是等边的就行了．

我们把给定的等边三角形 OAB，OCD，OEF 的边看作矢量，其方向和上一证法中这些三角形的环绕方向一致．矢量 $\mathbf{r}$ 旋转120°所得到的矢量记作 $\mathbf{r}'$．显然

$$\mathbf{r}''' = \mathbf{r}. \qquad (1)$$

设 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$，$\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$，$\overrightarrow{OE}=\mathbf{e}$（图145）．这时

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}',\ \overrightarrow{BO}=\mathbf{a}'',\ \overrightarrow{CD}=\mathbf{c}',\ \overrightarrow{DO}=\mathbf{c}'',\ \overrightarrow{EF}=\mathbf{e}',\ \overrightarrow{FO}=\mathbf{e}''.$$

因为四边形 OFG_1A，OBH_1C，ODJ_1E 是平行四边形，所以

$$\overrightarrow{G_1H_1}=\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH_1}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{e}''+\mathbf{a}'+\mathbf{c}$$

和

$$\overrightarrow{H_1J_1}=\overrightarrow{H_1C}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DJ_1}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{OE}=\mathbf{a}''+\mathbf{c}'+\mathbf{e}.$$

将第一个等式中的所有矢量旋转120°，我们又得到一个正确的等式，但这时每一个矢量加上了一撇：

$$\left(\overrightarrow{G_1H_1}\right)'=\mathbf{e}'''+\mathbf{a}''+\mathbf{c}'.$$

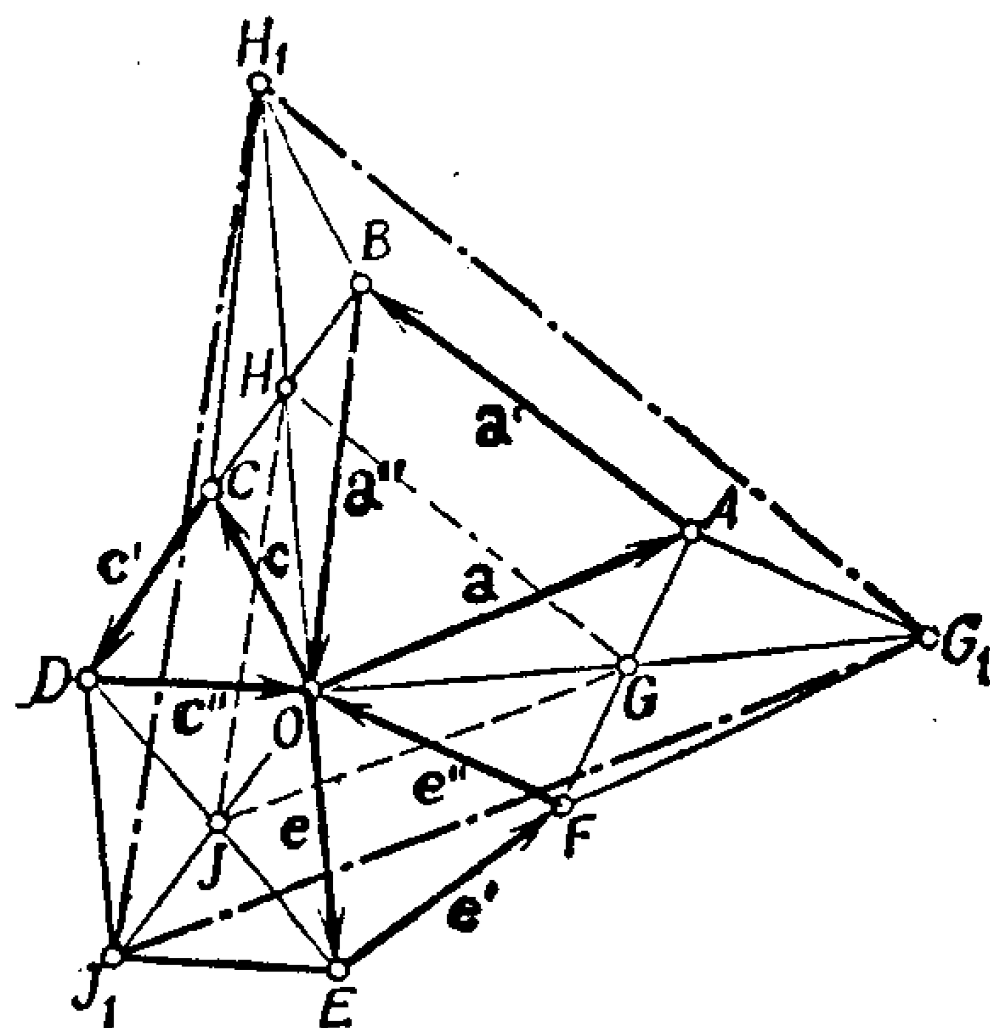


图 145

因为矢量的和在改变它们相加的次序时是不变的，且任一矢量旋转三次，每次旋转120°时，又回到它原来的位置，所以$\left(\overrightarrow{G_1H_1}\right)'=\overrightarrow{H_1J_1}$. 于是在$\triangle G_1H_1J_1$中，两个边相等，且它们的外角等于120°. 因此$\triangle G_1H_1J_1$是等边的，这就是所要证明的.

【证法5】在证法3中所叙述的把原题作为其特殊情况的断言还可以进一步推广.

如果在平面上给定了相似的三角形$A_1A_2A_3$，$B_1B_2B_3$，$C_1C_2C_3$（具有相同附标的顶点彼此相应），且这些三角形的环绕方向是一致的，那么以$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$的重心S_1，S_2，S_3为顶点的三角形和$\triangle A_1A_2A_3$相似（图146）.

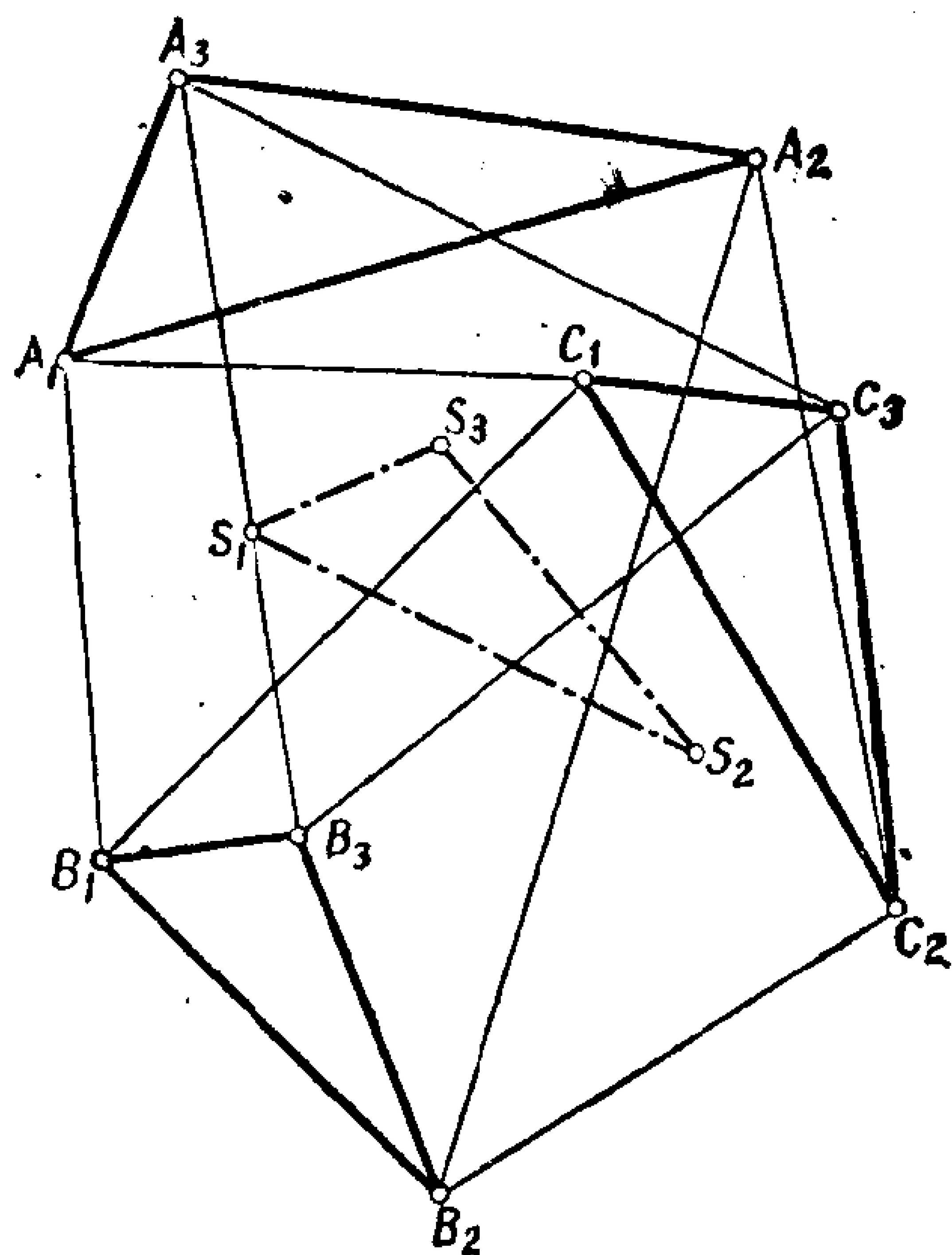


图 146

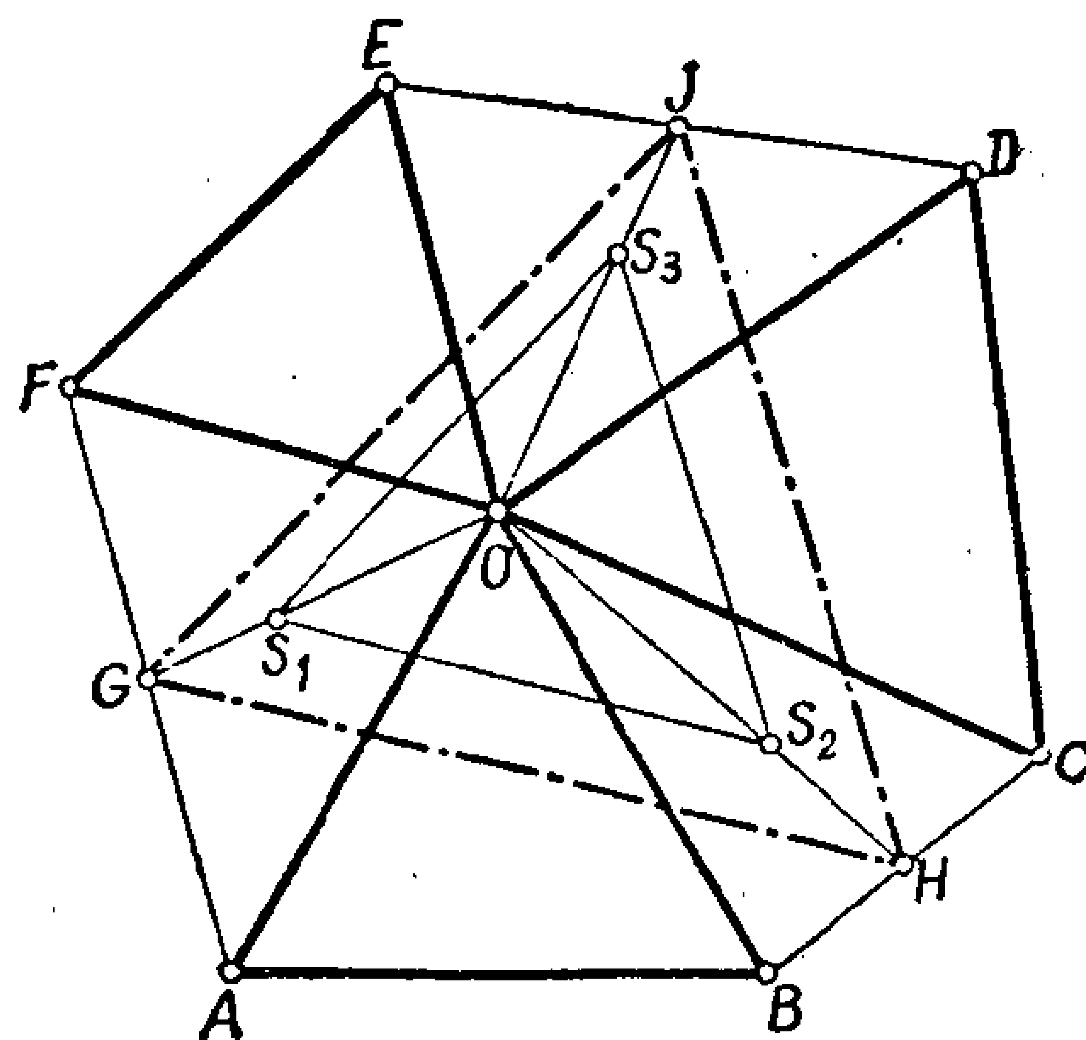


图 147

对等边三角形ABO，OCD，FOE应用所说的定理，我们便可得到$\triangle S_1S_2S_3$是等边的（图147）. 因为这个三角形和$\triangle GHJ$关于点O是同位相似的，相似系数为2/3，所以$\triangle GHJ$也是等边的.

关于$\triangle S_1S_2S_3$和$\triangle A_1A_2A_3$相似的一般定理借助于矢量很容易证明.我们从点O到点A_1，

B_i，C_i，S_i（$i=1, 2, 3$）引矢量且记作 $\mathbf{a}_i$，$\mathbf{b}_i$，$\mathbf{c}_i$，$\mathbf{s}_i$，这时

$$\mathbf{s}_i=\frac{1}{3}(\mathbf{a}_i+\mathbf{b}_i+\mathbf{c}_i) \qquad (i=1, 2, 3).$$

根据条件，将三角形的边 A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2 旋转同一个角度（等于 $\angle A_2A_1A_3$）且放大或缩小同一个比例（等于 $A_1A_3 : A_1A_2$），我们就得到边 A_1A_3，B_1B_3，C_1C_3.

在以 $\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$ 的重心为顶点的三角形中，边 S_1S_2 的方向和长度由矢量

$$\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1=\frac{1}{3}[(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1)+(\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1)+(\mathbf{c}_2-\mathbf{c}_1)]$$

来确定.

如果将这个等式右端的所有矢量旋转 $\angle A_2A_1A_3$ 且放大或缩小一个比例 $A_1A_3 : A_1A_2$，那么等式左边的矢量也将受到同样的变换. 根据本题的条件，右边在旋转和放大（或缩小）以后变成矢量

$$\frac{1}{3}[(\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_1)+(\mathbf{b}_3-\mathbf{b}_1)+(\mathbf{c}_3-\mathbf{c}_1)],$$

它等于 $\mathbf{s}_3-\mathbf{s}_1=\overrightarrow{S_1S_3}$. 但是这意味着 $\triangle S_1S_2S_3$ 和 $\triangle A_1A_2A_3$ 相似.

在上面的证明中，我们利用了下一点：如果 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$ 是三角形顶点的矢径，那么它的重心的矢径可以表示成下面的形式

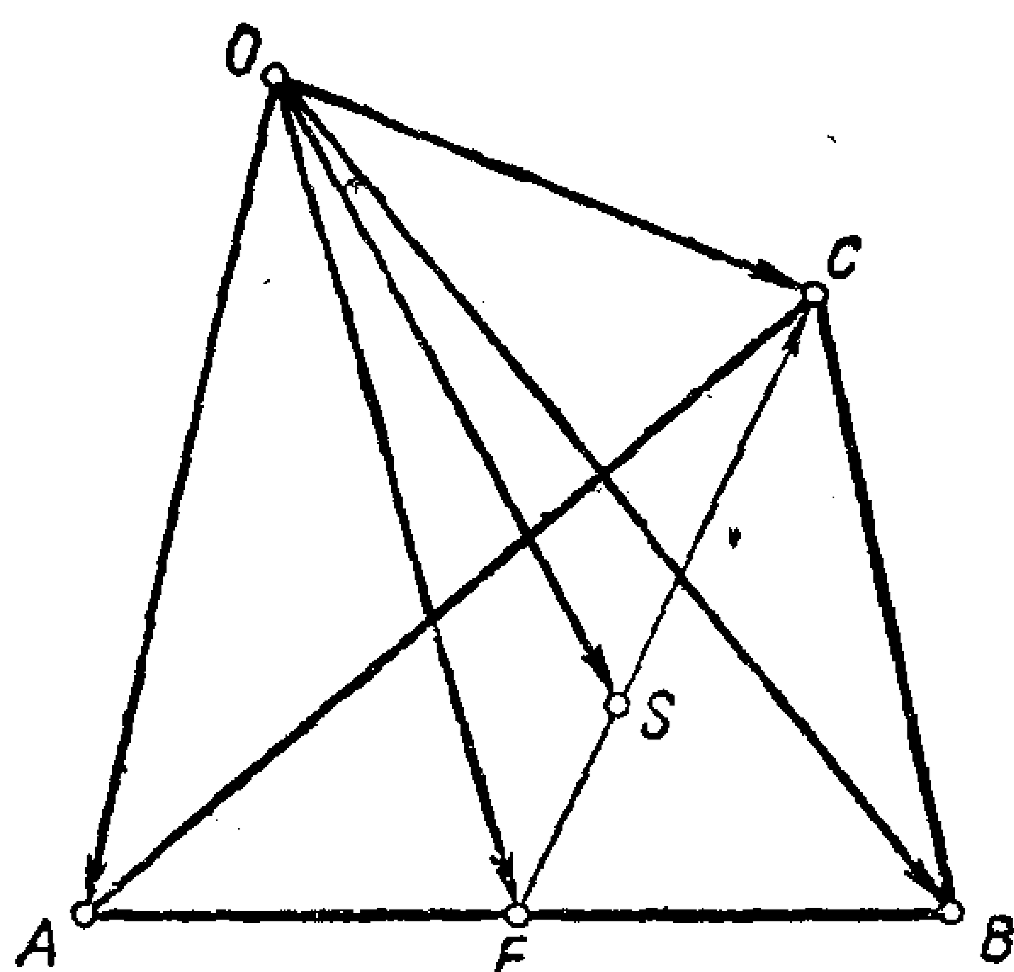


图 148

$$\mathbf{s}=\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

事实上，由图 148，

$$\mathbf{s}=\overrightarrow{OF}+\frac{1}{3}\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{OF}+\frac{1}{3}(\mathbf{c}-\overrightarrow{OF})=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{OF}+\mathbf{c}),$$

但因为

$$\overrightarrow{OF}=\mathbf{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}+\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}),$$

所以

$$\mathbf{s}=\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

所得到的结果可以叙述成：均匀的三角形薄板的重心和它的三个顶点的重心相重合（关于重心见 § 56）.

十九、1942年—1943年试题及解答

136．证明：在任何三角形的边中，比它上面的高要小的边不能多于一个．

【证明】三角形的任何一个高不可能大于由同一个顶点引出的边．

如果三角形的两个边都小于它上面的高，例如，如果 $a<h_a$ 和 $b<h_b$，那么有不等式

$$a<h_a\leqslant b<h_b\leqslant a,$$

这是不可能的．

137．假设 a，b，c，d 是使方程组

$$ax+by=m,\quad cx+dy=n$$

对所有的整数 m，n 都有整数解的整数．证明：这时有

$$ad-bc=\pm 1.$$

【证法1】设 $D=ad-bc$．显然，所有的数 a，b，c，d 不可能都等于 0．例如，设 $a\neq 0$．

如果 $D=0$，那么，设 $\lambda=c/a$，我们得到

$$c=\lambda a,\quad d=\lambda b,$$

由此推出，原方程组仅当 $n=\lambda m$ 时有整数解，这和本题条件相违．因此 $D\neq 0$．

对给定的 m 和 n，原方程组有解

$$x=\frac{md-nb}{D},\quad y=\frac{na-mc}{D},$$

对于所有的整数对（m，n），它们都应该是整数．取 $m=1$，$n=0$ 和 $m=0$，$n=1$，我们求得

$$x_1=\frac{d}{D},\quad y_1=-\frac{c}{D},\quad x_2=-\frac{b}{D},\quad y_2=\frac{a}{D}.$$

因此

$$x_1y_2-y_1x_2=\frac{ad-bc}{D^2}=\frac{1}{D}$$

是整数．但是仅当

$$D=\pm 1$$

时，D 和 $1/D$ 才可能都是整数，这就是所要证明的．

在阅读下面的证明之前，应该先去看看 § 67.

【证法2】首先我们证明：一组对边垂直于 x 轴的基本整点平行四边形的面积等于 1，然后再证明：任何一个基本的整点平行四边形和这样一个平行四边形等积．

1） 如果基本的整点平行四边形 $ABCD$ 的边 AB 垂直于 x 轴，那么 AB 具有单位长度，且 AB 上面的高也等于 1．事实上，如果平行四边形的边 AB 上的高大于1，那么整点平行四边形包含一个单位长的线段，这线段平行于边 AB，它在 x 轴上的投影是离 AB 的投影最近（也就是距离一个单位长）的整点(图149)．

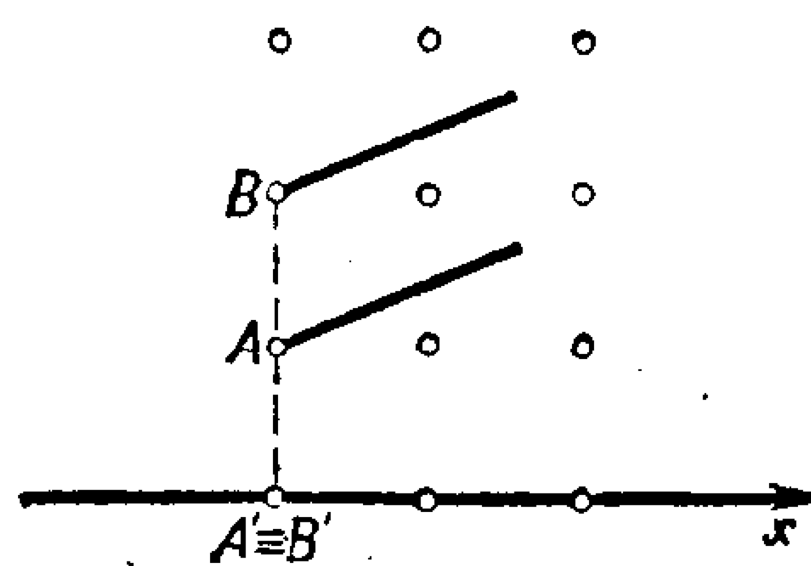


图 149

这线段的端点或一个内点一定和某个整点相重合，因而整点平行四边形不是基本的．因此，边和 x 轴垂直的基本的整点平行四边形的面积等于 1，这就是所要证明的．

2） 我们假设基本的整点平行四边形 $ABCD$ 的边和 x 轴不垂直．这时平行四边形 $ABCD$ 可以用和它等积的另一个基本的整点平行四边形来代替，而新的平行四边形在 x 轴上有较小的投影．设 A'，B'，C'，D' 是平行四边形 $ABCD$ 的顶点在 x 轴上的投影．我们是这样选取顶点的记号的：在 x 轴上，使点 B' 和 D' 在点 A' 和 C' 之间，而且如果点 B' 和 D' 不重合，那么点 B' 在点 D' 和 C' 之间（图 150）．移动 $\triangle BCD$，使它的边 CD 和平行四边形的边 AB 重合．假设 E 是 $\triangle BCD$ 移动后所得到的三角形的第三个顶点．点 E 和平行四边形的顶点 D 关于边 AB 的中点是对称的．$\triangle ABE$，除了和它的顶点相重合的那些整点以外，不包含其它的整点．事实上，如果 $\triangle ABE$ 除了顶点 A、B，E 以外，那怕还包含有一个整点，那么和这个整点关于线段 AB 的中点对称的整点属于 $\triangle ABD$，从而属于平行四边形 $ABCD$，这是不可能的，因为 $ABCD$ 是基本的平行四边形．

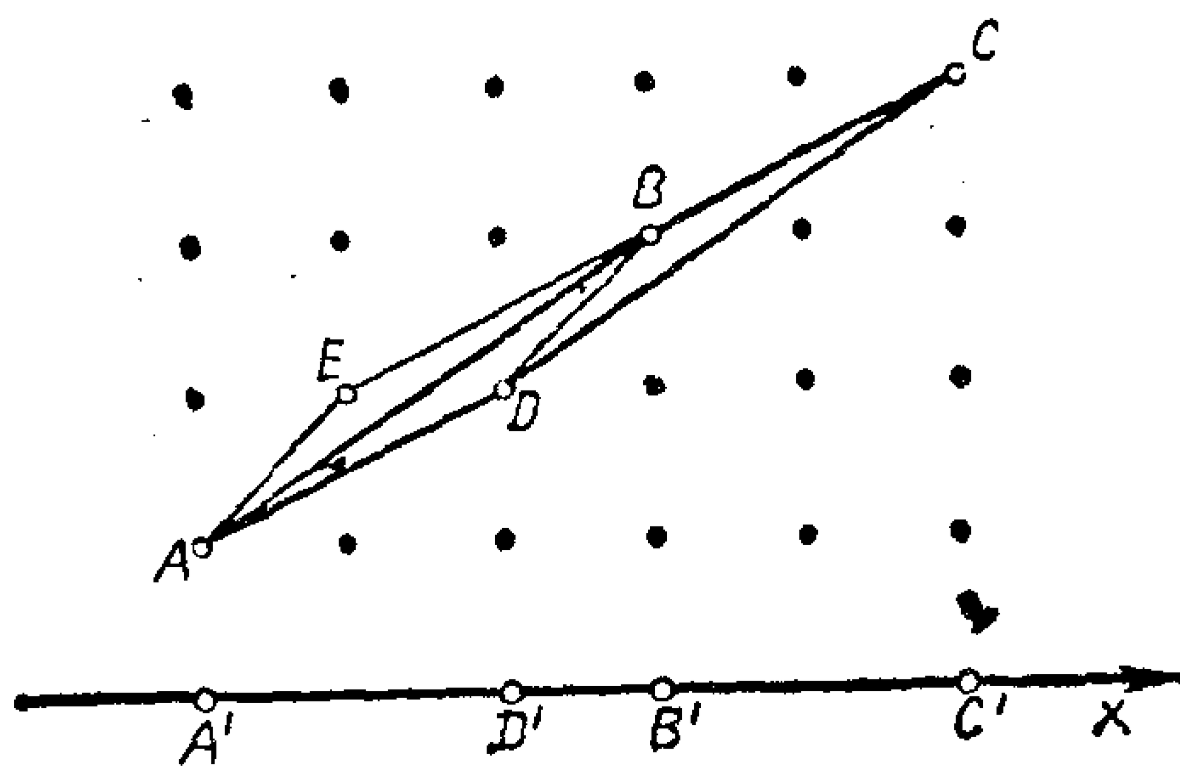


图 150

于是，从平行四边形 $ABCD$ 出发，我们作出了与它等积的基本的整点平行四边形 $ADBE$．新的平行四边形在 x 轴上投影成线段 $A'B'$，因为点 D 在 x 轴上的投影 D' 在线段 $A'B'$ 内，所以和 D 关于线段 AB 的中点对称的点 E 在 x 轴上的投影也在线段 $A'B'$ 内．这时 $A'B' < A'C'$．这种作法可以重复下去，只要所得到的平行四边形的边和 x 轴不垂直．经过有限次作法以后，所得到的平行四边形的边将和 x 轴垂直，这是因为平行四边形投影成的线段的长度是用正整数表示的，所以不超过给定正整数的递减正整数序列只能有有限个项数．边和 x 轴垂直的平行四边形在 x 轴上投影成长度最短的线段．根据 1）中的证明，这样的平行四边形的面积等于 1．因此，和它等积的平行四边形 $ABCD$ 的面积也等于 1．

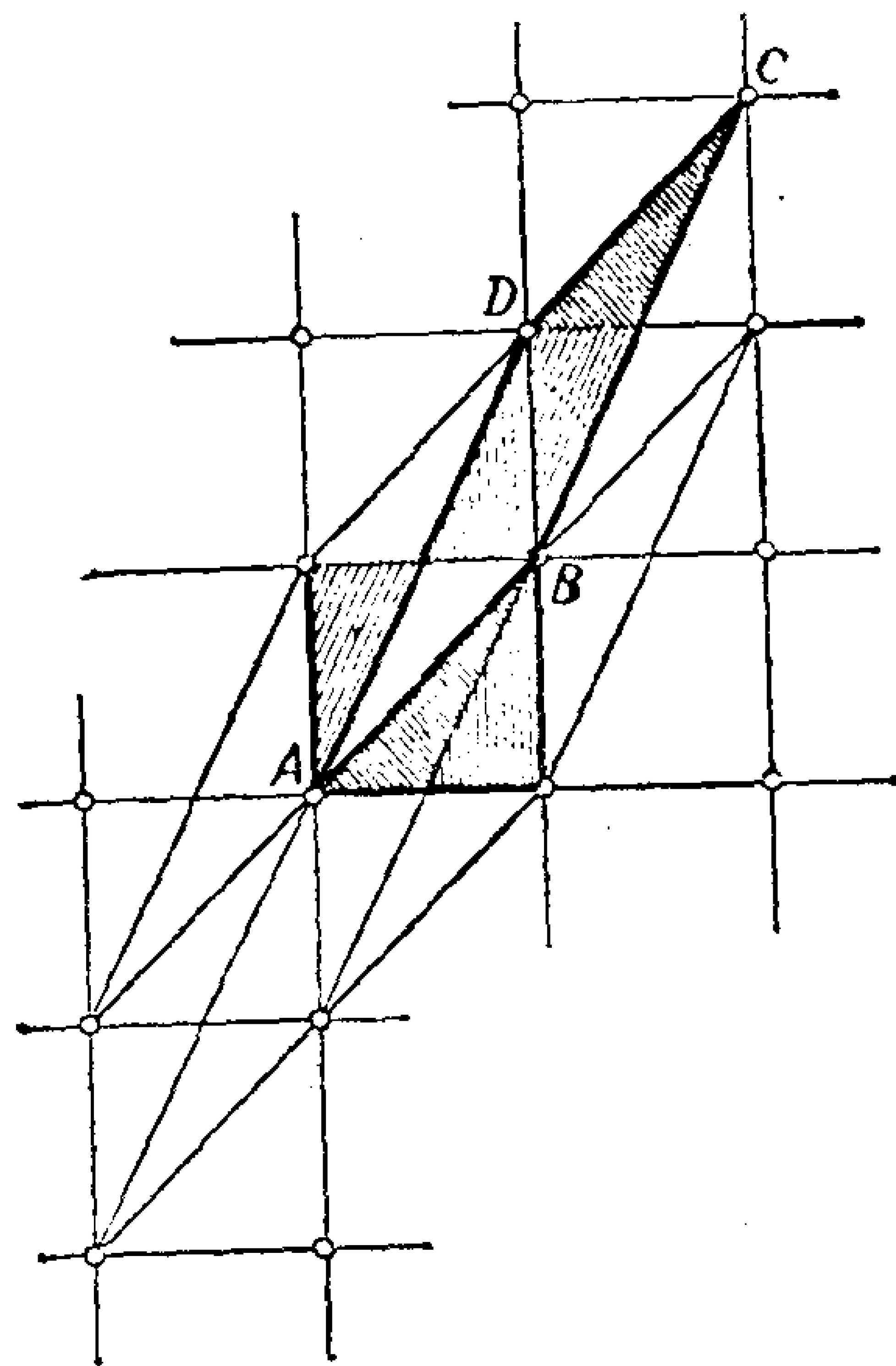


图 151

【证法 3】 假设 $ABCD$ 是基本的整点平行四边形．把它当作初始的，我们作整点平行四边形网格．另一方面，通过整点作和 x 轴以及 y 轴平行的直线，于是我们得到边长为 1 的正方形网格，每一种网格都无空白也不重叠地充满了整个平面（图 151）．在图中，两种网格只画出了一部分，仅画出了那些和平行四边形 $ABCD$ 相交的正方形，以及和这些正方形有公共部分的平行四边形．

我们选取某一个正方形，用平行移动的办法，将平行四边形 $ABCD$ 被正方形网格切成

的几部分，移到这个正方形内（在图151中，选取的是以 AB 为对角线的正方形）．移到正方形内的平行四边形的各部分是没有公共内点的．因为事实上，如果我们作平行移动，使所选取的正方形和任何一个其它的正方形格子重合时，我们也将整个平行四边形 $ABCD$ 移动了，那么它也平移到某一个其它的平行四边形格子，而且对于不同的平行移动，平行四边形 $ABCD$ 将和不同的格子重合，这些格子互不重叠地填满了整个平面．另一方面，我们所选取的正方形的每一个点属于平行四边形网格中的某一个格子，因为这些格子无空白地填满了整个平面．我们来研究所选取的正方形的任意一点．利用平行移动，在使平行四边形 $ABCD$ 和包含这个点的平行四边形重合时，从而也就使一个正方形格子和我们所选取的正方形重合，而我们所选取的点被平行四边形 $ABCD$ 在这个正方形格子内的那一部分盖住了．

因为所选取的正方形的面积等于1，所以平行四边形 $ABCD$ 的面积也等于1．

【证法4】本题的断言等价于：每一个基本的整点三角形的面积等于1/2．事实上，作一条对角线总可以把任一基本的整点平行四边形分成两个等积的基本的整点三角形，反之，作一个三角形和基本的整点三角形关于它任意一边对称，我们得到基本的整点平行四边形，其面积比三角形大一倍．

我们研究某一个整点三角形，它包含在某一个边和坐标轴平行的整点矩形内．我们把这个矩形分成基本的整点三角形，使得其中一个就是我们所选取的整点三角形（图152）．这总是可以做得到的．

我们来证明，包含在整点矩形中的基本的整点三角形的个数不依赖于将这个矩形划分为这样的三角形的方式．

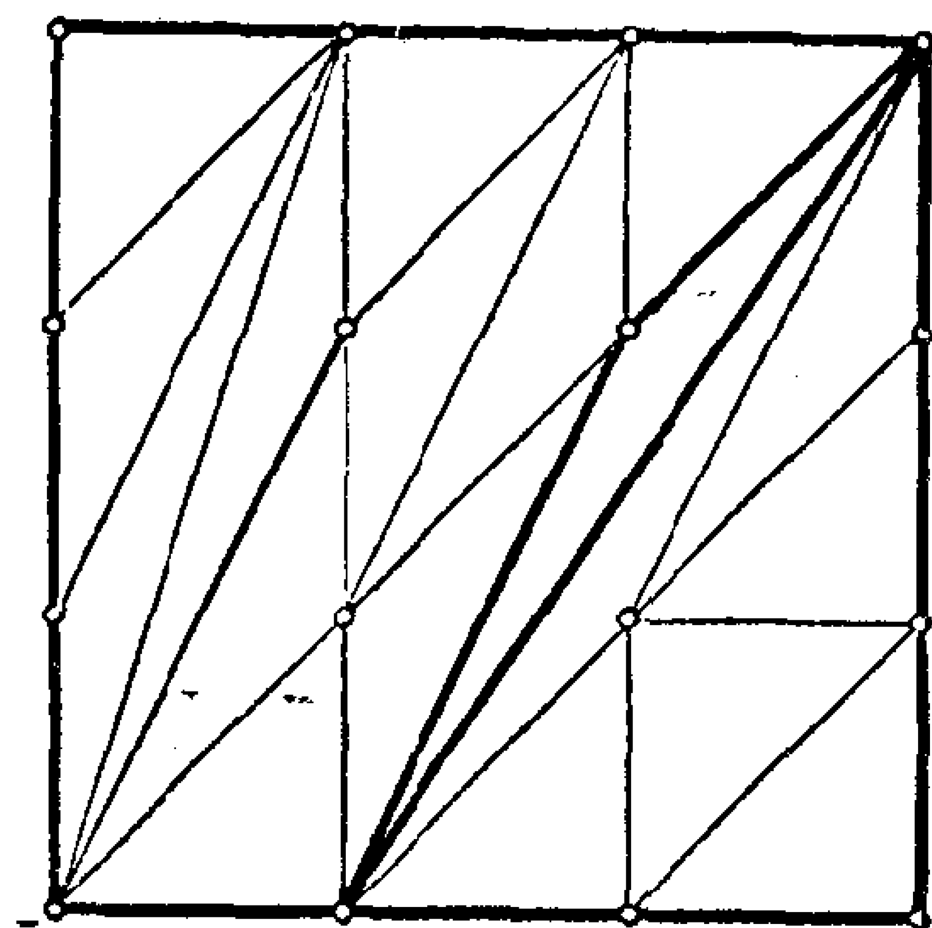


图 152

为了证明这个断言，我们来计算所有的三角形的内角和．这些三角形的顶点是在矩形内或它的边界上的整点．我们这样来计算．将这些三角形的顶角分成如下几类：①顶角的顶点也是矩形的顶点．显然这些顶角之和等于 $4\times90^\circ$；②顶角的顶点是矩形边上的整点（但不和矩形顶点重合）．这样的顶角之和等于 $m\times180^\circ$，其中 m 是矩形四条边上的整点的个数（不包括矩形的顶点）；③顶角的顶点是矩形内的整点．这样的顶角之和等于 $n\times360^\circ$，其中 n 是矩形内整点的个数．这样一来，这些三角形的顶角之和等于 $4\times90^\circ+m\times180^\circ+n\times360^\circ$．这也就是说，这些三角形的内角和是由矩形所含有的整点数唯一确定的．另一方面，这些三角形的内角和又等于 $k\times180^\circ$，这里的 k 是三角形的个数．由于 $k\times180^\circ$ 是由矩形的整点数唯一确定的，所以三角形的个数 k 也是由矩形的整点数唯一确定的．而且 $k=2+m+2n$．[1]

将矩形划分成单位正方形，且在每一个正方形中引一条对角线．这时所得到的半个正方形的个数和在原来的划分中，矩形被分成基本的整点三角形的个数是相等的．矩形的面积等于它所包含的基本的整点三角形的个数的一半．因此，将矩形任意划分成基本的整点三角形时，这些基本的整点三角形的面积都应该等于1/2，因为任何一个整点三角形的面积不小于1/2（整点三角形的面积等于1/2和某一个整数的乘积）[2]．因此本题断言得证．

[1] 对原文的这一段做了一些改动．——中译者注．

[2] 在题134的解答中表明了，整点三角形的面积仅仅在它是基本的整点三角形时达到最小值．

§67. 关 于 整 点

为了仔细探讨137题的几何意义，我们在平面上引入整点网格.

1）设O，P，Q是平面上不在一直线上的任意三点. 在通过点O和P的直线上，在点O的两侧以OP为步长取各等分点，通过各分点引直线平行于OQ. 类似地，在直线OQ上，在点O的两侧以OQ为步长取各等分点，而通过各分点引直线平行于OP. 结果全平面被边相互平行且全等的平行四边形网格复盖. 这些平行四边形的顶点（所引直线的交点）构成所谓**点阵**（图153）.

平行四边形网格唯一地确定点阵，但反之不然. 例如，如果点O和P不变，而用以OP，OQ为边的平行四边形的另一个顶点来代替点Q，那么由这三个点出发可以作出新的平行四边形网格，它和原来的网格是不同的，但是点阵仍然是其自身.

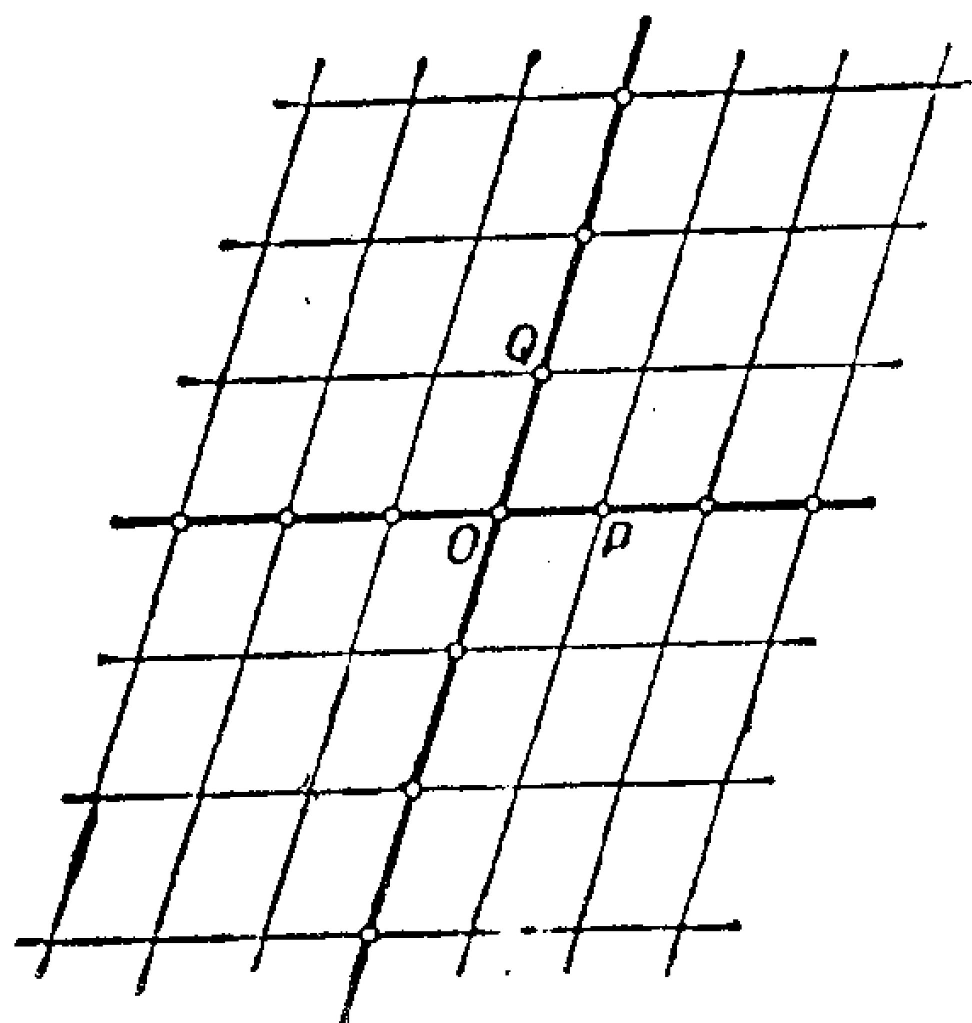


图 153

设$\mathbf{p}$和$\mathbf{q}$是由点O到点P和Q的矢径. 这时任何一个整点（网格结点）的矢径可以写成

$$x\mathbf{p}+y\mathbf{q} \qquad (1)$$

的形式，其中x和y是整数，而所有矢径能表示成（1）的形式的点和一个整点重合. 换句话说，如果x和y相互独立地取所有的整数值，那么具有形如（1）的矢径的点的集合和具有边$\mathbf{p}$和$\mathbf{q}$的平行四边形的顶点所构成的点阵相重合.

两个相互垂直的轴以及和它们平行且相互的距离为整数的直线所构成的点阵具有特别重要的意义. 这样的网格叫做**基本的**. 基本网格是边平行于坐标轴的单位正方形的网格. 由它所生成的点阵包含其坐标为整数的点而且仅仅包含这样的点.（这样的网格在134题中遇到过.）现在我们感兴趣的仅仅是这样的网格. 虽然读者可以毫无困难地将下面所说的断言推广到由任意的平行四边形网格所生成的点阵上去. 今后所说的点阵（若不指明是平行四边形网格）将意味着是**由基本网格所生成的点阵**.

2）其坐标为整数的矢量叫做**整点矢量**. 所有始点和终点都和整点重合的矢量是整点矢量，反之，如果整点矢量的一个端点和整点重合，那么另一个端点也和整点重合. 整点矢量的和以及整点矢量乘以整数所得到的矢量仍然是整点矢量. 由此推出，**整点关于任何其它整点的对称点或关于连接两个整点所得到的线段的中点的对称点仍然是整点**. 此外，**和整点同位相似——以任意其它的整点为同位相似中心而相似系数为整数——的点也是整点**. 事实上，设$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$是整点A，B，C的矢径，而$\mathbf{d}=\overrightarrow{AB}$. 这时点$A$关于点$B$的对称点$A'$的矢径等于$\mathbf{b}+\mathbf{d}$（图154，$a$），点$A$关于线段$BC$的中点的对称点$A'$的矢径等于$\mathbf{c}-\mathbf{d}$（图154，$b$，$c$，$d$），和矢量$\overrightarrow{AB}$乘以整数$k$所得到的矢量的终点相重合的点的矢径等于$\mathbf{a}+k\mathbf{d}$（图154，$e$）. 所有三个矢量$\mathbf{b}+\mathbf{d}$，$\mathbf{c}+\mathbf{d}$，$\mathbf{a}+k\mathbf{d}$都是整点矢量（最后一个是整点矢量是因为$k$是整数），因而是整点的矢径.

3）现在我们回到137题. 设$\mathbf{p}=(a,c)$，$\mathbf{q}=(b,d)$是整点矢量. 方程

$$ax+by=m, \qquad cx+dy=n$$

的左边可以看作是矢量

$$x\mathbf{p}+y\mathbf{q}$$

的坐标. 根据本题条件，a,b,c,d是这样选取的，当x和y取所有的整数值时，我们将得到所有整点的矢径.

这就意味着由边为$\mathbf{p}$，$\mathbf{q}$的平行四边形网格所产生的点阵和基本的点阵相重合. 换句话说，后一个点阵的整点分布在平行四边形的顶点上，而且任何一个整点都不在平行四边形的内部或周界上. 顶点为整点而且其内部或周界上都不含有任何一个整点（除了和它的顶点相重合的整点以外）的平行四边形叫做**基本的**整点平行四边形.

如果以矢量$\mathbf{p}$，$\mathbf{q}$作成的平行四边形的面积用这些矢量的坐标来表示，那么将得到表达式$|ad-bc|$. 这样一来，如果我们证明了每一个基本的整点平行四边形的面积等于1，那么我们就得到了本题的断言.

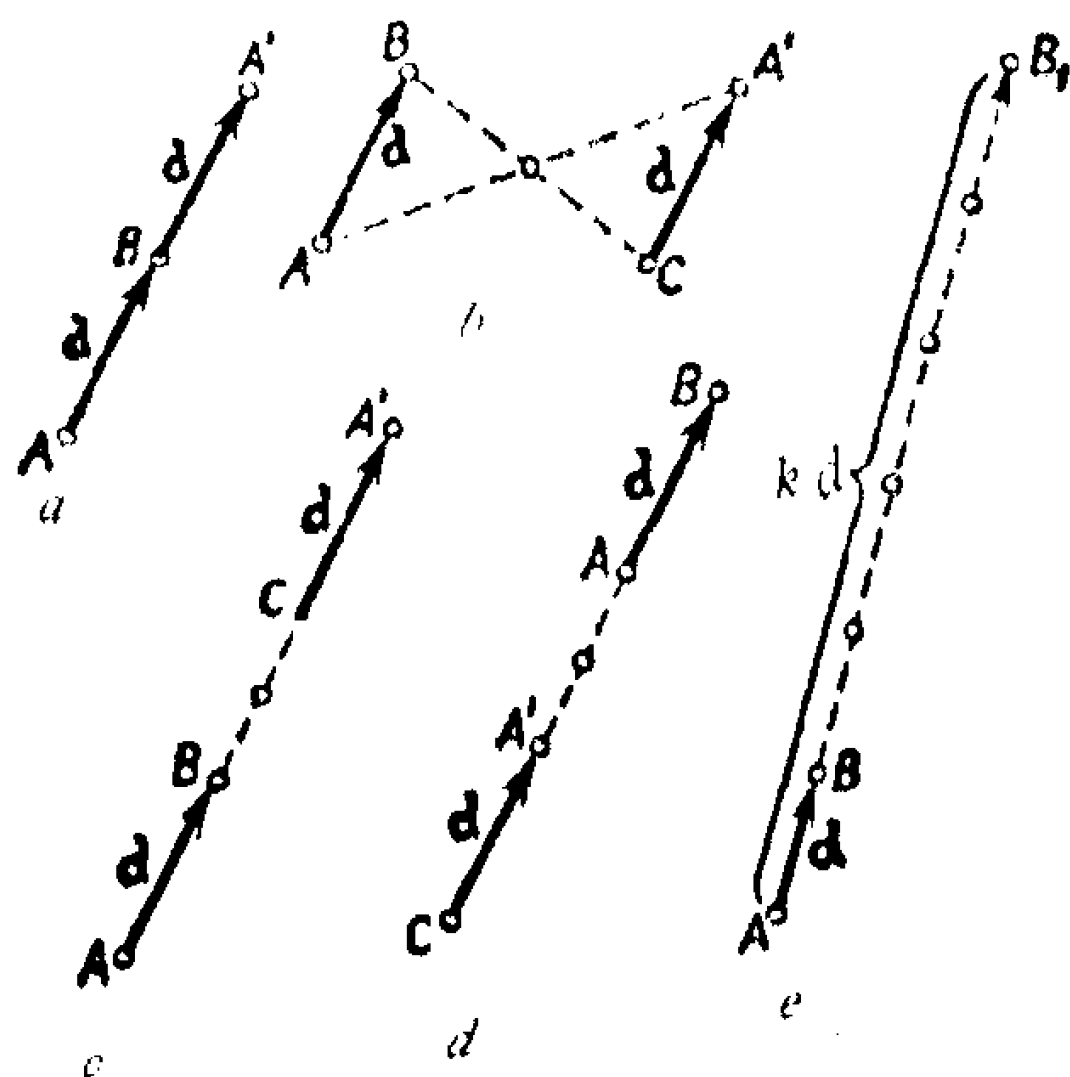


图 154

138. 在正三角形ABC的边BC，CA，AB上有三点A_1，B_1，C_1，使

$$AC_1=2C_1B,\quad BA_1=2A_1C,\quad CB_1=2B_1A.$$

证明：线段AA_1，BB_1，CC_1所交成的三角形的面积是三角形ABC的面积的$\frac{1}{7}$.

【**证法1**】设C_2，A_2和B_2是线段AA_1和BB_1、BB_1和CC_1，CC_1和AA_1的交点. 如果我们证明了$\triangle ABC_2$．$\triangle BCA_2$，$\triangle CAB_2$的面积都比$\triangle A_2B_2C_2$的面积大一倍，那么本题就解决了，因为这四个三角形一起组成$\triangle ABC$（图155）.

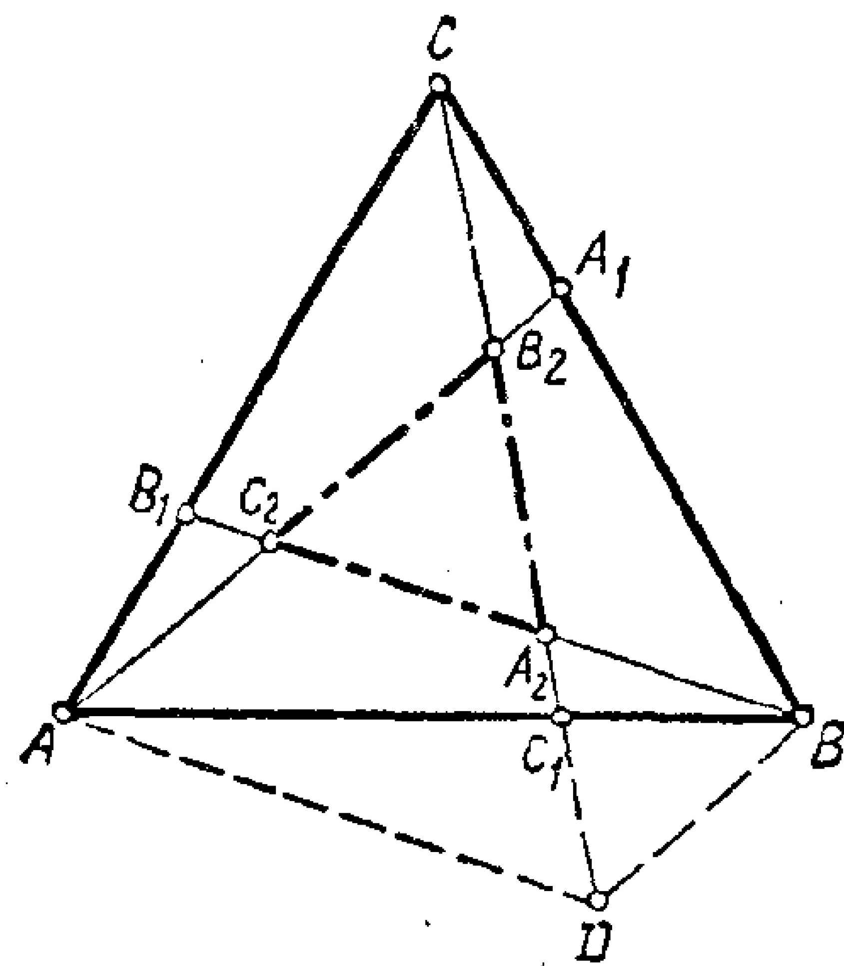


图 155

如果我们能证明点A_2，B_2，C_2将线段BC_2，CA_2，AB_2平分，那么可得到面积之间的比. 例如，对于$\triangle ABC_2$和$\triangle A_2B_2C_2$将可由此推出：$AC_2=C_2B_2$，且顶点B到AC_2的高二倍于顶点A_2到C_2B_2的高，因此，$\triangle ABC_2$的面积二倍于$\triangle A_2B_2C_2$的面积.

根据本题条件，$\triangle ABC$是等边的，因此$\triangle A_2B_2C_2$也是等边的且线段AC_2，BA_2，CB_2相等. 因为当将$\triangle ABC$绕着自己的中心旋转120°的时候，这个三角形将变到自身，而线段AC_2，BA_2，CB_2将从一个变到另一个. 因此，只要证明点A_2平分线段BC_2就够了.

设D是过顶点B的平行于线段AA_1的直线和线段CC_1的延长线的交点. $\triangle A_2BD$是等边的，因为它的边和正三角形$A_2B_2C_2$的边平行. 因此$BD=BA_2$，又因

为 $BA_2 = AC_2$，所以 $BD = AC_2$，从而 AC_2BD 是平行四边形.

线段 BC_2 和 DA 作为平行四边形的对边是相等的．因此，必须证明 $BA_2 = \frac{1}{2}DA$．我们研究 $\triangle A_2BC_1$ 和 $\triangle DAC_1$．因为它们的边平行，所以这两个三角形相似，它们的对应边成比例：$BA_2 : DA = BC_1 : AC_1 = 1/2$，这就是所要证明的.

【证法2】本题只须对某一个等边三角形来证明就行了，因为所有的等边三角形都是相似的，而扩大或缩小它的边并不影响 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 的面积比．为了证明本题断言，最简单的办法是取一个等边 $\triangle A_2B_2C_2$，在它的边 A_2B_2，B_2C_2，C_2A_2 的延长线上且在顶点 B_2，C_2，A_2 的外边取线段和它的任一边等长（图156）．这些线段的端点记作 A，B，C．如果原来的 $\triangle A_2B_2C_2$ 是等边的，那么以 A，B，C 为顶点的三角形也一定是等边的．从上一证法中前两段的论证可推出：$\triangle A_2B_2C_2$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的 $1/7$．现在来证明：小三角形 $A_2B_2C_2$ 的边的延长线在大三角形 ABC 的边上所截取的线段等于它的边长的 $1/3$．例如，设 C_1 是小三角形的边 A_2B_2 的延长线和大三角形的边 AB 的交点．过顶点 C_2 作平行于线段 A_2C_1 的直线．设这直线和边 AB 的交点为 C_1'．因为 $AC_2 = C_2B_2$，所以 $AC_1' = C_1'C_1$．此外，由 $C_2A_2 = A_2B$ 推出，$C_1'C_1 = C_1B$．于是

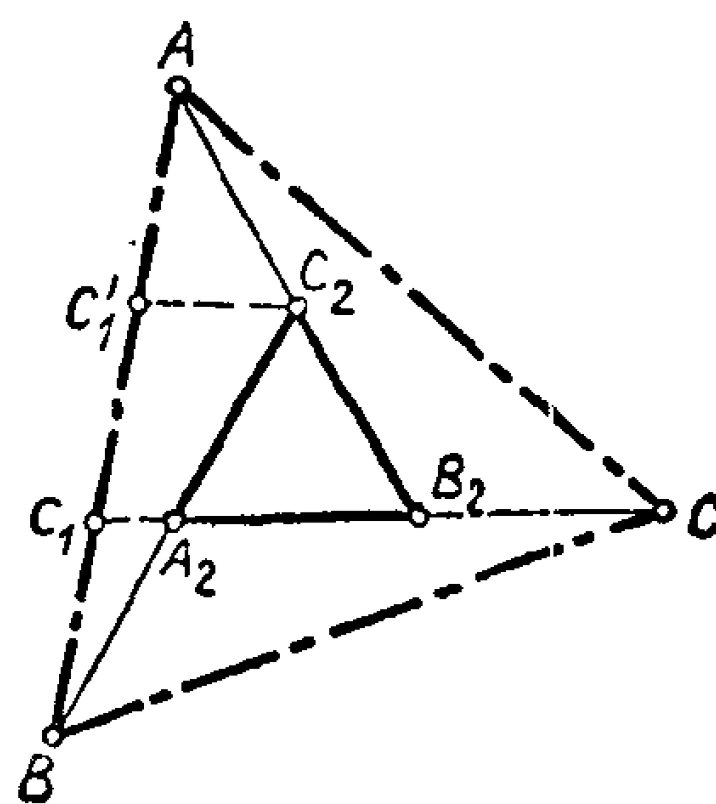


图 156

$$BC_1 = C_1C_1' = C_1'A = \frac{1}{3}AB.$$

对其它两个边也可类似证明．因此，本题断言对所作的 $\triangle ABC$，从而对每一个等边三角形，都成立.

【证法3】我们证明本题断言在 $\triangle ABC$ 不是等边三角形而是任意的三角形时也是正确的．将 $\triangle ABC$ 的边 AC 和 CB 分成三等分（图157）．将 AC 上靠近顶点 A 的分点和顶点 B 连成直线，过另一个分点、顶点 A 与 C 作和所得到的直线平行的直线．同样地，从边 BC 上靠近顶点 C 的分点入手，重复类似的作法．结果我们在 $\triangle ABC$ 的外边得到一个大的外接平行四边形，它由 3×3 个小的平行四边形构成.

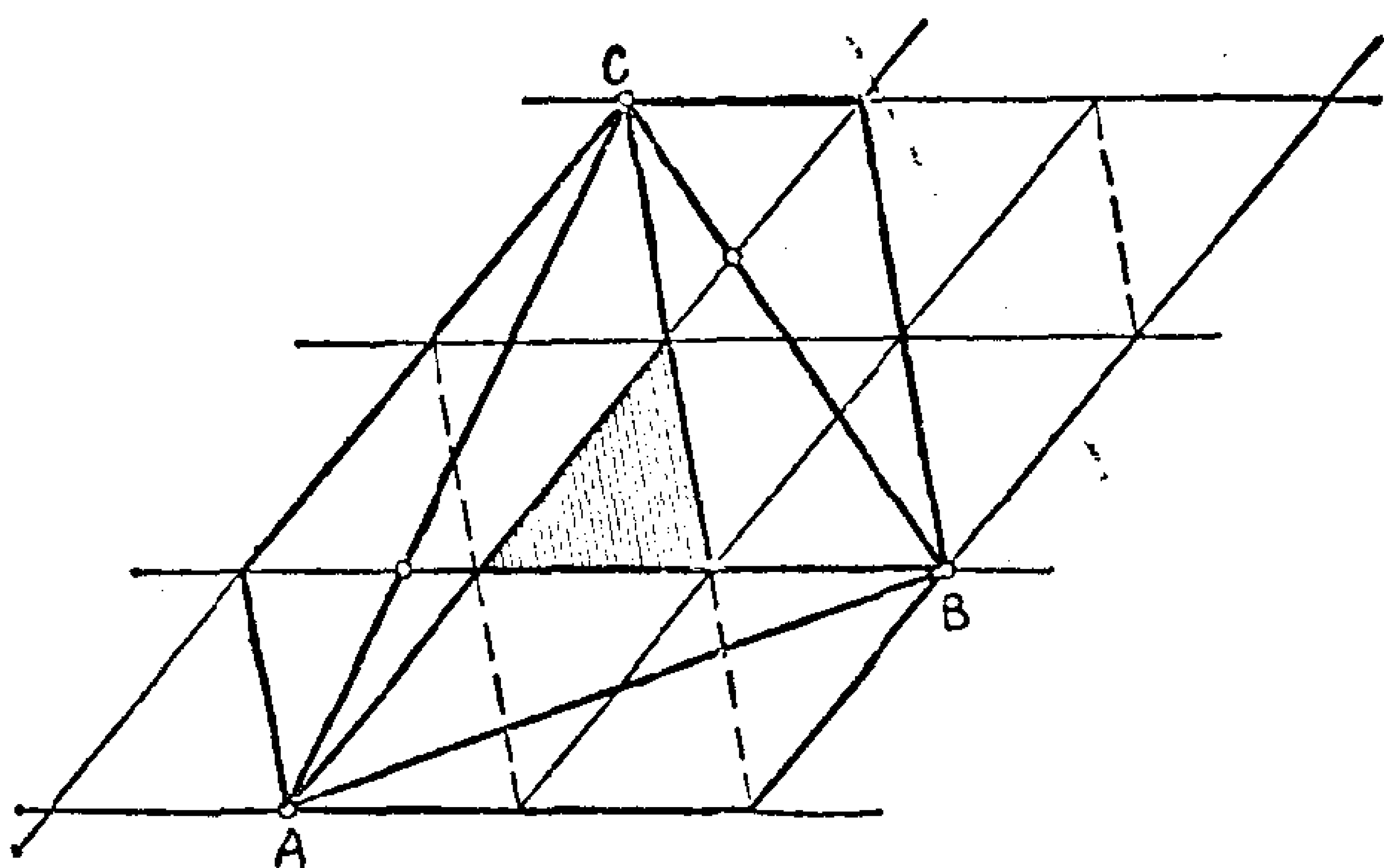


图 157

通过顶点 C 引大平行四边形的对角线以及与它平行的小平行四边形的对角线，我们得到5条平行且等距的直线．其中有两条通过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 和 B，而另外两条和边 AB 相交且把它分成三等分．后面这两条直线中靠近顶点 B 的直线通过顶点 C.

所引的直线把小平行四边形分成全等的三角形，它们构成三角形网格，且复盖了原来的 $\triangle ABC$．在这些三角形中，有一个完全分布在 $\triangle ABC$ 内．它的面积正好是 $\triangle ABC$ 的面积的

1/7. 我们来证明这一点. 除了完全分布在原三角形内的小三角形外, $\triangle ABC$被12个小三角形盖住了. 将这些小三角形每四个联起来可以组成3个平行四边形. 每一个平行四边形的一条对角线和$\triangle ABC$相应的一条边重合, 每一个平行四边形的面积等于小三角形面积的四倍.

这样一来, 原来的$\triangle ABC$是由一个小三角形和三个面积大一倍的三角形(每一个三角形是一个平行四边形的一半)组成的. 因此, 小三角形的面积是$\triangle ABC$的面积的1/7. 这就是所要证明的.

【证法4】 ❶我们来证明更一般的命题: 设$\triangle ABC$是任一三角形. 在边BC, CA, AB上有三点A_1, B_1, C_1, 使

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = \lambda.$$

设线段AA_1, BB_1, CC_1所交得的三角形是$\triangle A_2B_2C_2$, 则(图158)

$$\frac{\triangle A_2B_2C_2}{\triangle ABC} = \frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2+\lambda+1}.$$

这里我们不但用$\triangle ABC$来表示这个三角形, 而且还表示它的面积.

我们来证明这个命题.

在$\triangle C_1A_1B_2$和$\triangle BB_2A_1$中, 它们有共同的一条边A_1B_2, 所以它们的面积之比等于从顶点C_1和B到这个边A_1B_2的高之比, 由AC_1 : $C_1B = \lambda$可推出这两个高的比等于$\lambda/(\lambda+1)$, 于是

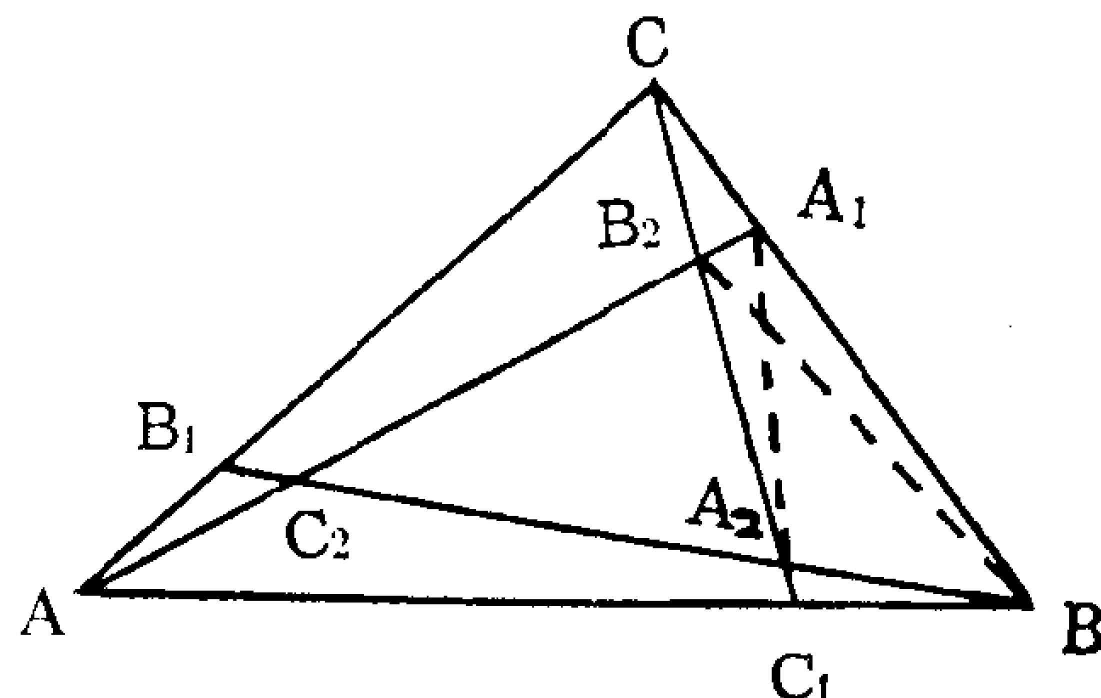


图 158

$$\triangle C_1A_1B_2 : \triangle BB_2A_1 = \frac{\lambda}{\lambda+1}. \qquad (1)$$

在$\triangle CB_2A_1$和$\triangle BB_2A_1$中. 由公共顶点B_2到对边的高相同. 所以

$$\triangle BB_2A_1 : \triangle CB_2A_1 = BA_1 : CA_1 = \lambda. \qquad (2)$$

由(1), (2)得

$$\triangle CB_2A_1 : \triangle C_1A_1B_2 = \frac{\lambda+1}{\lambda^2}.$$

因为在$\triangle CB_2A_1$和$\triangle C_1A_1B_2$中, 由公共的顶点A_1到对边的高相同, 所以上式表明

$$CB_2 : C_1B_2 = \frac{\lambda+1}{\lambda^2}.$$

由此可推出

$$CB_2 : CC_1 = \frac{\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1},$$

于是

$$\triangle ACB_2 : \triangle ACC_1 = CB_2 : CC_1 = \frac{\lambda+1}{\lambda^2+\lambda+1}.$$

再由

$$\triangle ACC_1 : \triangle ABC = AC_1 : AB = \frac{\lambda}{\lambda+1},$$

---

❶ 系中译者所加.

便可得到

$$\triangle ACB_2=\frac{\lambda}{\lambda^2+\lambda+1}\triangle ABC.$$

同理可得

$$\triangle BAC_2=\triangle CBA_2=\frac{\lambda}{\lambda^2+\lambda+1}\triangle ABC.$$

于是

$$\triangle A_2B_2C_2=\triangle ABC-\triangle ACB_2-\triangle BAC_2-\triangle CBA_2=$$
$$=\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda^2+\lambda+1}\triangle ABC,$$

这就是所要证明的.

注1. 在原题138中，$\lambda=2$, 于是$\triangle A_2B_2C_2$是$\triangle ABC$的1/7.

注2. 当$\lambda=1$时，$\triangle A_2B_2C_2$的面积等于0. 容易证明这时$\triangle A_2B_2C_2$缩成了一点. 这说明了三角形的三条中线相交于一点.

139. 证明：在任何一群人中，认识这一群人中奇数个人的人有偶数个. [1]

【证法1】 为了证明本题断言，我们对熟人对（即相互认识的一对人）的个数利用完全数学归纳法.

如果在这一群人中，只有两个人相互认识（即熟人对的个数等于1)，那么本题断言显然成立. 假设熟人对的个数等于k时，断言成立. 如果熟人对的个数增加1，即介绍两个原来不相识的人相认识,将会发生什么情况呢?如果在这两个人中，有一个人在介绍之前和奇数个人相认识，而另一个人和偶数个人相认识，那么介绍之后，在这一群人中，认识奇数个人的人的个数不变（只是具体的人变了). 如果在介绍之前，两个人或者都和偶数个人相认识，或者都和奇数个人相认识，那么在介绍之后，在这一群人中，认识奇数个人的人数或者增加2，或者减小2，因此仍然是偶数，这就是所要证明的.

【证法2】 我们对这一群人中的每一个人都问一下他认识多少人，然后把这些答数加起来. 由于每一对熟人意味着两个人彼此相识，于是所得到的答数的总和必定是偶数. 因此，在这些答数中，所有答数为奇数的数之和也为偶数，不然总和就不能为偶数. 由于奇数之和为偶数,所以,答数为奇数的个数是偶数. 因此，在一群人中，认识奇数个人的人有偶数个，这就是所要证明的.

139题可以有很多其它的叙述形式. 我们引出其中的一些.

试证：在所有生活在地球上（不论什么时候）的人们中，和奇数个人握过手的人有偶数个.

试证：在任何一个多面体中，有奇数个棱的面有偶数个.

试证：在任何一个多面体中，有奇数条棱相汇的顶点有偶数个.

所有这些问题就实质上来说都可以归结为图论（见§52）中的同一个问题：

在任何一个有限图中，有奇数个边相汇的顶点有偶数个.

在最后一个问题中，多面体的顶点是图的顶点，多面体的棱是图的边.

[1] 若A认识B，则认为B也认识A. ——中译者注.

在原来的奥林匹克试题以及和奇数个人握过手的人数问题中，图的顶点表示所说的人，而互相认识或握过手的人所对应的顶点用边连接起来. 在关于任意一个多面体有奇数个棱的面的问题中，多面体的每一个面对应于图的一个顶点，对应的面有公共棱的顶点用边连接起来.

139题的证明就实质上来说包含了上面所指出的图论中的定理的证明.

140. 假设 P 是锐角 $\triangle ABC$ 内的任一点. 证明：点 P 到 $\triangle ABC$ 的边上的点的最大距离 D 比最小距离 d 至少大一倍. 在什么条件下，$D=2d$？

【证法1】 将 $\triangle ABC$ 内的点 P 和顶点 A，B，C 连起来，且由点 P 引边 BC，CA，AB 的垂线 PA_1，PB_1，PC_1（图159）. 如果三角形是锐角的，那么由它的任一内点到三边的垂线的垂足在这些边的本身上，而不在它们的延长线上. 因此，线段 PA，PB，PC 和垂线 PA_1，PB_1，PC_1 把原来的 $\triangle ABC$ 分成 6 个三角形. 这 6 个三角形在顶点 P 处的顶角之和等于 $360°$，因此其中至少有一个顶角不小于 $60°$. 例如，设 $\angle APC_1 \geqslant 60°$. 这时

$$d \leqslant PC_1 \leqslant \frac{1}{2}AP \leqslant \frac{1}{2}D.$$

等式

$$d=\frac{1}{2}D$$

仅当顶点 P 处的 6 个顶角都等于 $60°$ 时成立. 但这时边 PA，PB，PC 和三角形的边之间的夹角等于 $30°$. 因此，在这种情况下，$\triangle ABC$ 是等边的，而点 P 和它的内角平分线的交点重合，即和三角形的内心重合.

【证法2】 设 r 是内切圆半径，R 是外接圆半径. 本题断言可由不等式

$$d \leqslant r,\quad D \geqslant R,\quad r \leqslant \frac{R}{2}$$

推出. 我们来证明这些不等式. 其中第二个不等式和102题的前半部分相同，因此我们认为

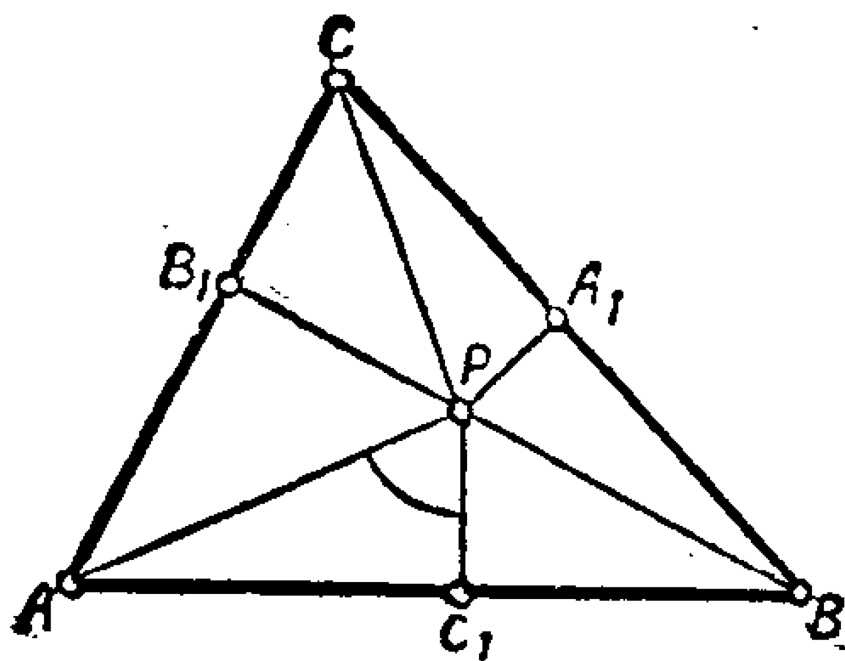


图 159

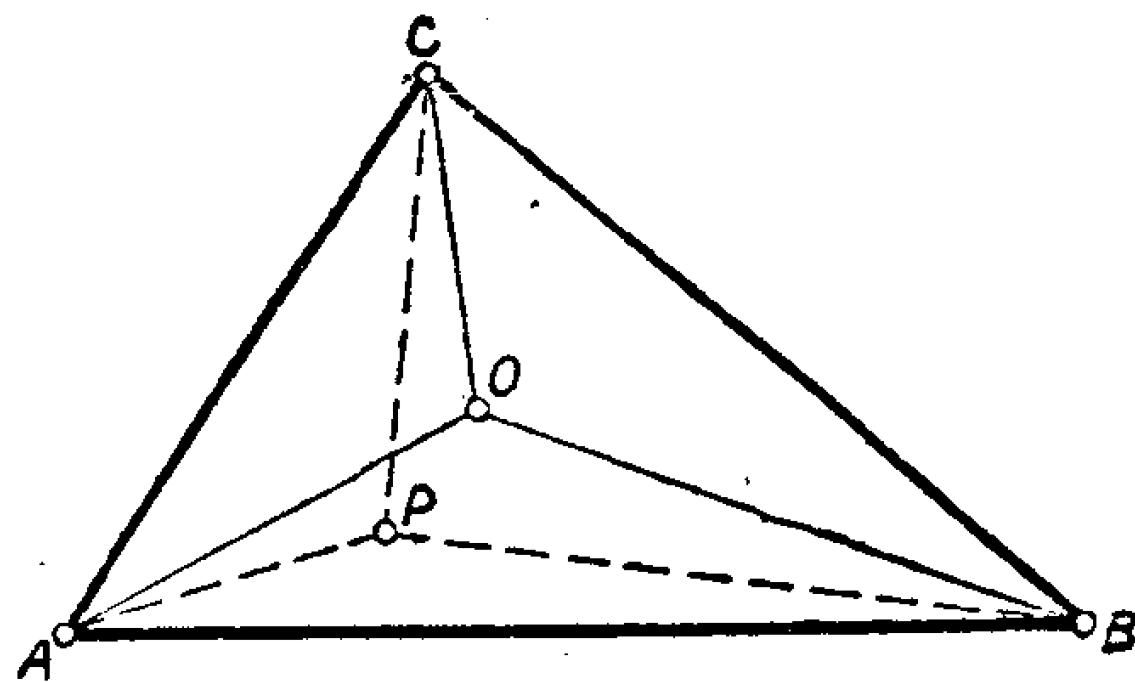


图 160

不等式 $D \geqslant R$ 已经被证明了. 剩下的两个不等式可由下面的引理导出.

设点 P 在三角形内，但不和内切圆心重合. 这时，在这点到三角形三边的距离中，其中有一个小于内切圆半径 r，还有一个大于内切圆半径 r.

设 P 是 $\triangle ABC$ 内的点且不和内切圆心 O 重合. 点 P 属于 $\triangle AOB$，$\triangle BOC$，$\triangle COA$ 中的一个（点 P 属于这些三角形中的两个仅当它在它们公共边上，即属于线段 OA，OB，OC 中的一个时）. 例如，假设点 P 属于 $\triangle AOB$（图160）. 这时，点 P 到边 AB 的距离小于点 O 到这一边的距离，即小于 r. 另一方面，内切圆心 O 属于 $\triangle ABP$，$\triangle BCP$，$\triangle CAP$ 中的一个，

例如属于$\triangle BCP$，因此，点P到边BC的距离大于内切圆半径r.

不等式$d\leqslant r$可由所证明的引理的前一半推出．第三个不等式可证明如下．假设A_1，B_1，C_1是边BC，CA，AB的中点，F是$\triangle A_1B_1C_1$的外接圆心（图161）．$\triangle A_1B_1C_1$的外接圆半径等于$R/2$．根据所证明的引理，点F到$\triangle ABC$的一个边（假设这个边是AB）的距离不小于r．假设FQ是由点F到AB的垂线．这时

$$r\leqslant FQ\leqslant FC_1=\frac{R}{2},$$

由此推出第三个不等式.

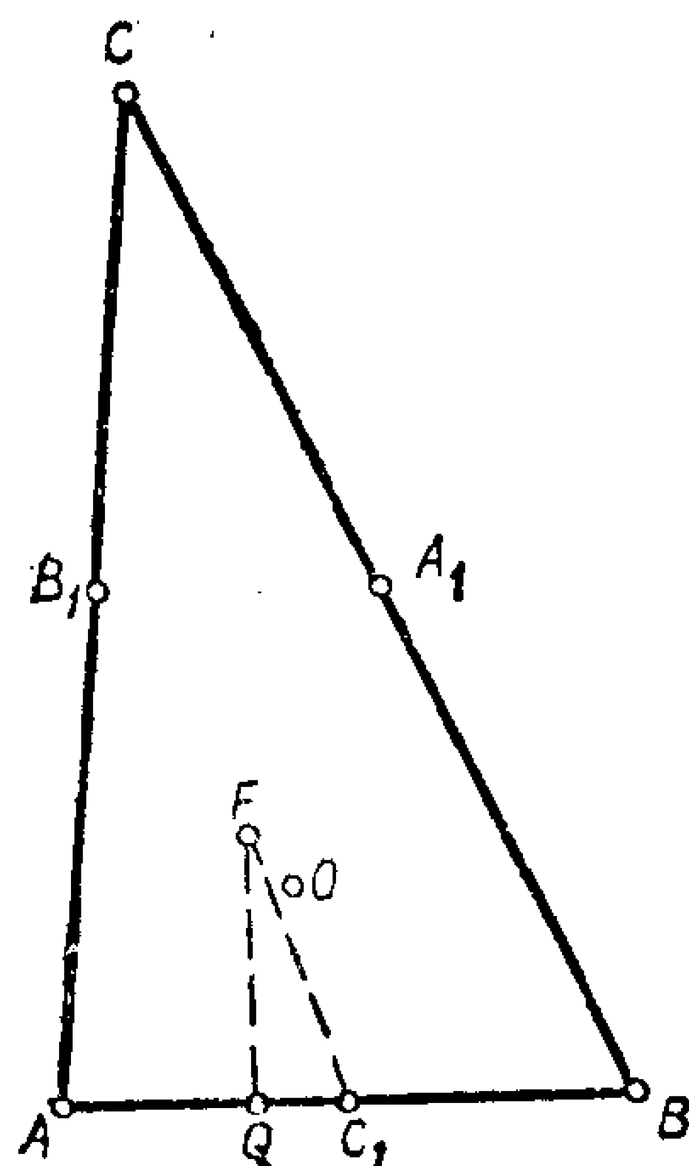


图 161

等式$d=\frac{1}{2}D$仅当所有三个我们证明过的不等式都蜕化成为等式时才成立．前两个不等式仅当点P到$\triangle ABC$的三边等距以及到三顶点等距时成立．假设这个条件满足．将点P和$\triangle ABC$的顶点连成线段并由点P向三边作垂线，于是$\triangle ABC$被分成6个全等的直角三角形，因为所有的直角三角形有相等的斜边和相等的一条直角边．这时每一个直角三角形在顶点P处的顶角都等于60°，而和原来三角形的一个顶点重合的顶点处的顶角等于30°．因此，$\triangle ABC$是等边的且点P和内切圆以及外接圆的共同的中心相重合，于是$r=\frac{R}{2}$且关系式$d=\frac{1}{2}D$成立.

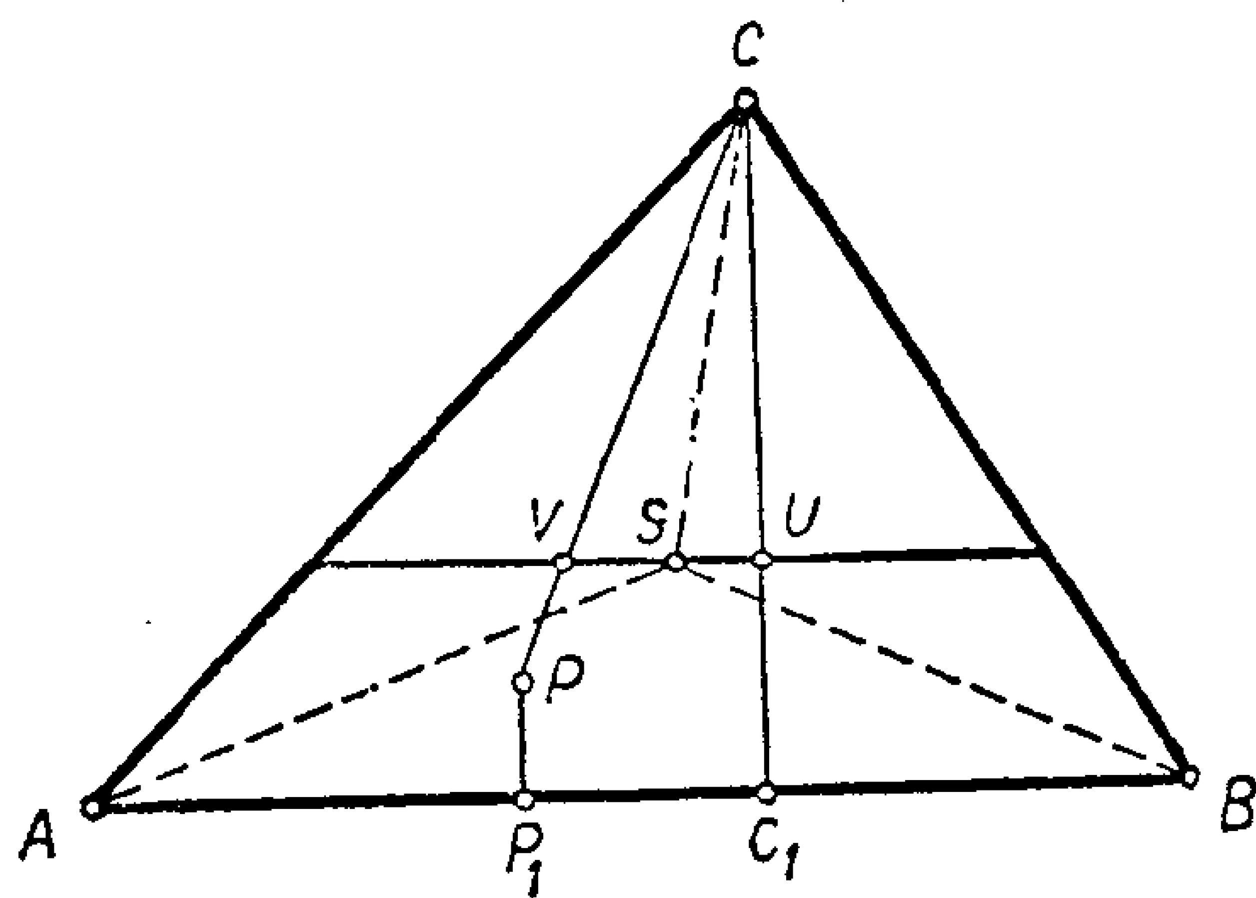


图 162

140题的证法2可以毫无困难地推广到三维空间的情形，这时代替三角形将取四面体．假设d和D是连接点P和四面体界面上的点所得到的线段中最短的和最长的线段的长度．R是外接球面的半径，r是内切球面的半径．与我们证明过的相类似的引理和不等式$d\leqslant r$对四面体仍然成立．如果外接球面的中心属于四面体，那么，对于通过四面体的4个界面重心的球面❶的中心，进行和平面情形对点F一样的论证，我们将得到不等式$r\leqslant\frac{R}{3}$．最后，利用186题的断言可以证明不等式$D\geqslant R$．这样一来，如果四面体包含外接球心，那么$d\leqslant\frac{1}{3}D$，而且等式当且仅当四面体为正四面体，点P和外接球面以及内切球面共同的中心重合时才成立.

由下面的证法看出，本题结论对任意的三角形（和任意的四面体）仍然成立.

【证法3】通过$\triangle ABC$的重心S作平行于边AB的直线（图162）．所作的直线从$\triangle ABC$

❶ 这个球面的半径等于$R/3$．——中译者注.

中截出一梯形，从高CC_1中截出一线段UC_1，UC_1的长度等于高CC_1的1/3. 如果V是线段PC和所作直线的交点，那么从梯形的任意一点P到它的底AB的距离，即线段PP_1的长，满足不等式

$$PP_1 \leqslant UC_1 = \frac{1}{2}UC \leqslant \frac{1}{2}VC \leqslant \frac{1}{2}PC.$$

因此，从点P到三角形的顶点C的距离至少比点P到边AB的距离大一倍，即对于梯形的任一点本题断言成立.

因此，本题断言对包含在梯形中的$\triangle SAB$的任意一点都成立. 通过$\triangle ABC$的重心S作直线和它的边AC和BC平行，进行同样的论证，我们可以得到本题断言对于$\triangle SBC$和$\triangle SCA$的任意一点都成立.因为$\triangle SAB$，$\triangle SBC$，$\triangle SCA$构成了$\triangle ABC$，所以这就证明了本题断言对$\triangle ABC$的任一点都成立.

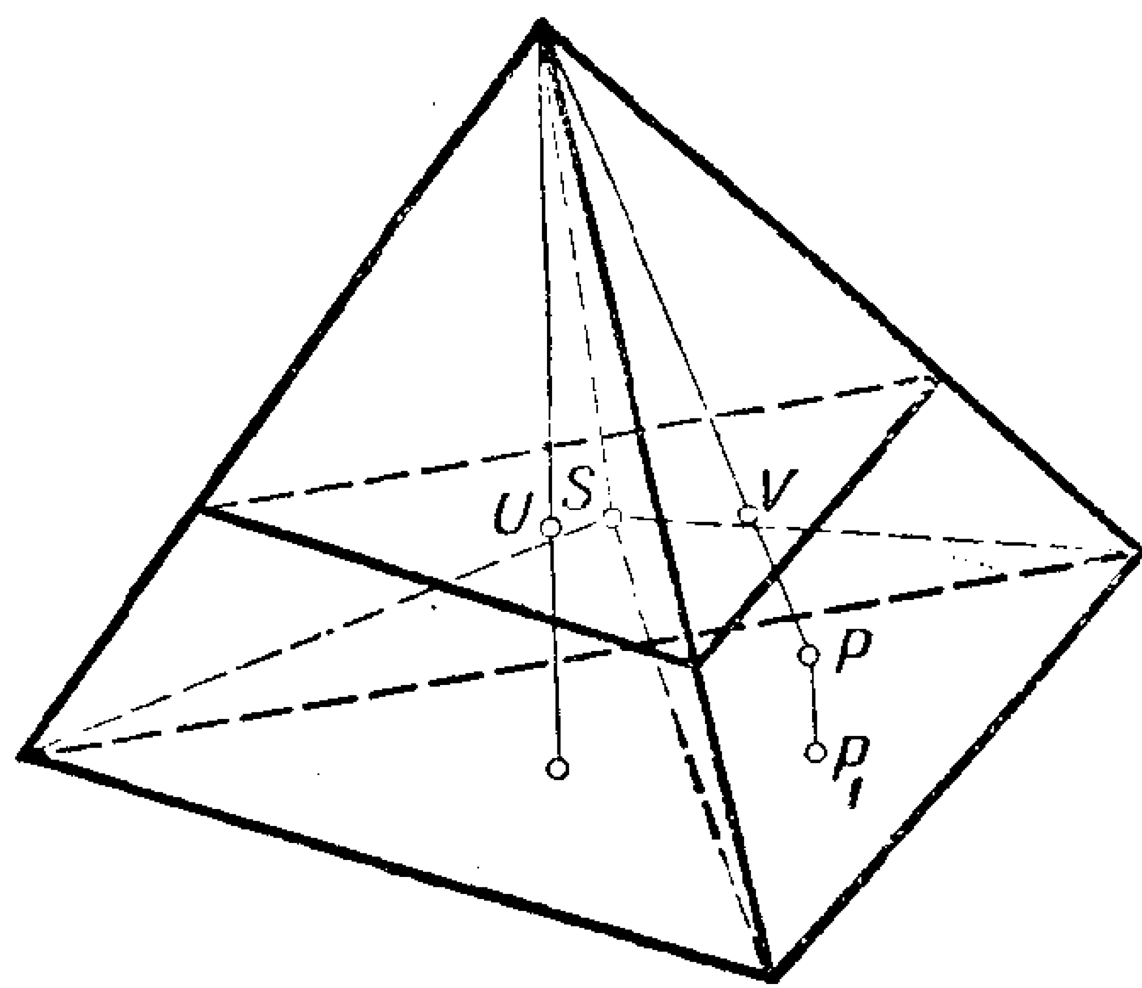


图 163

如果从平面情形转到空间情形，代替三角形，我们研究四面体（图163），其证明就其实质来说没有什么改变.

141. 假设$a<b<c<d$. 如果变量x，y，z，t是数a，b，c，d的某一排列，那么表达式

$$n=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-t)^2+(t-x)^2$$

可以取多少种不同的值?

【解法1】由函数n的形状推出，当变量作循环排列时，函数值不变. 因此，不失一般性，可以认为$x=a$. 若变量的值a，i_1，i_2，i_3用a，i_3，i_2，i_1这一组值来代替，我们仅仅改变了所有的差的符号，但因为在n中包含的项是差的平方，所以n的值在这种替换下仍然不变. 这样一来，数b，c，d的六种排列中只有三种可能使n取不同的值. 数b，c，d的这三种排列确实使n取不同的值，事实上，一方面

$$\begin{aligned}&n(a, b, c, d)-n(a, b, d, c)=\\&=(b-c)^2+(d-a)^2-(b-d)^2-(c-a)^2=\\&=2(bd+ac-bc-ad)=2(b-a)(d-c)>0,\end{aligned}$$

因为根据本题条件，因子$b-a$和$d-c$是正的. 而另一方面，同样可得

$$\begin{aligned}&n(a, c, b, d)-n(a, b, c, d)=\\&=(a-c)^2+(b-d)^2-(a-b)^2-(c-d)^2=\\&=2(ab+cd-ac-bd)=2(c-b)(d-a)>0.\end{aligned}$$

这样一来，表达式n所取的值可以按大小排列如下:

$$n(a, c, b, d)>n(a, b, c, d)>n(a, b, d, c).$$

【解法2】显然，表达式

$$\begin{aligned}&n(x, y, z, t)+(x-z)^2+(y-t)^2=\\&=n(x, y, z, t)+(x^2+y^2+z^2+t^2)-2(xz+yt)\end{aligned}$$

与我们选取数a，b，c，d的哪一种排列作为自变量的值是无关的，因为它是自变量的两两

之间的 6 个差的平方和. 表达式 $x^2+y^2+z^2+t^2$ 对自变量的值 a, b, c, d 的任一排列也取同一个值. 因此, n 的值仅与表达式 $xz+yt$ 取怎样的值有关, 且和它一起达到最大值和最小值.

表达式 $v=xz+yt$ 的值与以怎样的方式将数 a, b, c, d 分成对有关, 因为 v 不是别的, 而是每一对数的乘积之和. 数 a, b, c, d 可以用三种不同的方法分成对(例如, 数 a 和 b 算作一对, c 和 d 算作另一对), 因此 v 有三个值

$$v_1=ab+cd,\quad v_2=ac+bd,\quad v_3=ad+bc.$$

这些值是不同的, 且满足不等式

$$v_1>v_2>v_3,$$

因为

$$v_1-v_2=(d-a)(c-b)>0,$$
$$v_2-v_3=(b-a)(d-c)>0.$$

因此, 例如: 当 $x=a$, $y=c$, $z=b$, $t=d$ 时, 表达式 n 取最大值, 当 $x=a$, $y=b$, $z=d$, $t=c$ 时, n 取最小值.

二十、1947年—1951年试题及解答

142．证明：如果n是奇数，那么

$$46^n+296\times13^n$$

能被1947整除．

【证法1】因为1947＝33×59，而33和59互素，所以只要证明（见§23）：$46^n+296\times13^n$分别能被数33和59整除就行了．我们知道，a^n-b^n能被$a-b$整除，而且如果n是奇数，那么a^n+b^n能被$a+b$整除．因此，$46^n+296\times13^n=(46^n-13^n)+9\times33\times13^n$能被$46-13=33$整除，而当$n$是奇数时，$46^n+296\times13^n=(46^n+13^n)+5\times59\times13^n$能被$46+13=59$整除．从而本题断言获证．

【证法2】不把数1947分解成互素的因子也可解答142题，如果将本题条件中所说的表达式变换一下，例如变成下面的形式

$$46^n+296\times13^n=46(46^{n-1}-13^{n-1})+(46+296\times13)\times13^{n-1}.$$

因为数n是奇数，所以数$n-1$是偶数，因此右边第一个被加项含有的因子$46^{n-1}-13^{n-1}$能被$46^2-13^2=(46-13)(46+13)=1947$整除．右边第二个被加项含有因子$46+296\times13=$ $=2\times1947$．因此，整个表达式$46^n+296\times13^n$能被1947整除．

143．证明：在任何六个人中，总可以找到三个相互认识的人或三个相互不认识的人（如果A认识B，B也认识A，就认为A和B是相互认识的）．

【证明】假设A是6个人中的一个人．我们先假设A和这些人中的3个人相互认识．如果这3个人中有两个人相互认识，那么，他们和A这三个人便满足本题条件，因为他们之中的任何两个人都相互认识．如果和A相识的3个人之间彼此都不相识，那么他们这3个人也满足本题条件．

现在我们假设在6个人中有3个人不认识A．如果他们之中有两个人彼此不相识，那么A和这两个人满足本题条件，因为他们三人彼此不相识．如果和A不相识的三个人中，任意两个人都彼此相识，那么他们三人也满足本题条件．

在6个人中没有任何三个人和A相识，也没有任何三个人和A不相识的情况是不可能的，因为这时和A相识的人数不大于2且和A不相识的人数也不大于2，于是总人数（包括A在内）不得大于5．这样一来，本题断言对所有的情况都成立．★

§68．与完全图有关的某些问题

1）用图论（见§52）的语言来“翻译”本题的条件．为了便于翻译，我们利用某些新的概念．关于什么是完全图和子图，已经在§54中说过了．

如果图G包含和图$\overline{G}$相同的顶点，但是在G中任何两个顶点之间当且仅当它们在$\overline{G}$中设有用边连接时才用边连接，而且在G中任何两个顶点不能用多于一条的边相连接，则图G叫

做图$\overline{C}$的补图.

当回到143题的条件中所说的一群人时,我们使它的每一个成员对应于图的一个顶点，而且两个顶点所对应的成员相互认识的话，就把这两个顶点用边连接起来．本题的断言可叙述如下．

设G是任何一个有6个顶点的图．这时或者是图G，或者是它的补图包含有3个顶点的完全子图．

这个断言可以叙述成下面不太对称的形式：

如果在有6个顶点的图中，任何3个顶点之间有2个顶点有边相连接，那么这样的图包含具有3个顶点的完全子图．

2） 由最后一个问题产生了下面比较一般的问题：是否对每一个自然数k都可以找到这样的数$n(k)$，使得在至少有$n(k)$个顶点的图中，若任何三个顶点中有两个顶点彼此有边相连接，那么这样的图包含有k个顶点的完全子图？如果这样的数$n(k)$存在,那么其中最小的是多少？

我们用完全数学归纳法来证明具有上面所说的性质的数$n(k)$对于任何一个自然数k都是存在的．由134题断言推出，$k=3$对应于$n(3)=6$（显然$k=2$对应于$n(2)=3$）．

我们假设，对某一个k存在对应于它的值$n(k)$．设G是具有那种性质的图:它的任何三个顶点中的两个顶点有边相连，而且不含有具有$k+1$个顶点的完全子图．我们来计算一下图G可能有多少个顶点．从它的顶点中任取一个顶点P．在图G中，和P没有用边连接的顶点应该是图G的完全子图的顶点，因为如果Q和R是这样两个顶点，那么在三个顶点P、Q、R中，仅仅是它们可以用边连接．因此，图G中和我们所选取的顶点P没有边连接的所有顶点彼此有边相连，即属于图G的完全子图．因为图G不包含有$k+1$个顶点的完全子图，所以图G中和我们所取的顶点P没有边连接的顶点不得多于k个．

现在我们研究图G的一个子图，它的每一个顶点和我们所取的顶点P有边相连．包含在这个子图中的任何一个完全子图的顶点的个数小于k，因为不然的话，若存在有k个顶点的完全子图，再加上顶点P，我们就得到有$k+1$个顶点的完全子图，它是不可能的．因为加到图G上的条件对图G的任何一个子图也都成立，所以根据归纳假设，在那些和所取的顶点P有边连接的图G的顶点上张成的子图包含不多于$n(k)-1$个顶点．因此图G包含有不多于

$$1+k+n(k)-1=n(k)+k$$

个顶点．这样一来，如果在具有

$$n(k)+k+1=n(k+1)$$

个顶点的图中、任意三个顶点中有两个顶点彼此之间有边相连，那么这样的图包含有具有$k+1$个顶点的完全子图．这就证明了所说的断言对$k+1$也正确．因此，它对所有的k值是正确的．

从上面所进行的证明看出，$n(k)$的一个可能的值由公式

$$n(k)=1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

得到．

当$k=2$和$k=3$时，由这个公式计算出来的$n(k)$的值和最小的值一致：$n(2)=3$，$n(3)=6$．在一般的情况下，还不知道$n(k)$的最小值．

利用158题的断言（见§71）可以证明：$n(k)$的最小值不能小于$3k-3$．已经知道了更强得多的结果：巴尔·爱尔焦什证明了，对于任何常数c和$k>k(c)$，存在有

$\frac{ck^2}{\ln k}$个顶点的图，它具有那样的性质：在任何三个顶点中，至少有 2 个顶点彼此用边连接，而且不含有 k 个顶点的完全子图.

3） 由于上面所说的和原题143等价的图论中的问题而产生了一个问题：是否对于所有的自然数 k 都能找到这样一个数 $m(k)$，使得任何一个有 $m(k)$ 个顶点的图或它的补图包含有 k 个顶点的完全子图？如同类似于上面所进行的论证所表明的，这样的数 $m(k)$ 对所有的自然数 k 都是存在的，例如

$$m(k)=C_{2k-2}^{k-1}.$$

最小的 $m(k)$ 的值还不知道．巴尔・爱尔焦什证明了，

$$m(k)>2^{\frac{k}{2}}.$$

必须注意，由爱尔焦什所提出的证明，在两种情况下都只能推出具有所要求的性质的图的存在性，而不是作这种图的具体方法．学会作相应的图将是十分有趣的．

正像在§54中所证明的，如果图是无限的，那么无论是它本身，或是补图，都含有无限的完全子图.

144．设小圆的半径为 $r/2$，大圆的半径为 r．试问：最少要用多少个这样的小圆才能将大圆盖住？

【解】1） 半径为 r 的圆可用 7 个半径小一半的圆盖住．圆的分布如图164所示： 6 个小圆的圆心和大圆的内接正六边形的边的中点重合，第 7 个小圆的圆心和大圆的圆心重合．

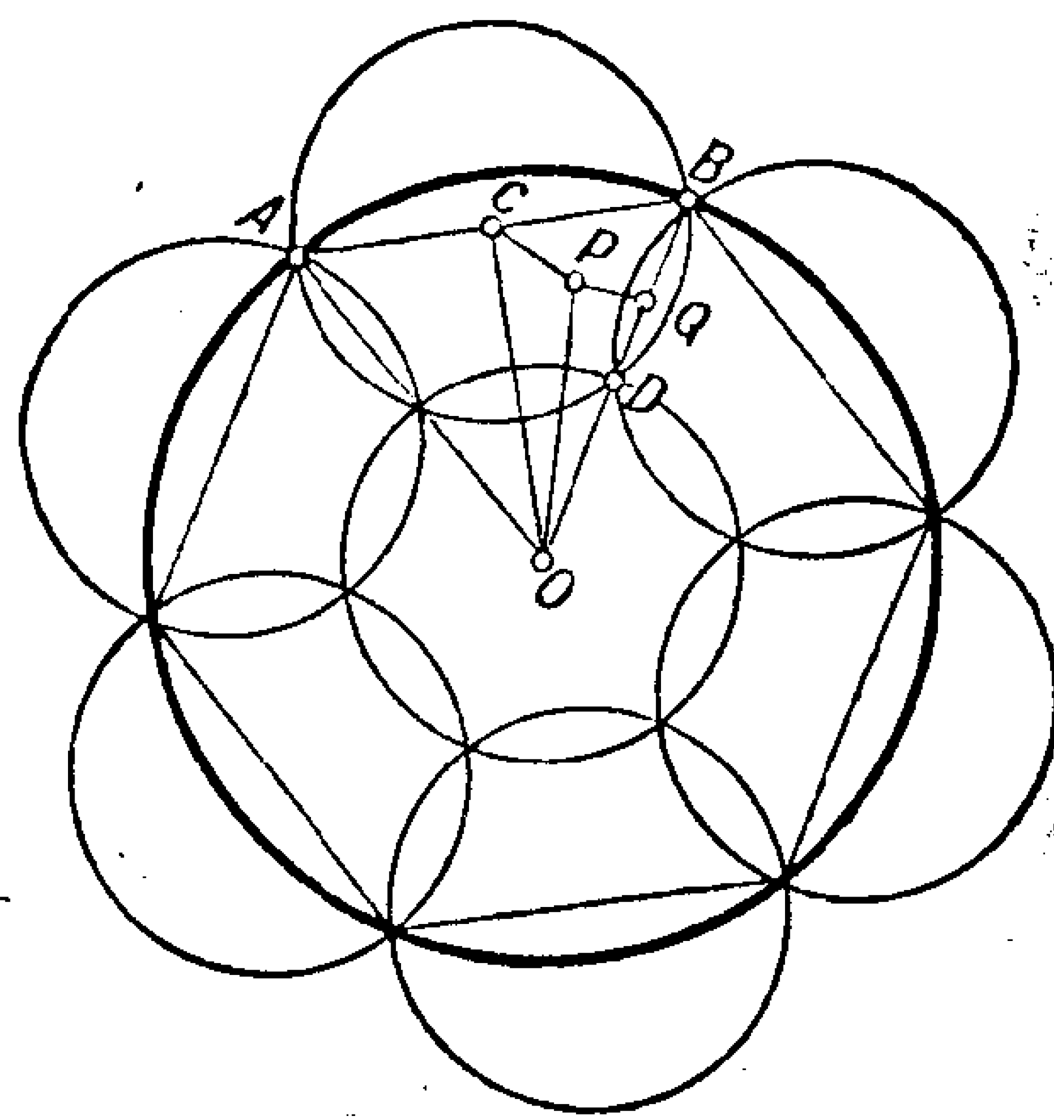


图 164

我们来证明，这样分布的 7 个小圆确实盖住了大圆．假设 AB 是大圆的内接正六边形的一个边，C 是它的中点．显然，只需研究大圆的一部份，即在$\angle BOC$内且在以点 O 为圆心，$r/2$ 为半径的圆外的那一部分．

于是，需要证明：如果点 P 在$\angle BOC$内或边界上，且 $r/2<OP\leqslant r$，那么$CP\leqslant r/2$．在半径 OB 上取线段 OQ 和线段 OP 相等．这时点 Q 在线段 BD 上，这里 D 是半径 OB 的中点．因为在$\triangle COP$和$\triangle COQ$中，有两组边对应相等，且它们的夹角有下面的关系：$\angle COP\leqslant\angle COQ$，所以$CP\leqslant CQ$．因此，只要证明 $CQ\leqslant r/2$就行了．这一不等式是成立的，因为$\triangle BCD$是等边三角形，边长等于 $r/2$，连接它的顶点和对边上的任意一点的线段不可能大于 $r/2$．

2） 用少于 7 个半径为 $r/2$的圆，不能盖住半径为 r 的圆．我们用下面的办法来证明这一点．因为在半径为 $r/2$的圆中，两点之间最大的距离等于 r；而在半径为 r 的圆周上，弧长为圆周长的 1/6 的两点之间的直线距离正好等于 r，所以小圆只能盖住大圆圆周的一部分，而且这一部分不超过整个圆周长的 1/6．因此，为了盖住大圆的圆周，至少必须用 6 个小圆．但这 6 个小圆不能盖住大圆的圆心，因为假若某个小圆盖住了大圆的圆心，那么这个小圆最多

和大圆的圆周有一个公共点．所以用 6 个小圆是不能盖住大圆的．

145．1948年10月23日是星期六．可以断言元旦是星期日的天数比是星期一的天数多吗？

【解】1） 按照历法规定，如果某年的年号能被 4 整除，那么这一年算作闰年．但是对于那些年号最后是两个零的，只有当它的年号能被400整除时，才算作闰年．所以，每世纪开头的那一年为闰年是很少的，每400年才有一个闰年．每一个常年有365天，而闰年比常年多一天．不难算出，每400年有97个闰年．因此，400年所包含的总天数等于$400\times365+97$．由于365被 7 除时余 1，所以400年所包含的总天数被 7 除时，其余数等于497被 7 除时的余数．由于497能被 7 整除，所以我们可以断定：每过400年，日历又重复了．某年的一月一日的星期数❶和400年前的一月一日的星期数是相同的．因为400不能被 7 整除，所以一星期的 7 个星期数不可能以同样的次数在一月一日出现．

于是，原题可化成下面的问题：能否断言在400年内，一月一日是星期日的天数比是星期一的天数多？

2） 因为365被 7 除余 1，所以，每经过一个常年，一月一日的星期数往后推 1 天．例如某一年的一月一日是星期日，那么，它后一年的一月一日是星期一．经过一个闰年，一月一日的星期数往后推两天（由星期日变到星期二）．我们来作一个统计表，选取连续的400年，逐一写出所有400年的一月一日的星期数，我们还在统计表每一个闰年（400年间共有 97 个闰年）的一月一日后面，记上这一年的12月31日的星期数．于是在我们的统计表中，得到星期数的一个紧接着一个的正常序列，这就是说，星期一后面紧跟着的是星期二，星期二后面紧跟着的是星期三，星期三后面紧跟着的是星期四，……，星期日后面紧跟着的是星期一，而且在这个序列中，每一个星期数所出现的次数是相等的（恰好71次）．

这样一来，如果我们能证明97个闰年的最后一天是星期日的天数比是星期一的天数少，那么就证明了一月一日是星期日的天数比是星期一的天数多．

3） 我们再来作一个表（这个表比上面的表要简单一些），逐一写出从1600年到1996年的每一个闰年的12月31日的星期数，然后从所得到的表中划去1704，1708，1804，1808，1904，1908年的12月31日的星期数（下面将可以看出我们为什么要这样做）．于是在我们的统计表中剩下91个星期数，而且这些星期数一个比一个往前推两天（例如在星期日后面写的是星期五，星期四后面写的是星期二）．我们来证明这个断言．在我们的统计表中，从一个12月31日到下一个12月31日，其间经过了 4 年或16年．如果从一个12月31日到下一个12月31日经过了 4 年，在这 4 年中有一个闰年和三个常年，所以总天数被 7 除时，余数是 5，即第二个12月31日的星期数比第一个12月31日的星期数“落后”了五天，这也就是说，往前推了两天．如果从一个12月31日到下一个12月31日，其间经过了16年（例如，从1896年12月31日到1912年12月31日便是这样的），其中有 3 个闰年（1904，1908，1912）．因此，从一个12月31日到下一个12月31日的总天数被 7 除时，其余数与$16+3=19$被 7 除的余数相同，即余 5．所以无论在哪一种情况下，上面所说的断言都是对的．

由上面的证明可以推出，在由91个12月31日所构成的统计表中，一星期的每一天所出现的次数是一样多的（恰好13次），这是因为在统计表的每 7 个连续的12月31日中，星期一到星期日正好都出现一次，而91又能被 7 整除．这样一来，原来的问题又可以化成下面的问题：

❶ 星期数是指这一天是星期几的数字，如对于星期一，就说它的星期数等于 1．——中译者注．

能否断言1704，1708，1804，1808，1904，1908年的12月31日是星期日比是星期一少?

4） 下面我们来具体地算出1704，1708，1804，1808，1904，1908年的12月31日是星期几.

因为10月23日到这一年的12月31日共有8 +30+31=69天，69被7除时余6，所以1948年12月31日是星期五. 1908年12月31日到1948年12月31日的总天数被7除时，其余数和40+10=50被7除的余数相同，即余1. 因此1908年12月31日是星期四.

1808年12月31日到1908年12月31日和1708年12月31日到1808年12月31日的总天数被7除时，其余数和数100+24=124被7除的余数相同，即余5. 所以，1808年12月31日是星期六，1708年12月31日是星期一.

由此我们可以推出，1904，1804，1704年的12月31日分别是星期六，星期一，星期三，因为就象我们在3)中所证明的那样，如果两个"相邻"的闰年之间相隔4年，那么某一个闰年的12月31日的星期数比上一个闰年的12月31日的星期数往前推两天.

于是，对问题"1704，1708，1804，1808，1904和1908年的最后一天是星期日比是星期一是否要少"的回答是肯定的. 这样一来，对原题的回答也是肯定的：一月一日是星期日比是星期一要多.

不难算出，在400年间，一月一日有56次是星期一和星期六，57次是星期三和星期四，58次是星期日、星期二和星期五.

146. 证明：除四面体外，不存在任何一个凸多面体❶，它的每一个顶点和所有其余的顶点之间都有棱相连接.

【证法1】我们假设某个凸多面体P有多于四个的顶点，而且每一个顶点和其它所有的顶点都有棱连接起来，我们来证明这样的假设会导致矛盾.

多面体P的每一个面都具有三角形的形状，因为在每一个边数更多的多边形中，总可以找到两个顶点，它们之间没有边相连接. 多面体P的棱AB是两个三角形——相交于棱AB的两个面——的公共边. 因为多面体P的顶点数大于4，那么这个多面体还有那样的顶点C，即和相交于棱AB的三角形的面的顶点不相重合的顶点，因此，$\triangle ABC$不是多面体的面.

$\triangle ABC$的边是多面体P的棱. 沿着这些棱剪开，这时多面体的表面分离成两片，因为P是凸多面体（仅仅在这个地方利用了多面体表面的凸性. 非凸多面体的表面在沿棱AB，BC和CA剪开后，也许不能分离成单个的片）. 在每一片内至少包含有多面体P的一个顶点，因为任何一片都不和$\triangle ABC$重合. 设D是在某一片内的多面体的顶点，而E是在另一片内的顶点. 根据本题条件，连接顶点D和E的线段应该是多面体P的棱，并因此，DE和两片的边界（$\triangle ABC$的周界）在某处相交. 但这是不可能的，因为棱DE和棱AB，BC，CA中的任何一个既没有公共点也不相交.

【证法2】如果多面体的n个顶点两两彼此用棱相连，那么多面体总共有C_n^2个棱. 因为每一条棱属于两个面的边界，而每一个面至少有三条棱，所以多面体的面数不大于$\frac{2}{3}C_n^2$. 利用对凸多面体成立的欧拉定理，我们得到不等式

$$n+\frac{2}{3}C_n^2 \geqslant C_n^2+2.$$

将其两边乘以6并化简，我们得到

❶ 蜕化在一个平面上的立体不能算作多面体. 因此特别是，多面体的顶点不得少于4个.
——俄译者注.

$$6n + 2n(n-1) \geqslant 3n(n-1) + 12,$$
$$n^2 - 7n + 12 \leqslant 0,$$
或
$$(n-3)(n-4) \leqslant 0.$$
由此推出，在所有的整数值中，n 只能取这样的值：$n=3$ 和 $n=4$. 因为多面体至少有 4 个顶点，所以 $n=3$ 不可能成立. 剩下唯一可能的值 $n=4$. 因此，其每一个顶点和所有其余的顶点都有棱连接的只能是四面体.

我们指出，虽然我们没有充分利用多面体凸性这个条件，但是它却不能去掉. 正如阿柯希·恰沙尔所证明的那样，本题断言对任意的多面体是不成立的. 他作出了有 7 个顶点的非凸多面体，它的顶点彼此之间都有棱相连.

147. 证明：从 n 个给定的自然数中，总可以挑选出若干个数（至少一个，也可能是全体），它们的和能被 n 整除.

【证明】 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是给定的 n 个数. 我们来研究和

$$a_1,$$
$$a_1 + a_2,$$
$$a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

将这些和分成 n 类，所有被 n 除时余数相同的算作同一类.

如果所有的和数被 n 除时余数都不相同，那么有一个和数被 n 除时余数为 0，这是因为总共只有 n 个不同的余数：$0, 1, \cdots, n-1$. 因此，在这种情况下，本题的断言成立.

如果在 n 个和中，有两个和属于同一类（被 n 除时，余数相同），那么在这两个和数中有一个和数的被加项的个数比另一个多. 在这种情况下，包含在一个和数中但不包含在另一个和数中的那些被加项的和能被 n 整除. 这样一来，本题断言在这种情况下也成立.

148. 证明：对每一个正角 $\alpha < 180°$，有不等式

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin2\alpha + \frac{1}{3}\sin3\alpha > 0.$$

【证法 1】 利用关系式

$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \sin3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha,$$

可将要证的不等式的左边变成

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin2\alpha + \frac{1}{3}\sin3\alpha = \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos^2\alpha - \frac{\sin^3\alpha}{3} =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{3}(3 + 3\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{3}(2 + 3\cos\alpha + 4\cos^2\alpha) =$$

$$= \frac{\sin\alpha}{3}\left[(1+\cos\alpha)^2 + (1+\cos\alpha) + 3\cos^2\alpha\right].$$

最后一个等式右边所有的项都是正的，因为$0<\alpha<180°$，函数$\sin\alpha$，$1+\cos\alpha$和$\cos^2\alpha$都为正值．因此原不等式获证．

【证法 2】首先我们证明，对于开区间$(0,\pi)$的任意一点x，有

$$\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x>0. \tag{1}$$

这个不等式可推导如下：它的左边可表示为$\sin x(1+\cos x)$，对于开区间$(0,\pi)$中的任一x，函数$\sin x$和$1+\cos x$都取正值．

如果不等式(1)的左边再加上一项$\frac{1}{3}\sin 3x$，那么对于新的不等式只要对开区间$\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$中的$x$来证明就行了，因为所加的项$\frac{1}{3}\sin 3x$只在这个区间中才取负值．但是对于这个区间的任一点$x$，$\sin x>\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，此外，对任何$u$有不等式$\sin u\geqslant -1$，因此

$$\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x>\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}>0. \tag{2}$$

最后一个不等式可以表示成$\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{5}{6}$，或者两边平方以后为$\frac{3}{4}>\frac{25}{36}$．

【证法 3】我们重复上一证法中的论证．利用这一点：在开区间$(0,\pi)$上，函数$\sin x$的弧是凹的，即它的任一弦在连接这个弦的端点的那一段弧之下（见§44）．

为了证明不等式(1)，只要研究使左边第二项为负的那些点，且证明在开区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$内，函数$\sin x$的弧在函数$-\frac{1}{2}\sin 2x$的弧的上面．将$x$轴往点$x=\pi$压缩一倍，将函数$\sin x$的弧往$x$轴压缩一倍，我们就得到在区间$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上的$-\frac{1}{2}\sin 2x$的弧．弧$-\frac{1}{2}\sin 2x$的每一个点和$\sin x$的弧的一条弦的中点相重合，又因为在区间$(0,\pi)$中，这个弧是凹的，所以任意一条弦都在它的下面（图165）．

当左边再添上一项$\frac{1}{3}\sin 3x$时，为了证明不等式，只要在开区间$\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$中来研究就行了，因为第三个被加项只在这个区间才为负的．对于这个区间中的任何一个x，$\sin x>\sin\frac{\pi}{3}$，$\frac{1}{2}\sin 2x>-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}$，$\frac{1}{3}\sin 3x>-\frac{1}{3}$．因此

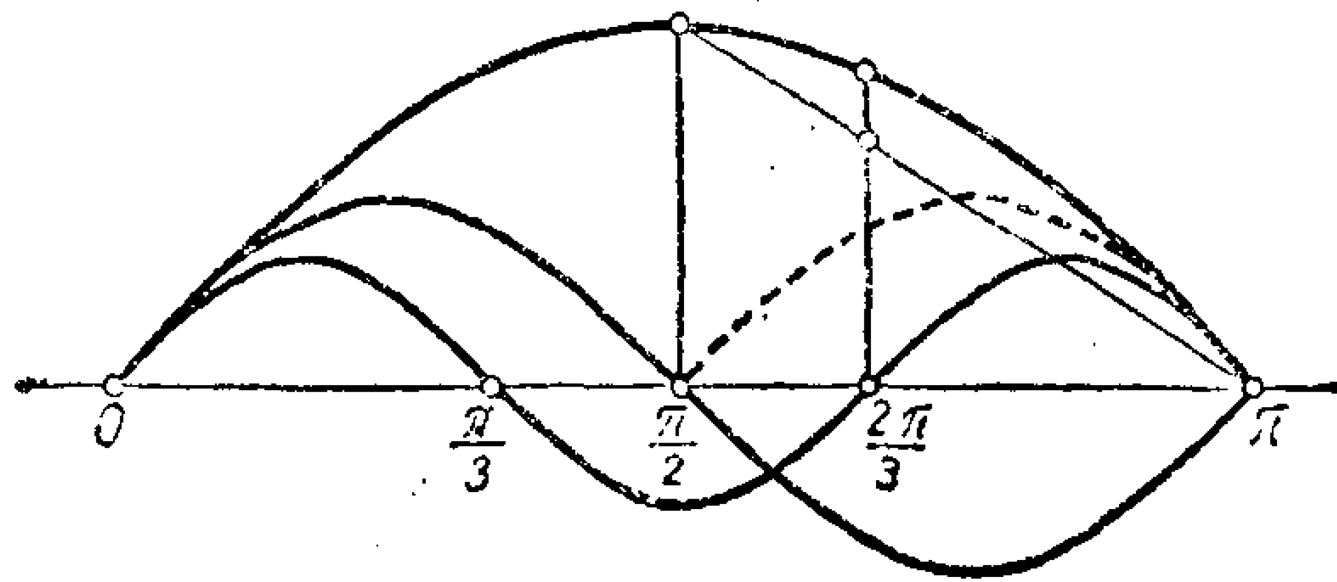


图 165

$$\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x>\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}>0.$$

最后一个不等式可推导如下：在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$中，$\sin x$的弧是凹的，因此位于它的任意两点

所连成的弦之上，从而 $\sin\frac{\pi}{3}>\frac{2}{3}$.

在上面的证明中，仅仅利用了函数 $\sin x$ 的下列性质：第一，曲线 $y=\sin x$ 关于 x 轴的点 $x=\pi$ 和 $x=2\pi$ 的对称性，此外，对直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称；第二，函数 $y=\sin x$ 在这个区间 $(0,\pi)$ 内是凹的．这意味着，代替 $\sin x$，取任何其它具有这两个性质的函数时，我们的证明仍然是有效的．

本题是被利波特·费叶尔证明的下述定理的特殊情形：

对于任何正整数 n 和开区间 $(0,\pi)$ 中的 x，有不等式

$$\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{n}\sin nx>0.$$

在证明这个不等式时要利用三角函数某些很深刻的性质．

149．通过等腰三角形 ABC 的底边 BC 上的点 P 引平行于两腰的直线，交两腰于点 Q 和 R．证明：点 P 关于直线 QR 的对称点 D 在等腰三角形 ABC 的外接圆上．

【证法 1】 如果我们证明四边形 $ACBD$ 可以内接于一圆（图166），那么问题就解决了．为此只要证明：四边形 $ACBD$ 的对角之和相等：

$$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D.$$

事实上，四边形 $ACBD$ 的所有内角之和为360°，因此，如果对角之和相等，那么每一对对角之和都为180°，从而四边形 $ACBD$ 可以内接于一圆．

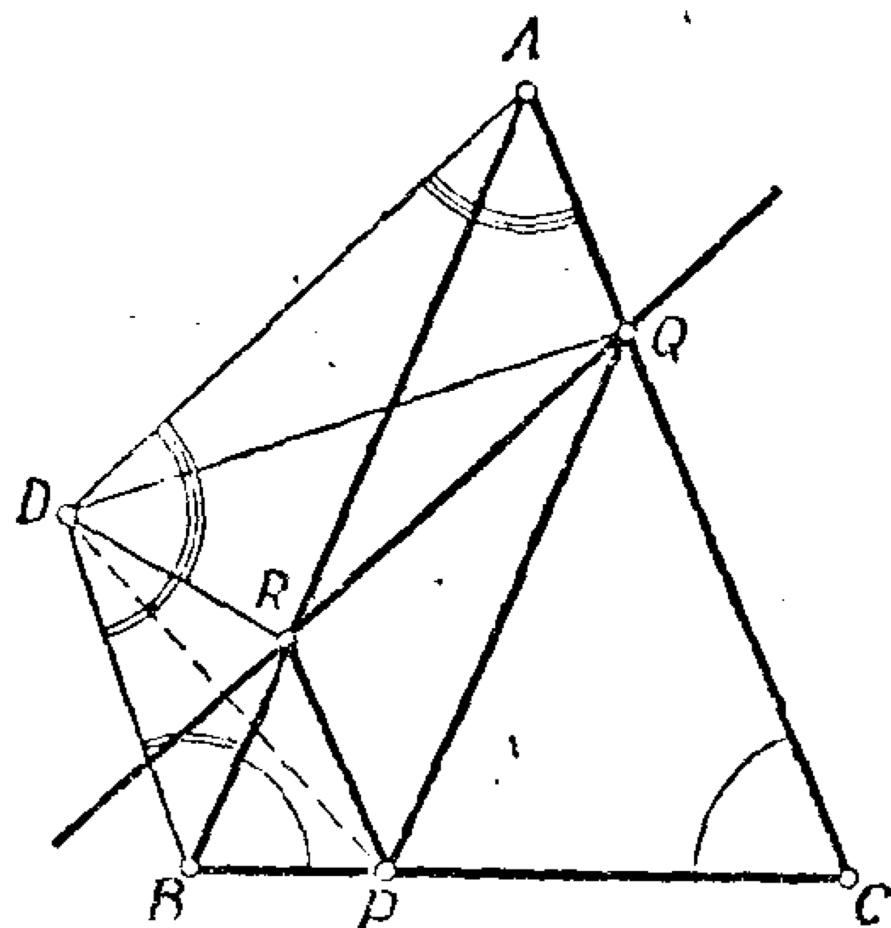


图　166

$\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 相等，因为它们是等腰三角形 ABC 的两底角（在图166中，它们用一条弧线标出）．三角形 RBD 是等腰的．事实上，点 D 和点 P 关于直线 QR 对称（因而 $DR=RP$），而 $\triangle BRP$ 和等腰 $\triangle ABC$ 相似（因而 $RP=RB$）．因此 $\angle RDB$ 和 $\angle RBD$ 作为等腰三角形 RBD 的两底角是相等的（在图166中，它们用两条弧线标出）．四边形 $AQRD$ 是等腰梯形．事实上，它的对角线 AR 和 QD 相等（两个对角线都等于同一个线段 QP：对角线 AR 由于 $\square AQPR$ 的对边相等而等于 QP、对角线 QD 和线段 QP 关于直线 QR 对称），此外 $AQ=DR$（如像前面所证明的，它们之中的每一个线段都等于线段 RP）．因此，在边 AD 上的两个底角相等（在图166中，这两个角用三条弧线标出）．

四边形 $ACBD$ 的每一对对角之和都包含用一条、两条、三条弧线标出的角，因此 $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$，这就是所要证明的．

【证法 2】 正如上一证法中所证明的，$RB=RP=RD$．用类似的方法可以证明：$QC=QP=QD$．因此，通过点 C，P，D 的圆的圆心和点 Q 重合，而通过点 B，P，D 的圆的圆心和点 R 重合（图167）．由于同一弧上的圆周角为圆心角的一半，所以

$$\angle CDP=\frac{1}{2}\angle CQP,$$

$$\angle PDB=\frac{1}{2}\angle PRB.$$

上面两个等式右边的角都等于$\angle CAB$，因为夹这些角的边平行且指向同一方向．上面两个等

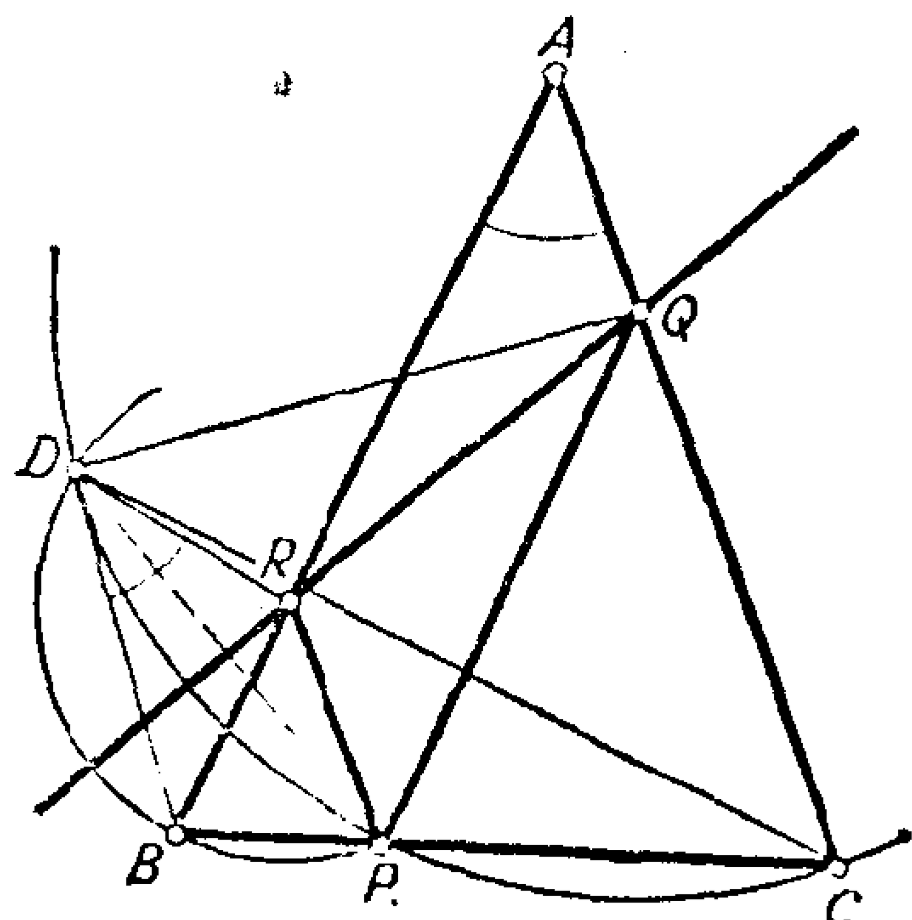


图 167

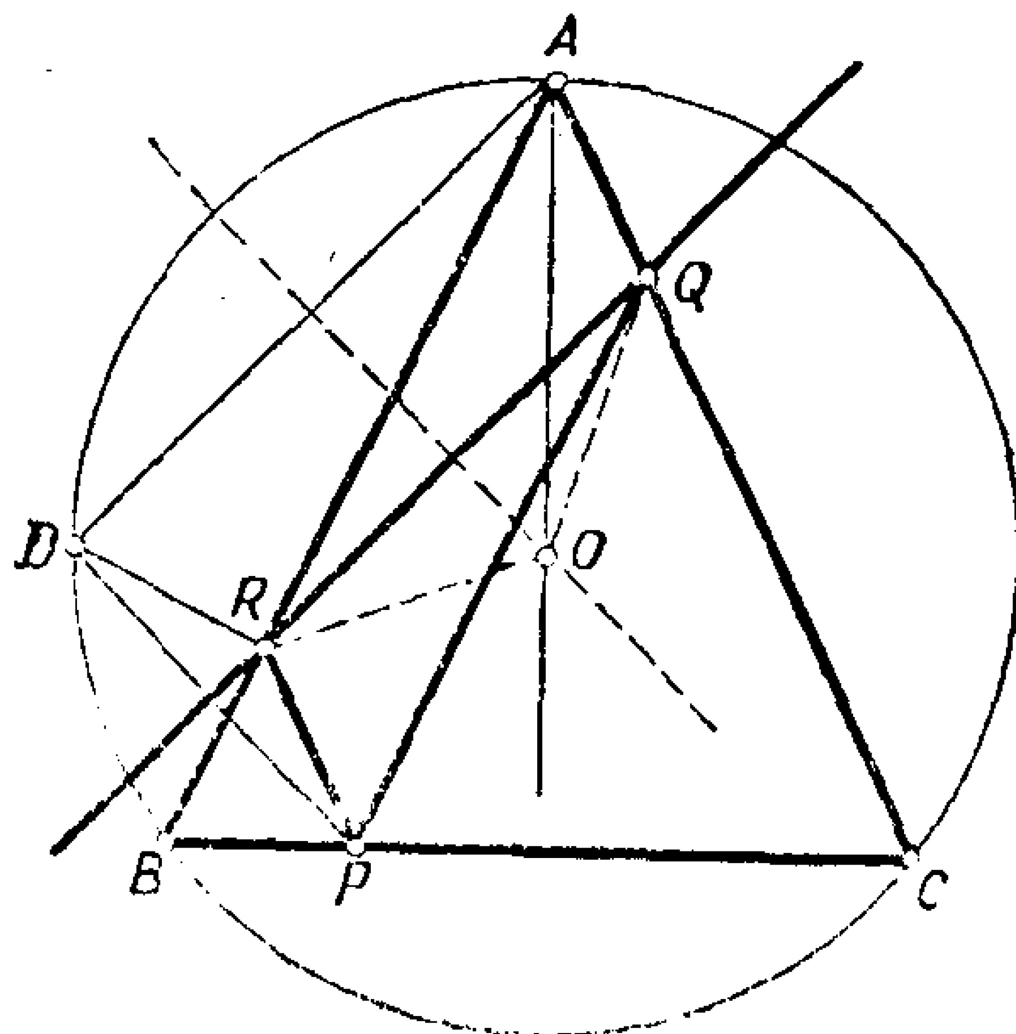


图 168

式左边两个角之和等于$\angle CDB$．因此

$$\angle CDB=\angle CAB.$$

这样一来，点A和D，B，C在一个圆上，这就是所要证明的．

【证法 3】上面已经证明了，$AQRD$是等腰梯形，因此点D和点A关于线段QR的中垂线是对称的（图168）．如果某条直线通过圆心，则圆上的点关于这条直线的对称点也在这个圆上．于是，只要证明线段QR的中垂线通过$\triangle ABC$的外接圆心就行了．

如果线段的两个端点到圆心的距离相等，那么这个线段的中垂线通过圆心．这样一来，只须证明点Q和R到$\triangle ABC$的外接圆心的距离相等．

将弦BA绕着$\triangle ABC$的外接圆心O旋转到弦AC．这时点R变到点Q，因为$BR=AQ$（两个线段都等于同一个线段PR）．当绕着圆心旋转时，由一个点旋转到另一个点，这两个点到圆心的距离相等．因此，点Q和R到$\triangle ABC$的外接圆心O的距离相等，这就是所要证明的．

【证法 4】如果代替等腰三角形，我们研究任意的三角形，就本质上来说，本题的结论仍然成立．但须换成下面的方式来叙述本题．

假设P是任意$\triangle ABC$的边BC上的一点，点Q和R是线段PC和BP的中垂线和三角形的边AC和AB的交点（图169）．那么点P关于直线QR的对称点D落在$\triangle ABC$的外接圆上．

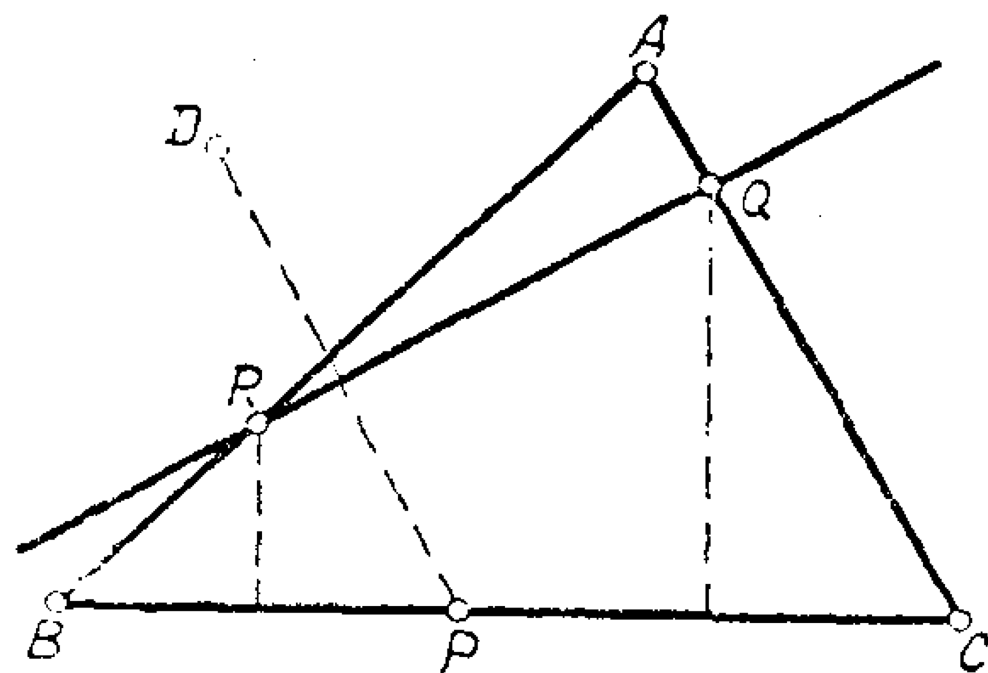


图 169

如果$\triangle ABC$是等腰的，那么问题的新的叙述方式和原来的是一样的．

我们来证明新的断言．假设$A'\equiv P$是我们在$\triangle ABC$的边BC上所取的一点．延长线段$A'R$和$A'Q$，使和通过顶点A所作的平行于边BC的直线相交于点B'和C'（图170）．根据作法，$\triangle A'RB$和$\triangle A'QC$是等腰的，因此$\triangle ARB'$和$\triangle AQC'$也是等腰的．因此，$AB=A'B'$，$AC=A'C'$．在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\angle A=\angle A'$，

因为$\triangle ABC$中的$\angle B$和$\angle C$分别等于$\triangle A'B'C'$中的$\angle B'$和$\angle C'$. 这样一来，$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$全等，于是$\triangle ABC$的外接圆k的半径和$\triangle A'B'C'$的外接圆k'的半径相等. 直线QR和圆k与k'的根轴(见§48)重合，因为点Q和R关于两个圆具有同样的幂：$QA \cdot QC = QC' \cdot QA'$（由于$QA = QC'$，$QC = QA'$）和$RA \cdot RB = RB' \cdot RA'$. 由此推出，圆$k$和$k'$关于直线$QR$是对称的，因为两个半径相同的圆的对称轴和它们的根轴重合. 这样一来，和圆k'上的点A'关于直线QR的对称点A''在圆k上.

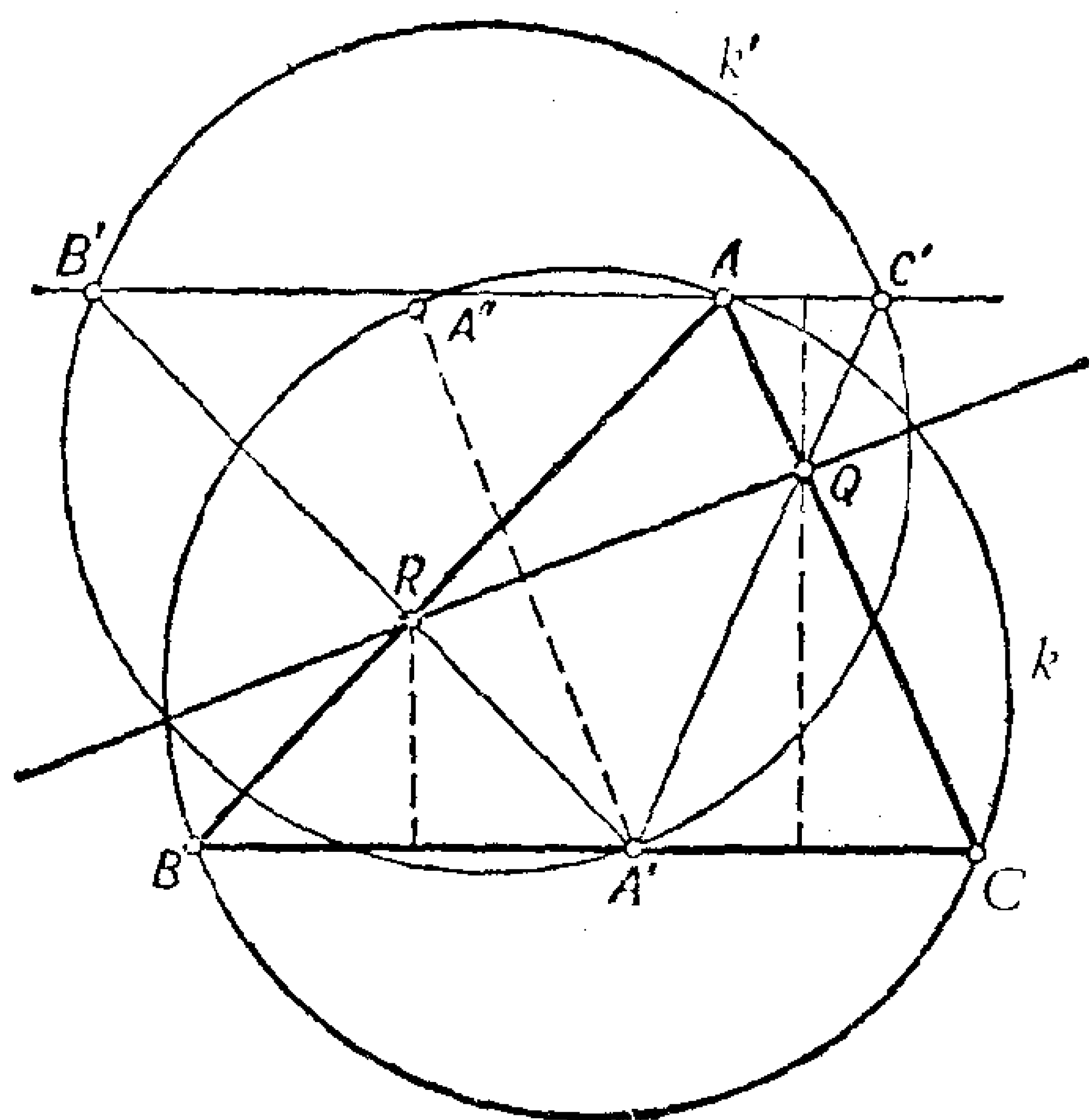


图 170

150. 什么样的自然数不能表示成连续的自然数之和的形式？

【解】我们证明：可以表示成连续的自然数之和的数，只能是那样的自然数$n>1$，要么它本身是奇数，要么它有奇约数.

具有奇约数的数$(2k+1)m$可以表示成由$m-k$到$m+k$的连续整数的和. 如果$k>m$，那么和是从负项开始的，这些负项可以和与它的绝对值相等的正项相抵消. 剩下的项都是自然数，且其和为$(2k+1)m$. 这些被加项的个数不小于2，因为不然的话，则有不等式$-(m-k)>m+k-2$，即$m<1$，这是不可能的.

剩下的还要证明，连续的自然数之和总能被奇数整除. 这个断言可如下导出：在算术级数

$$a+(a+1)+\cdots+(a+n)$$

中，首尾两项的和等于$2a+n$，项数为$n+1$，这两个数不可能同为偶数或同为奇数，因为它们的差$2a-1$是奇数. 但这时数$2a+n$和$n+1$的乘积，从而它的一半（等于上面所写的算术级数的和），能被奇数整除.

于是我们证明了，含有奇约数的自然数$n>1$且只有这样的自然数能表示为连续自然数的和. 不能表示为连续自然数的和这种形式的自然数只有偶约数；且把它们分解成素数的乘积时，只能是数2的乘幂.

151. 某一天有若干读者去过图书馆，他们是单独去的，但是在任何三个读者中，至少有两个人这天在图书馆相遇. 证明：一定可以找到这样两个时刻，使得在这一天到过图书馆的任何一个读者，至少在这两个时刻中的一个时刻是在图书馆的.

【证法1】我们假设某一个读者无论是在第一个离馆的读者离开图书馆的那一时刻或是在最后入馆的读者进入图书馆的那一时刻都不在图书馆. 这只可能在那种情况下发生：如果这个不在图书馆的读者是在第一个离馆的读者离馆之后进馆的（因为任何读者都不能更早离开图书馆），而且在最后一个进馆的读者进馆之前就离开了图书馆（因为任何读者都不能更迟进入图书馆）. 但是这时，在这个读者，第一个离馆的读者和最后一个进馆的读者构成的三人组中，任何两个人都不可能在图书馆相遇，这与本题条件不符. 因此，在这一天到过图书馆的每一个读者在下列两个时刻中，至少有一个时刻一定是在图书馆的：一个是第一个离馆的读者离馆的时刻，一个是最后一个进馆的读者进馆的时刻.

【证法 2】我们假设委托图书馆管理员在读者减少之前发布两次重要通知，使尽可能多的读者听到．第一次应当在什么时刻发布通知呢？显然应该在第一个离馆的读者离馆的时刻．第二次应该在什么时候发布通知呢？显然是在没有听到第一次通知的读者（这样的读者是在第一个离馆之后进馆的）中第一个离馆的读者离馆的时刻．由本题条件推出，没有任何一个读者没有听到通知．事实上，有这样的读者存在将意味着，他是在管理员第二次发布通知以后进馆的．这样的读者，第一个离馆的读者，第一个离馆之后进馆的读者中第一个离馆的读者所构成的三人组将违反本题的条件，在他们三人中，任何两个人都不可能在图书馆相遇．

用第二个证法可以证明更一般的命题．假设 n 是任一自然数．我们假设，在任何 n 个读者（代替 3 人）中，至少有两个在图书馆相遇．那么，在这一天内有 $n-1$ 个时刻，所有这天到过图书馆的读者，在这些时刻中的某一个时刻是在图书馆的．

152．平面上的三个圆 k_1, k_2, k_3 两两彼此相切于三个不同的点．将 k_1 和 k_2 的切点和其它两个切点连接成线段．证明：这两个线段或它们的延长线和圆 k_3 的交点是一条直径的两个端点．

【证明】首先我们证明下面的引理：

如果 T 是圆 k_1 和 k_2 相切的切点，A_1 和 A_2 是圆 k_1 和 k_2 上不同于 T 的点，且 A_1，A_2，T 在一直线上，那么连接圆 k_1 和 k_2 的圆心和点 A_1 与 A_2 的两个半径平行．

为了证明引理，我们研究等腰三角形 TO_1A_1 和 TO_2A_2，这里 O_1 和 O_2 是圆 k_1 和 k_2 的圆心（图171）．在两个三角形中，顶角 T 是相等的（若两圆外切，它们是对顶角，若两圆内切，

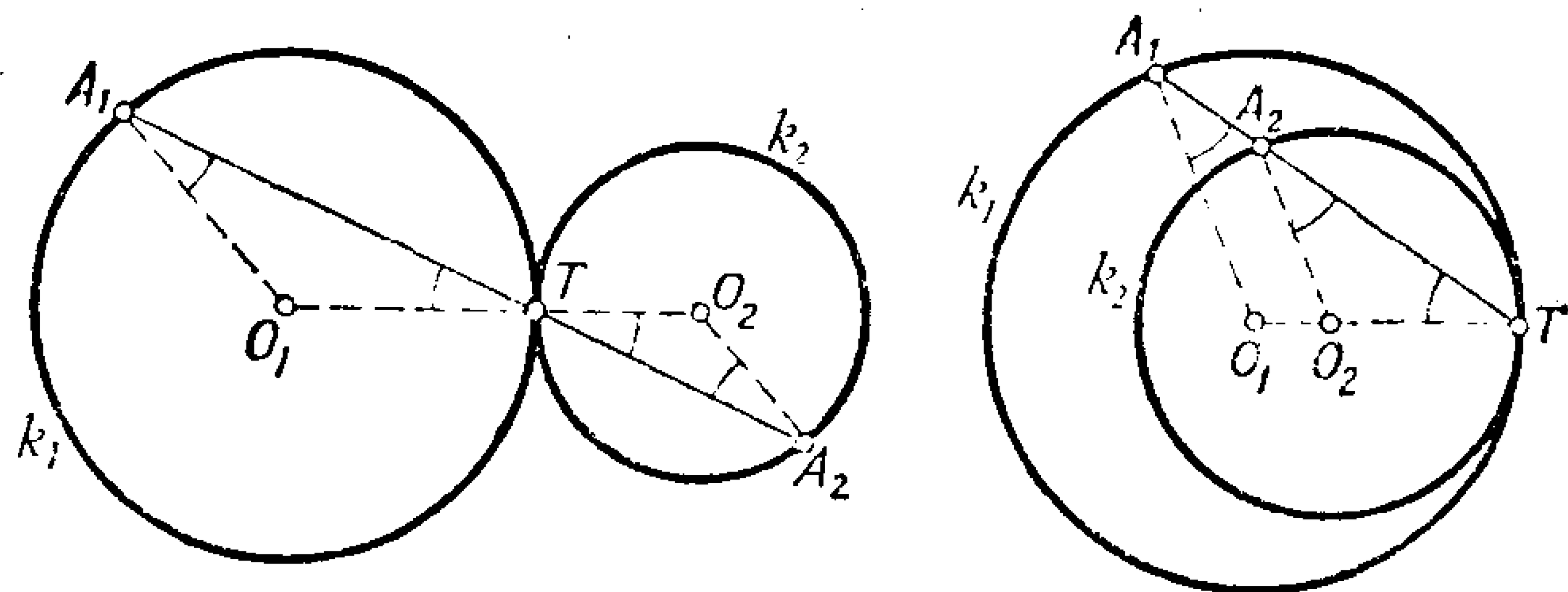


图 171

这两个角相重合）．因此顶角 $\angle A_1$ 和 $\angle A_2$ 也相等．于是，根据与第三条直线相交的两直线的定理，半径 O_1A_1 和 O_2A_2 平行，因为它和直线 A_1A_2 相交所构成的内错角或同位角相等．

现在不难证明本题的断言．假设 T_{ij} 表示圆 k_i 和 k_j 的切点．如果直线 $T_{12}T_{13}$ 和 $T_{12}T_{23}$ 和圆 k_3 相交于点 A 和 B，那么根据所证明的引理，圆 k_3 的半径 O_3A 和 O_3B 平行于通过圆 k_1 和 k_2 的切点所引的 k_1 和 k_2 的半径（图172—174）．因此，半径 O_3A 和 O_3B 在一直线上，因为点 A 和 B 不重合，所以它们是圆 k_3 的直径的端点．

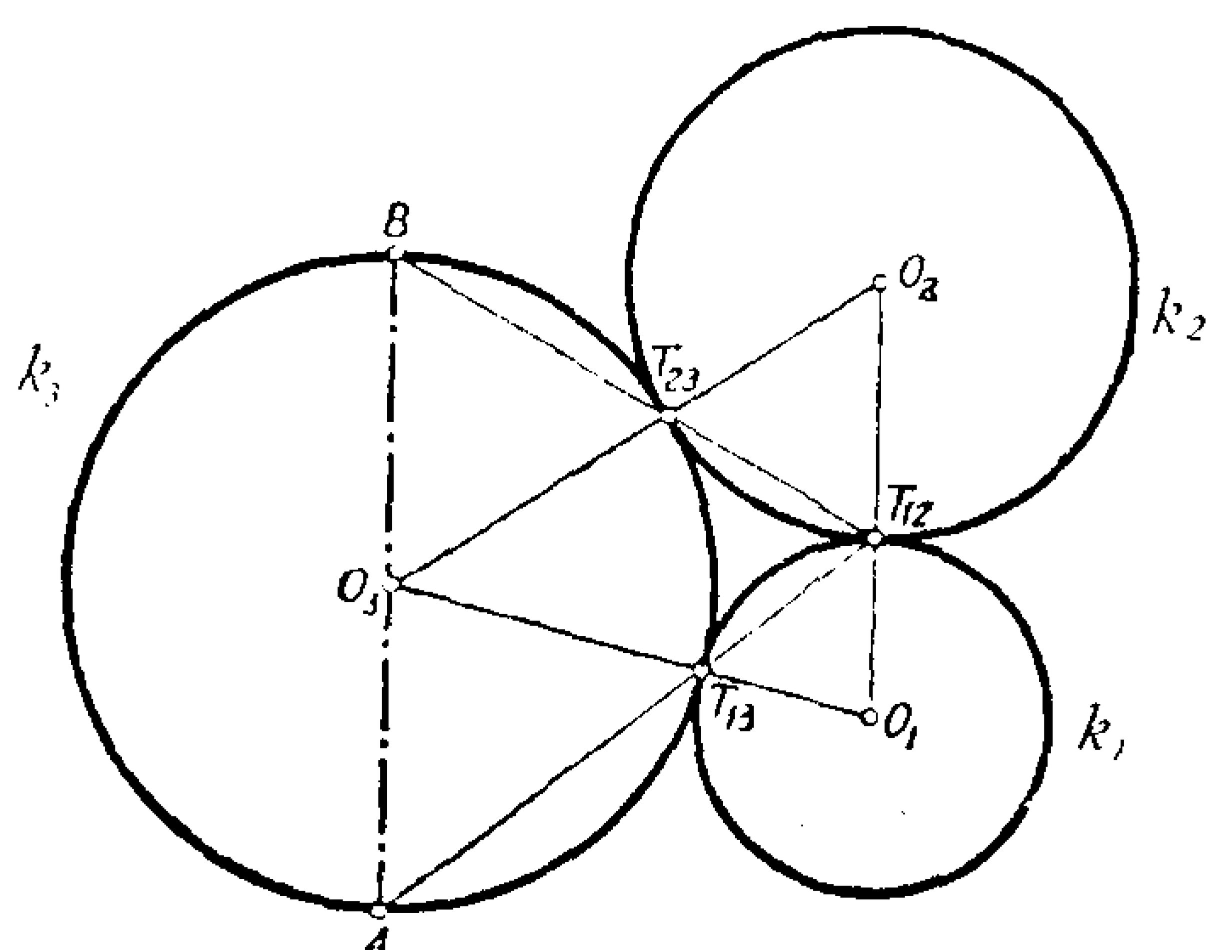


图 172

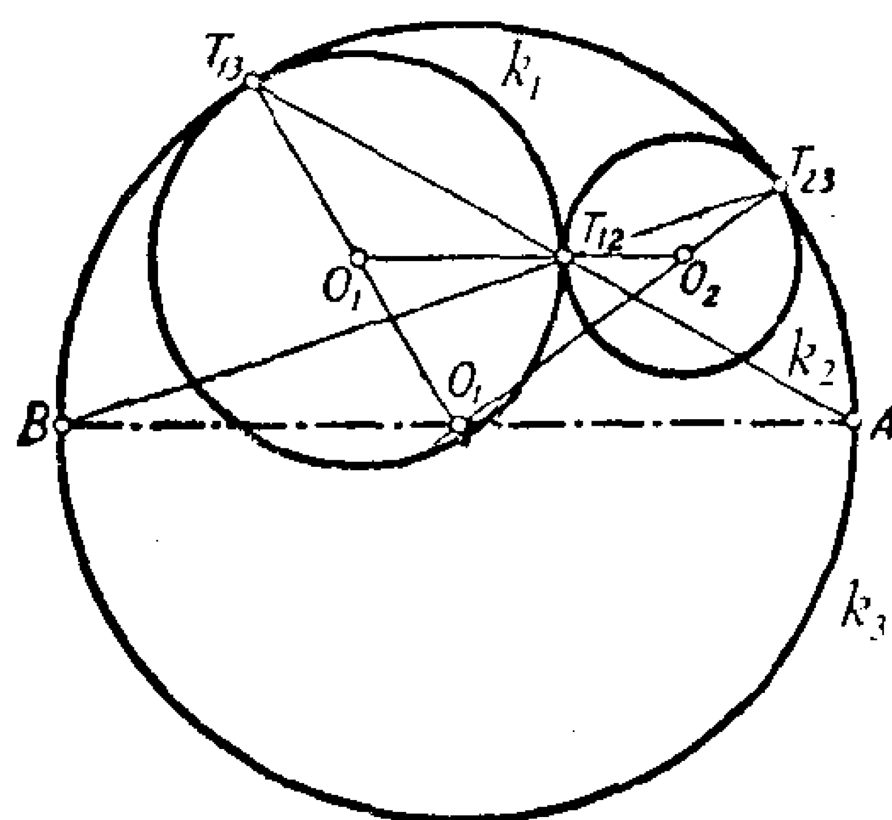


图 173

153. 假设 a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 是这样的实数，使得对于任何整数 x 和 y，数

$$a_1x+b_1y+c_1 \quad 和 \quad a_2x+b_2y+c_2$$

中至少有一个是偶整数. 证明：两组系数 a_1, b_1, c_1 和 a_2, b_2, c_2 中至少有一组全是整数.

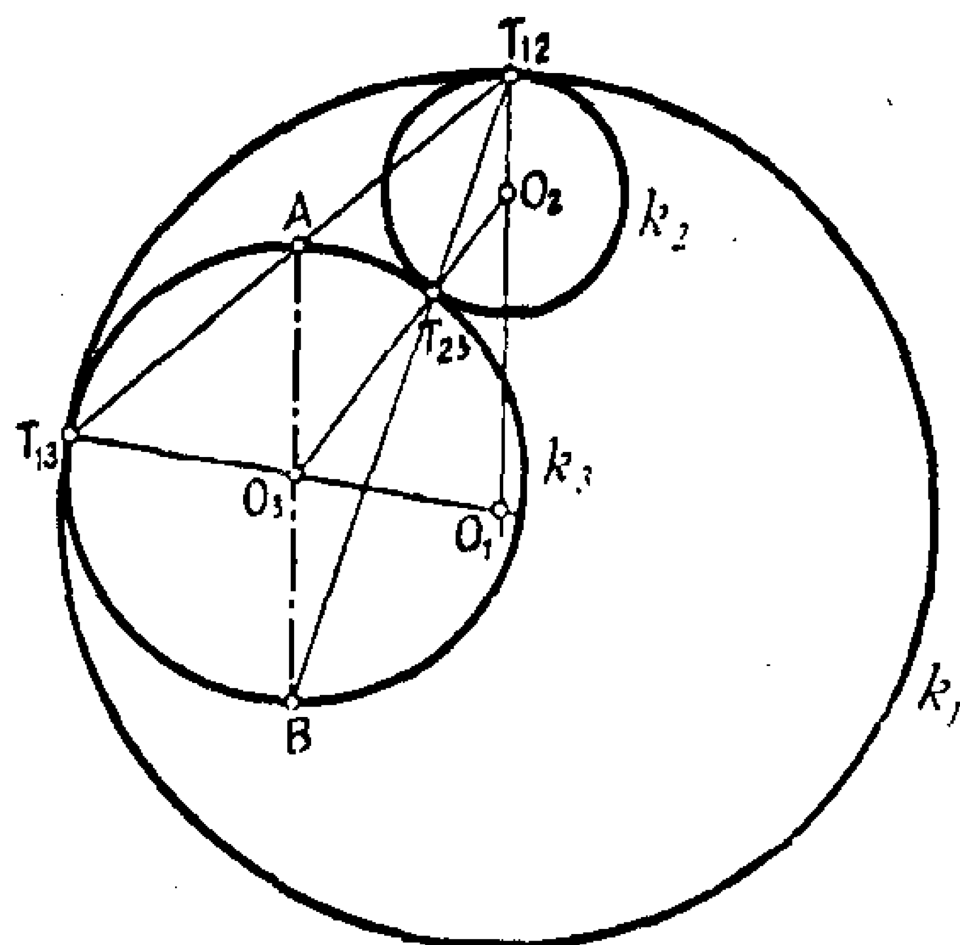


图 174

【证明】对于所研究的表达式中的 (x, y)，代之以下列三组数：$(1,0)$，$(0,0)$ 和 $(-1,0)$. 这时，表达式 $a_1x+b_1y+c_1$ 和 $a_2x+b_2y+c_2$ 中的某一个至少两次取偶数值，因为要不然的话，就不是对所有的整数 x 和 y，它们之中的某一个取偶数值了，这与本题条件相违. 这样一来，在值

$$a+c, \quad c, \quad -a+c$$

中，至少有两个取偶数值，在这里，它们是当 (x,y) 等于 $(1,0)$，$(0,0)$ 和 $(-1,0)$ 时，某一个表达式所取的值（附标省略了）. 因此，在三个数 $a+c$，c，$-a+c$ 中，至少有两个数的差是偶数. 但是，在这些数中，任何两个数的差，或者等于 a，或者等于 $2a$，因此，在我们所研究的这个表达式中，系数 a 一定是整数. 在这同一个表达式中，系数 c 也应该是整数，因为要不然的话，这个表达式所取的三个值没有一个是整数. 于是，两个表达式中的某一个表达式的系数 a 和 c 是整数.

利用类似的方法〔(x,y) 代之以数对 $(0,1)$，$(0,0)$，$(0,-1)$〕可以证明：在两个表达式中，某一个表达式的系数 b 和 c 也是整数. 如果在两种情况中，系数属于同一个表达式，那么有一组系数 a, b, c 都是整数，于是，本题的断言被证明了. 在相反的情况，由上面的证明只可以推出：在一个表达式中，系数 a 和 c 是整数，而在另一个表达式中，b 和 c 是整数.

用数组 $(1,1)$ 代替 (x,y)，在两种情况下我们都得到 $a+b+c$ 是整数. 因此，三个数 a，b，c 中的任意两个（或者 a 和 c，或者 b 和 c）是整数，那么第三个数也一定是整数，这就是所要证明的.

154. 正方形 $ABCD$ 的边长等于 a. 在边 BC 上取线段 BE 等于 $\frac{a}{3}$, 在边 DC 的延长线上取 CF 等于 $\frac{a}{2}$. 证明：直线 AE 和 BF 的交点在正方形 $ABCD$ 的外接圆上.

【证法 1】我们用 M 表示直线 AE 和 BF 的交点. 假设 G 是直线 AE 和正方形的边 DC 的延长线的交点，H 是直线 CM 和正方形的边 AB 的延长线的交点(图175). 因为 $\triangle ABE$ 和 $\triangle GDA$ 相似，所以 $GD:AD=3$，$GD=3a$. 根据通过一点的直线束被平行线所截得的线段成正比的定理，有

$$BH:BA=FC:FG=\frac{a}{2}:\frac{3a}{2}=1:3,$$

由此

$$BH=\frac{AB}{3}=\frac{a}{3}.$$

这就证明了，当把 $\triangle ABE$ 绕顶点 B 旋转90°时，它和 $\triangle CBH$ 相重合. 这样一来，直线 AE

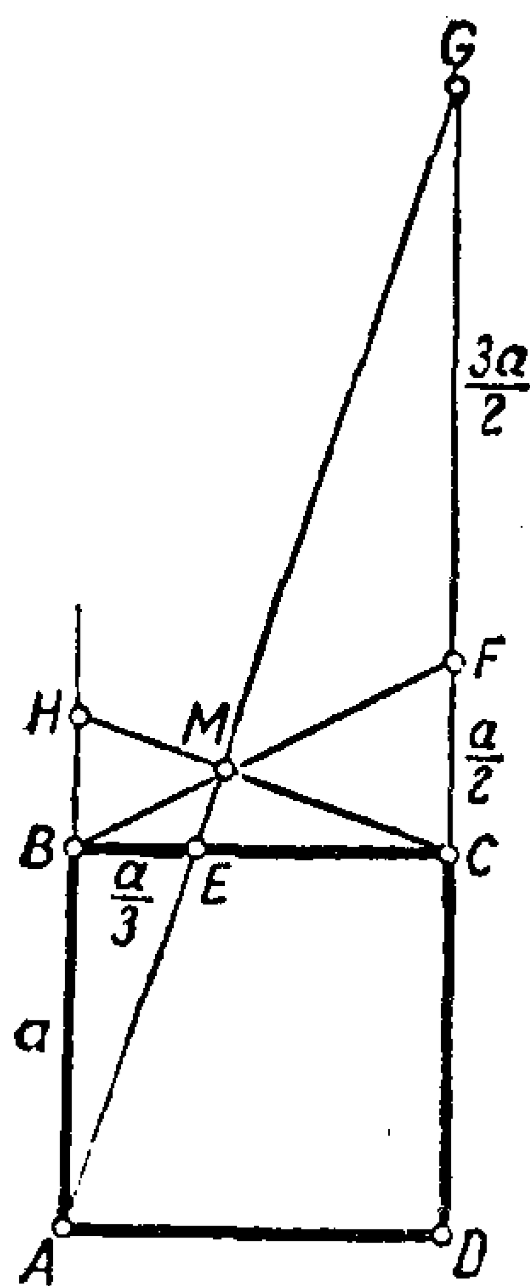


图 175

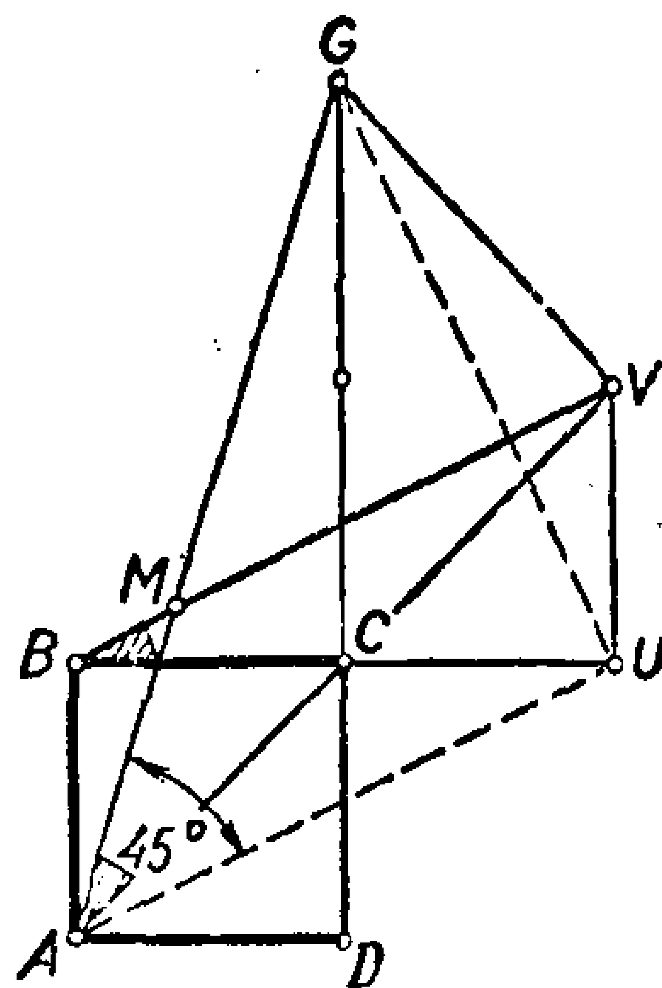


图 176

和 CH 垂直，且点 M 在对正方形的对角线 AC 所张的角为直角的点的轨迹上. 因此，点 M 在正方形 $ABCD$ 的外接圆上，这就是所要证明的.

【证法 2】在图175上加上正方形的格子（关于平面上的格子见134题的解答和 §67)，这些方格的大小和正方形 $ABCD$ 相同. 假设 U 是在边 BC 的延长线上和顶点 C 最近的整点，V 是在对角线 AC 的延长线上和顶点 C 最近的整点（图176). 直角三角形 BUV 和 AVG 相似，因为它们的直角边的比为 2：1. 因此，$\triangle BUV$ 中的 $\angle B$ 等于 $\triangle AVG$ 中的 $\angle A$. 这样一来，正方形 $ABCD$ 的顶点 A 和 B 都在对线段 MC 所张的角为 $\angle MBC=\angle MAC$ 的点的轨迹上. 这时点 M 在通过点 A, B, C 的圆上，即在正方形 $ABCD$ 的外接圆上，这就是所要证明的.

【证法 3】从图 176看出，$\triangle AUG$ 是等腰直角三角形，因此 $\angle UAG=45°$，又因为

$BV \parallel AU$，$\angle UAG=\angle AMB$（内错角），所以$\angle AMB=45°$. 因此，点 M 在正方形 $ABCD$ 的外接圆上，因为这个圆的圆心对正方形的任一边所张的角都是90°.

155. 对于怎样的整数 m，乘积 $1\times 2\times\cdots\times(m-1)$能被 m 整除？

【解】首先，如果 $m=p$ 是素数，那么显然乘积 $1\times 2\times 3\times\cdots\times(m-1)$不能被 p 整除. 因此，我们只要讨论 m 是复合数的情况.

如果 m 可以分解为两个不同的整数的乘积，即可表示成 $m=ab$，这里 $a\neq b$，那么乘积 $1\times 2\times 3\times\cdots\times(m-1)$ 能被 m 整除，因为数 a 和 b 将和它的某一个因子相同.

剩下的我们还要研究数 m 只能分解为两个相同因子的乘积的情况.即 m 可表示为素数 p 的平方的形式（$m=p^2$）. 乘积 $1\times 2\times 3\times\cdots\times(p^2-1)$能被 p^2 整除仅仅在那种情况下：如果乘积中有两个因子能被 p 整除，即在乘积中含有因子 $2p$. 因为所有的因子都小于 p^2，所以为此必须有 $2p<p^2$. 而任意大于2的整数都满足这个不等式，特别是所有的素数，除2以外，都满足这个不等式.

于是，对于除 $m=4$ 外的任意复合数 m，且仅仅对于这些数，本题的断言是成立的★.

§69. 威 尔 逊 定 理

1） 在155题的解答中证明了：如果 p 是素数，那么$(p-1)!$不能被 p 整除. 在威尔逊定理中包含了更加强得多的断言：

如果 p 是素数，那么$(p-1)!+1$ 能被 p 整除.

我们借助于直观的几何想法来证明这个数论中著名的定理. 我们假设 $p>2$，因为当 $p=2$ 时，定理的断言可直接验证.

我们来研究顶点为 $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_{p-1}$ 的圆内接正 p 边形. 数 $1, 2, \cdots, p-1$ 的所有可能的排列的个数等于$(p-1)!$. 我们可以把每一个排列直观地描述为有向"多边形"的形式：排列$(i_1, i_2, \cdots, i_{p-1})$对应于封闭的有向折线 $P_0P_{i_1}P_{i_2}\cdots\cdots P_{i_{p-1}}$（图177）. 图177所画的有向折线对应于 $p=7$ 时的排列（2, 1, 6, 4, 3, 5）. 显然，不同的排列对应于不同的封闭有向折线，而且在和排列相对应的折线中会遇到所有的具有 p 个分布在圆上的顶点的折线. 这样一来，所有的有向折线的个数等于$(p-1)!$. 必须证明用 p 去除$(p-1)!$时得到余数 $p-1$. 如果从总数中除去 $p-1$ 个折线以后，其余的折线可以分成类，而每一类有 p 个折线，那么我们就得到了证明.

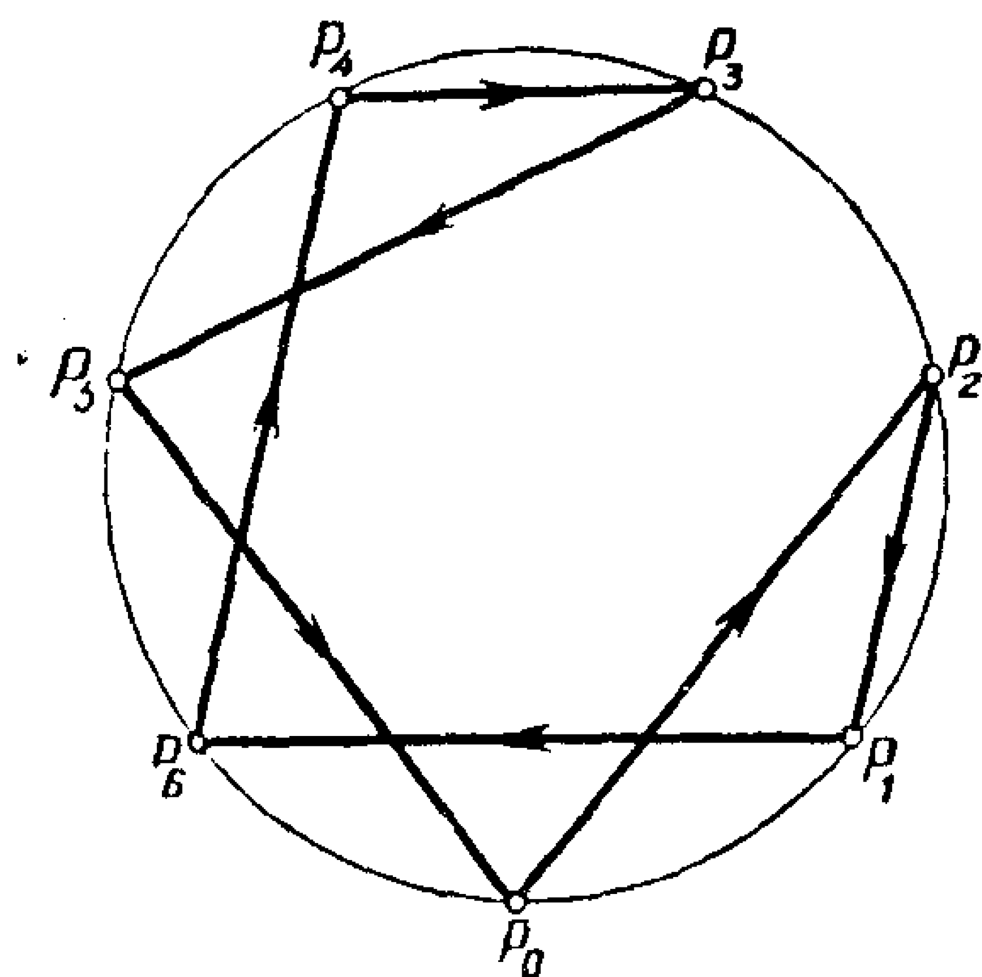


图 177

我们用下面的方式将折线进行分类. 如果折线绕着圆心旋转时，可以从一个变到另一个，这两条折线就认为属于同一类. 在一般的情况下，每一个这样的类包含有 p 个折线，因为将圆绕圆心旋转时，它的任意一点都可以和圆内接 p 边形的 p 个不同的顶点重合. 仅仅在下面的情况下某一类中才含有较少的折线：如果在使点和 p 边形的顶点重合的旋转中，并不是对于所有 p 个旋转都得到不同的折线，即当旋转角 $r\alpha$ 时，其中 $\alpha=\frac{360°}{p}$，$r<p$，折线已

经变到了自身．但是如果某一个折线当绕圆心旋转角 $r\alpha$ 时变到了自身，那么当它绕圆心旋转角

$$0,\ r\alpha,\ 2r\alpha,\cdots,\ (p-1)r\alpha$$

时也将变到自身．所有这些旋转实质上是不同的，即其中任何两种旋转彼此相差的角度不等于360°，也不是360°的倍数．事实上，角 $kr\alpha$ 和 $lr\alpha$ 之差仅仅在 $(k-l)r$ 能被 p 整除时才能为 $360°=p\alpha$ 的倍数，这是不可能的，因为 $r<p$，$k<p$，$l<p$，而 p 是素数（见§2）．因此，在角

$$0,\ r\alpha,\ 2r\alpha,\cdots,\ (p-1)r\alpha$$

中包含有角 α 所有不同的倍数（在这里两个角认为是相同的，如果它们中的一个和另一个的差为360°的倍数），因为仅仅只有 p 个这样的角．于是我们证明了，如果某一个折线属于不包含有 p 个折线的类，那么这样的类仅仅是由一个折线组成的．

只包含一个折线的类是正（凸的或星形的）p 边形中的一个．由§14知，有向的正 p 边形的个数等于 $p-1$．于是断言被证明了，因为除了正 p 边形以外，所有其它的封闭的有向折线可以分成类，每一类包含有 p 个折线．

2）由1)中所证明的断言推出，**如果 p 是形如 $4k+1$ 的素数，那么存在这样一个正整数 n，使得 n^2+1 能被 p 整除**．这个断言是我们在§62中所需要的．

我们以下面的方式将 $(p-1)!$ 中大于 $\frac{p}{2}$ 的那些因子分出来：

$$(p-1)!=1\times2\times3\times4\cdots\times\frac{p-3}{2}\times\frac{p-1}{2}\times$$
$$\times\left(p-\frac{p-1}{2}\right)\left(p-\frac{p-3}{2}\right)\cdots(p-4)(p-3)(p-2)(p-1).$$

如果去掉括弧，那么除了一项以外，所有的项都含有因子 p．这些项的和我们记作 pQ．唯一不包含因子 p 的项是由第二行中每一个差中取减数得到的．这样一来，$(p-1)!$ 可以表示成

$$(p-1)!=pQ+\left(1\times2\times3\times\cdots\times\frac{p-3}{2}\times\frac{p-1}{2}\right)^2\times(-1)^{\frac{p-1}{2}}=$$
$$=pQ+\left\{\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right\}^2.$$

因为根据1)中所证明的，这个数加上1以后能被 p 整除．因为右边第一项 pQ 能被 p 整除，所以这就意味着 $\left\{\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right\}^2+1$ 能被 p 整除．因此，数 $n=\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ 便是我们要证明其存在性的那个数．

156．同一平面上的四个半平面完全复盖了这个平面，即：平面的任一点至少和四个半平面中的一个半平面的某一内点相重合．证明：从这些半平面中，可以挑选出三个半平面，它们仍能复盖全平面．

【证法1】若本题断言不成立，那么，如果从四个半平面中除去一个半平面时，我们每次都发现平面上至少有一个点未被盖住．这就意味着，在平面上有四个点 P_1, P_2, P_3, P_4，它

们之中的每一个仅被一个半平面覆盖，并且四个半平面中的每一个仅仅盖住点 P_1，P_2，P_3，P_4中的一个. 我们来证明这是不可能的，即要证明在任何盖住全平面的任意四个半平面中，总可以找到这样一个半平面，它们盖住了四个给定点中的两个点.

首先我们注意到，如果三个点在一条直线上，那么盖住中间一点的半平面至少应当盖住两个边上的点中的一个. 因此，四个点中的任意三个点都不在一条直线上. 剩下的要研究点 P_1，P_2，P_3，P_4 在平面上的下列两个可能的分布：

1） 一点在以其它三点为顶点的三角形内；

2） 四点构成凸四边形.

我们研究第一种情况. 假设 P_4 在以其它三点为顶点的三角形内，M 是直线 P_3P_4 和边 P_1P_2 的交点（图178）. 由于前面我们所作的说明，盖住点 P_4 的半平面应当或者盖住了点 P_3，或者盖住了点 M. 由同样的说明可推出，如果这个半平面盖住了点 M，那么它至少也盖住了点 P_1 和 P_2 中的一个点.

我们再研究第二种情况. 作四边形的对角线，并用 M 表示它们的交点（图179）. 由于

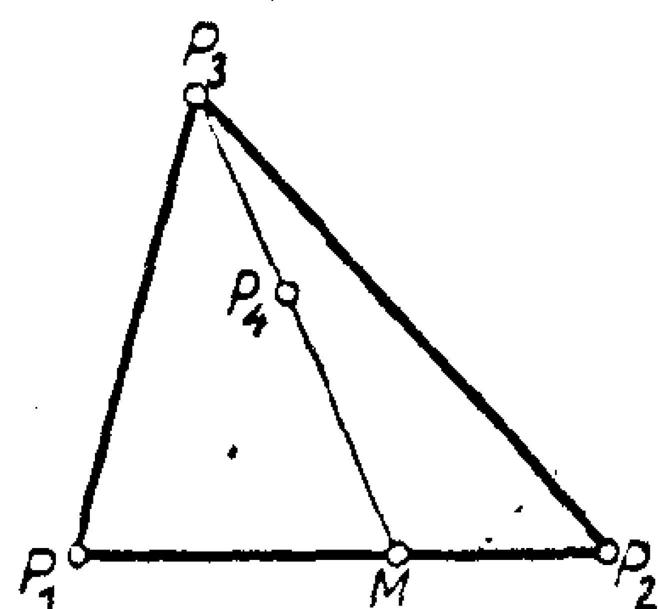


图 178

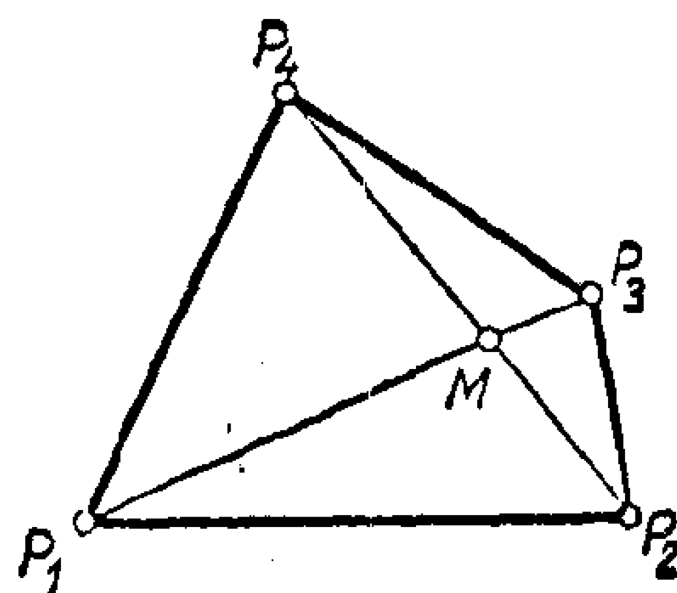


图 179

前面所作的说明，盖住点 M 的半平面至少应该盖住对角线 P_1P_3 的两个端点中的一个点和对角线 P_2P_4 的一个端点，即至少盖住了四个点 P_1，P_2，P_3，P_4 中的两个点.

这样一来，无论是在第一种情况或是在第二种情况，四个半平面中的一个半平面盖住了四个给定的点中的两个. 从而本题获证.

【证法 2】我们先证明下面的引理：

如果三条射线盖住了一条直线，那么在它们之中可以挑选出两条射线盖住整个直线.

为了证明这条引理只要注意到下面的事实就够了：盖住整个直线的三条射线中有两条射线是指向同一方向的，且如果两条射线指向同一方向，那么它们中的一个完全包含在另一个里面. 如果把这个完全包含在另一条射线里面的射线去掉，那么剩下的两条射线将盖住了整个直线. 于是，引理得证.

现在我们研究一个半平面（我们把这个半平面叫做第一个半平面）的边界直线. 第一个半平面的边界线被其它三个半平面覆盖住. 如果它们之中的一个盖住了整个边界线，那么它将把整个第一半平面包含在它里面（要不然，这两个半平面将覆盖整个平面——中译者注）. 因此，去掉第一个半平面所剩下的三个半平面盖住了整个平面. 于是在这种情况下，本题断言获证.

如果三个半平面中的每一个半平面盖住的仅仅是两个射线（这个平面的边界线把第一个半平面的边界线所分成的两个射线）中的一个，那么，利用引理可以断定：三个射线（指被三个半平面盖住的射线——中译者注）中的两个（因而三个半平面中的两个半平面）盖住了

第一个半平面的整个边界线．如果三个半平面中的一个和第一个半平面的边界线没有任何一个公共点时，这个断言仍然成立．

我们来研究盖住第一个半平面的边界线的两个半平面的边界线．如果这两个半平面的边界直线平行，那么这两个半平面盖住了整个平面．现在我们假设两个半平面的边界线交于点 M．如果点 M 在第一个半平面内（图180．a），那么这两个半平面和第一个半平面一起盖住了整个平面．如果点 M 在第一个半平面外（图180．b），那么第一个半平面可以去掉，而其它三个半平面将盖住整个平面，因为在这种情况下，边界线交于点 M 的两个半平面完全盖住了第一个半平面．于是，本题获证．

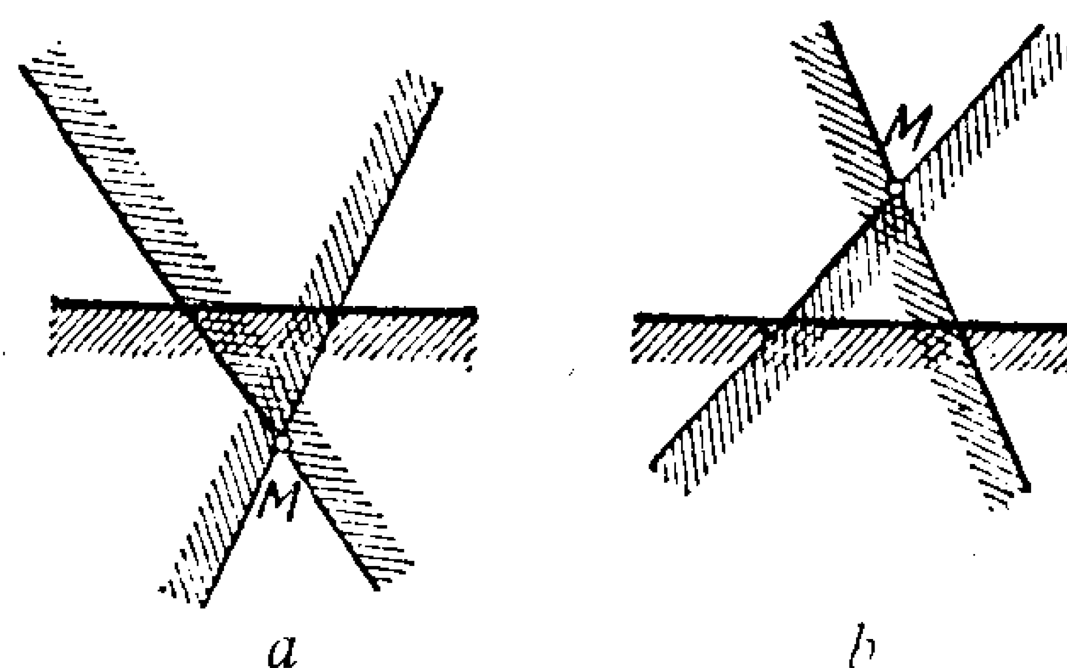


图 180

【证法 3】 我们用 f_1，f_2，f_3，f_4 来表示半平面．如果本题的断言不成立，那么存在这样一个点 P_1，在四个半平面 f_1，f_2，f_3，f_4 中仅仅是 f_1 盖住了它．此外，还存在点 P_2，P_3，P_4，每一个这样的点仅仅被半平面 f_2，f_3，f_4 中的一个盖住．连接点 P_1 和 P_4 的直线段应该和半平面 f_4 的边界线有公共点 Q_1，因为 f_4 盖住了点 P_4，但没有盖住 P_1．半平面 f_2 和 f_3 没有盖住点 Q_1，因为无论是 f_2 或是 f_3 都不能盖住线段 P_1P_4 的端点，因而不能盖住 P_1P_4 的内点．因此，在四个半平面中，盖住点 Q_1 的只能是半平面 f_1，实际上 f_1 也盖住了 Q_1（不然的话，点 Q_1 就不被任何半平面覆盖）．类似地，半平面 f_4 的边界上还有这样的点 Q_2 和 Q_3，它们中的一个只被半平面 f_2 覆盖，另一个点只被半平面 f_3 覆盖．但这是不可能的，因为 Q_1，Q_2 和 Q_3 是一条直线（半平面 f_4 的边界线）上的三个互不相同的点，盖住它们中间的点的半平面至少盖住两个边上的点中的一个．

所得到的矛盾证明了本题断言的正确性．

156题可以叙述成下面代数的形式：

如果不等式组

$$a_1x+b_1y+c_1>0\,,$$
$$a_2x+b_2y+c_2>0\,,$$
$$a_3x+b_3y+c_3>0\,,$$
$$a_4x+b_4y+c_4>0$$

具有那样的性质：x，y 的任何一对值至少满足不等式组中的某一个，那么可以从不等式组中去掉一个不等式而不破坏它的性质．

不利用上面的几何方法而直接证明这个断言是相当困难的．★

§70. 关于赫利定理

1）对于平面图形，如果它在包含任何两个点的同时还包含了这两个点所连成的整个线段，我们说这个图形是**凸的**．圆，三角形，半平面，无限的带子，包含在一个角的两个夹边之间的平面部分，直线，射线或线段可以作为凸图形的例子．根据凸图形的定义直接推出，如果两个凸图形有公共部分，那么公共部分也是凸的．关于凸图形的公共部分有下面的赫利定理．

设在平面上给定了有限多个凸图形．如果其中任何三个凸图形包含有公共点，那么存在这样一个点，它同时属于所有这些图形．

首先我们研究在平面上给定四个凸图形的情况．将它们记作 F_1，F_2，F_3，F_4．根据定理的条件，图形 F_2，F_3，F_4 具有公共点 P_1．我们假设点 P_1 不属于图形 F_1，因为要不然的话我们就没有什么要证明的了．用类似的方法选取点 P_2，P_3，P_4（点 P_2 不属于图形 F_2，但属于其它三个图形，点 P_3 不属于图形 F_3，点 P_4 不属于图形 F_4）．因为图形 F_1 包含点 P_2，P_3，P_4 中的每一个点，所以它在包含其中任意两个点的同时，还包含连接它们的线段上的所有的点和由这些线段所围成的三角形 $P_2P_3P_4$（它可能蜕化成线段）．图形 F_2，F_3，F_4 完全包含三角形 $P_1P_3P_4$，$P_1P_2P_4$，$P_1P_2P_3$．但是对于四个三角形 $P_2P_3P_4$，$P_1P_3P_4$，$P_1P_2P_4$，$P_1P_2P_3$，总可以找到这样一个点 K，它属于其中的每一个三角形（并且在三角形内或它们的周界上）．这个断言无论是在点 P_1，P_2，P_3，P_4 分布在凸四边形的顶点上的情况（可以取四边形的对角线的交点作为所要的点），或是三个点分布在某一个三角形的顶点上，而第四个点包含在这个三角形内的情况（可以取第四个点作为点 K），或是所有四个点分布在一直线上的情况（作为点 K 可以取两个中间的点之中的任意一个或者连接它们的线段中的任意一点），都是正确的．于是我们证明了，总存在这样一个点 K，它属于四个三角形 $P_2P_3P_4$，$P_1P_3P_4$，$P_1P_2P_4$，$P_1P_2P_3$ 中的每一个，因而属于包含这些三角形的四个凸图形 F_1，F_2，F_3，F_4 中的每一个．于是赫利定理对于有四个凸图形的情况被证明了．

对于凸图形的个数大于 4 的情况，我们用完全数学归纳法来证明赫利定理．假设定理对 n 个凸图形是正确的．设凸图形 F_1，F_2，…，F_n，F_{n+1} 中的任何三个都包含有公共点．我们用 F 表示图形 F_n 和 F_{n+1} 的公共部分．所有 n 个图形 F_1，F_2，…，F_{n-1}，F 是凸的，而且其中任何三个图形都有公共点．事实上，如果我们所选取的三个图形中有一个是 F，那么 F_i，F_j，F 包含有公共点，因为根据已经证明的对于 4 个凸图形的赫利定理，图形 F_i，F_j，F_n，F_{n+1} 包含有公共点．因此，对 n 个凸图形 F_1，F_2，…，F_{n-1}，F 应用归纳假设，于是这 n 个图形包含有公共点 K．但这时凸图形 F_1，F_2，…，F_{n-1}，F_n，F_{n+1} 中的每一个包含点 K．于是我们证明了，如果赫利定理对 n 个图形是正确的，那么它对 $n+1$ 个图形也是正确的．因此，赫利定理对任意 n 个凸图形是正确的．

2) 156题的断言可直接由赫利定理推出．为此只要研究把本题所说的四个半平面的每一个补充为全平面的那些带有边界直线的半平面就行了．显然，四个补充的半平面不包含任何一个公共点，因为这样的点不可能是四个原来的半平面中的任何一个的内点．根据赫利定理，四个补充的半平面没有公共点，于是在它们之中可以找到三个不含有公共点的半平面．但是这意味着，和它们互补的原来的三个半平面覆盖整个平面．

二十一、1952年—1955年试题及解答

157．彼此没有公共内点的三个圆的圆心在一直线上．证明：如果第四个圆和所有三个圆都相切，那么它的半径不可能小于所有三个圆的半径．

【证法1】 假设 O_1，O_2，O_3 是三个已知圆的圆心，且设点 O_2 在点 O_1 和 O_3 之间．圆的半径用 r_1，r_2，r_3 表示．如果第四个圆在三个已知圆的某一个的里面，那么它不能和其它两个圆相切．某个已知圆和第四个圆相内切的情况也可以不考虑，因为这时第四个圆的半径大于和它内切的圆的半径，因此，它的半径不可能是四个圆的半径中最小的．这样一来，只需考虑第四个圆和三个已知圆相外切的情形就可以了（图181）．假设 O 是第四个圆的圆心，r 是它的半径．

$\triangle OO_1O_3$的边满足不等式

$$OO_1+OO_3\geqslant O_1O_3.$$

因为圆彼此外切．所以 $OO_1=r+r_1$，$OO_3=r+r_3$．根据本题条件，三个已知圆中的任何两个都没有公共内点，而线段 O_1O_3 包含中间的圆的直径和两个边上的圆的半径，且直径和两个半径不重叠．因此，$O_1O_3\geqslant r_1+2r_2+r_3$．这个关系式当中间的圆和一个或两个边上的圆相切时也成立．在后一种情况，不等式变成严格的等式．

由所得到的关系式我们得到不等式

$$r_1+2r+r_3\geqslant r_1+2r_2+r_3,$$

由此 $r\geqslant r_2$．这样一来，第四个圆的半径 r 不能小于所有的半径 r_1，r_2，r_3．

【证法2】 假设 A 和 B 是连接一个旁边的圆的点和另一个旁边的圆的点的线段中最短的线段的端点．显然，A 和 B 是两个旁边的圆与它们的连心线的交点（图182）．因为中间的圆

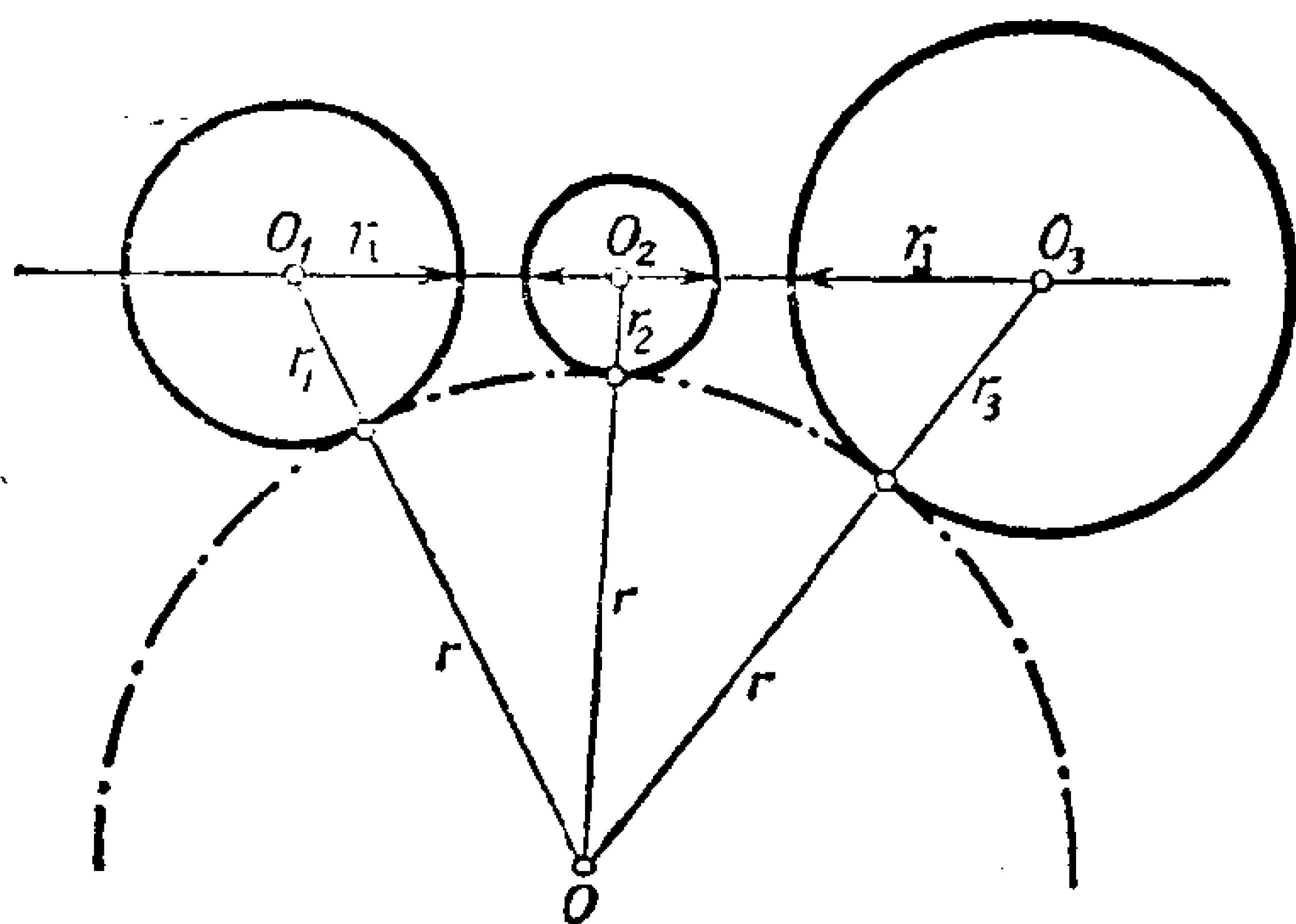


图 181

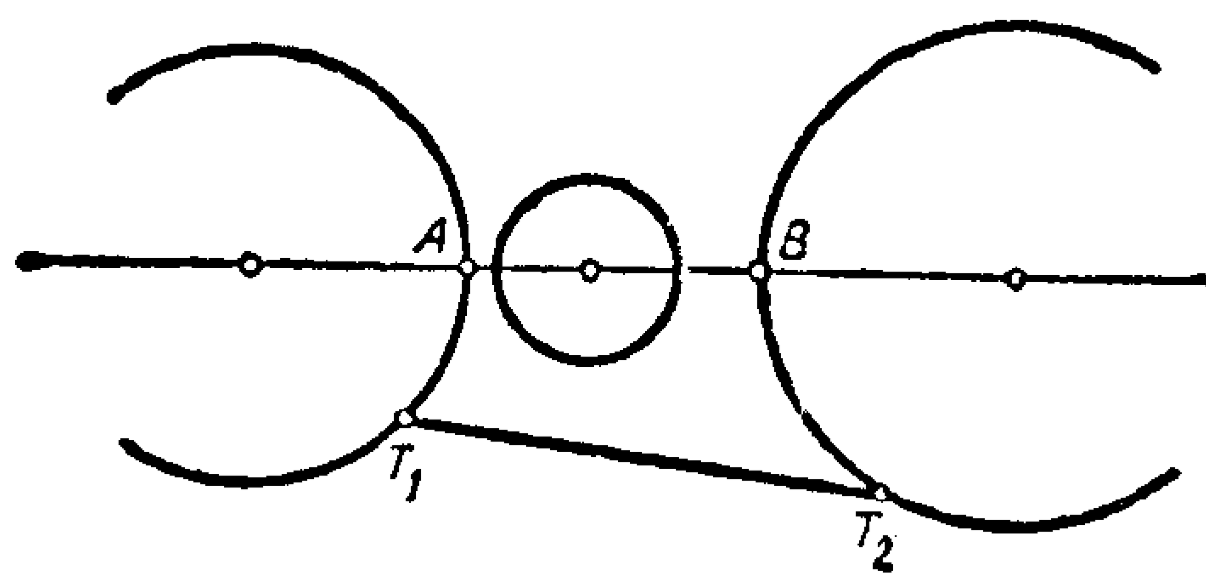


图 182

的直径在线段 AB 上，所以

$$AB\geqslant 2r_2.$$

假设 T_1 和 T_2 是第四个圆和两个旁边的圆的公共点．因为线段 T_1T_2 可以看作是第四个圆的弦，所以

$$2r \geqslant T_1T_2.$$

根据点 A，B 的取法，有

$$T_1T_2 \geqslant AB.$$

比较这些不等式，我们得 $2r \geqslant 2r_2$，或 $r \geqslant r_2$．从而证明了本题断言．

【证法 3】三个已知圆的连心线和中间的圆有两个交点，过这二交点作连心线的垂线（图183）．两个旁边的圆在这两根垂线所围成的带子的两侧．因为第四个圆和两个旁边的圆都有公共点，所以第四个圆超出了带子的每一根边界线．因此，第四个圆的直径不可能小于带子的宽度，也就是说，第四个圆的半径不小于中间的圆的半径．

【证法 4】我们假设和旁边两个圆各有一个公共点的第四个圆的半径小于中间的圆的半径．我们试图来求第四个圆的圆心．

以旁边的圆的圆心为圆心画两个新的圆，使得新圆的半径比原来的半径加长了 r_2．第四个圆的半径小于 r_2，所以它的圆心应该在每一个"扩大的"圆内，因为不然的话，第四个圆不能和旁边的圆相切（图184）．

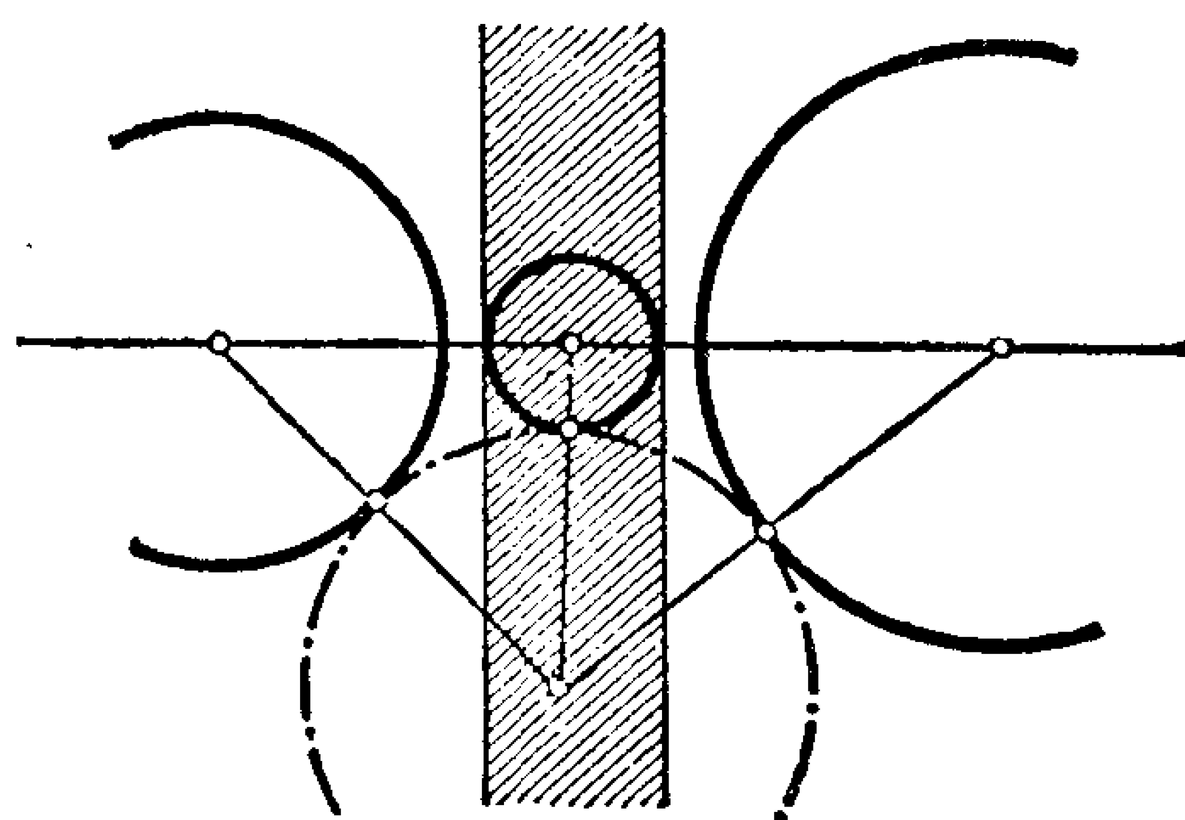


图 183

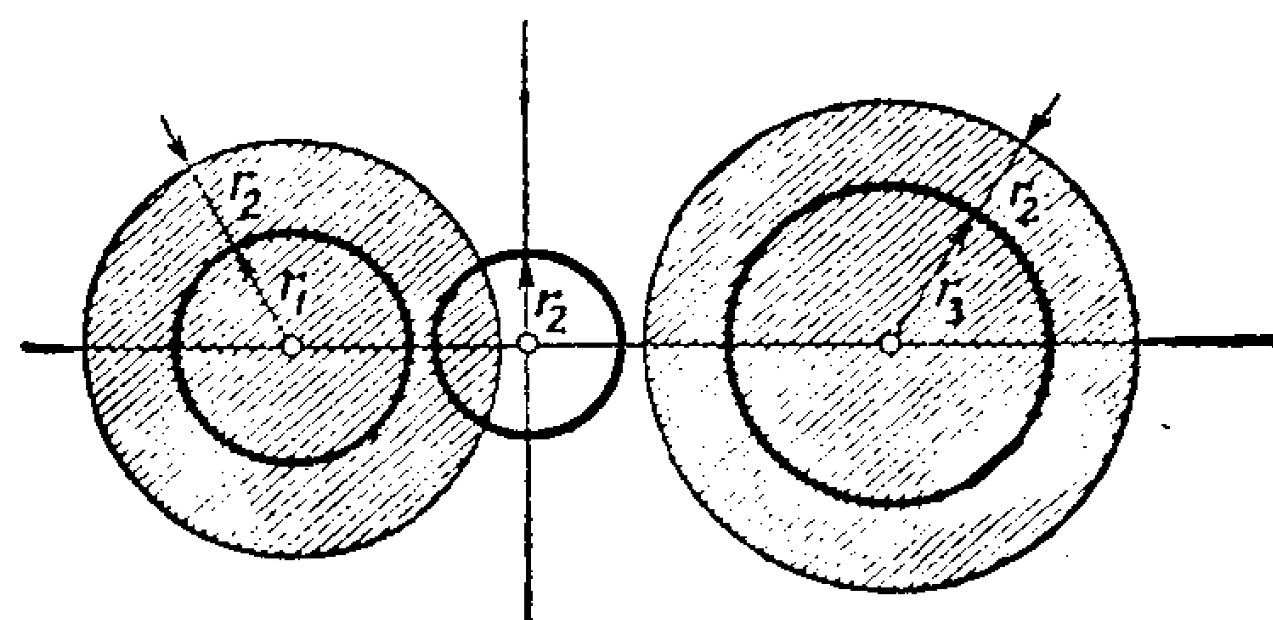


图 184

过中间圆的圆心向已知圆的连心线作垂线．因为每一个"扩大的"圆的半径和原来的圆的半径的差是中间的圆的半径，所以"扩大的"圆在所作的垂线的两侧．因此，扩大的圆不可能有公共的内点，从而半径小于 r_2 的第四个圆是不存在的．

【证法 5】连接第四个圆的圆心 O 和中间圆的圆心 O_2．$\angle OO_2O_1$ 和 $\angle OO_2O_3$ 的和等于180°．因此，两个角不可能都小于90°（图185）．

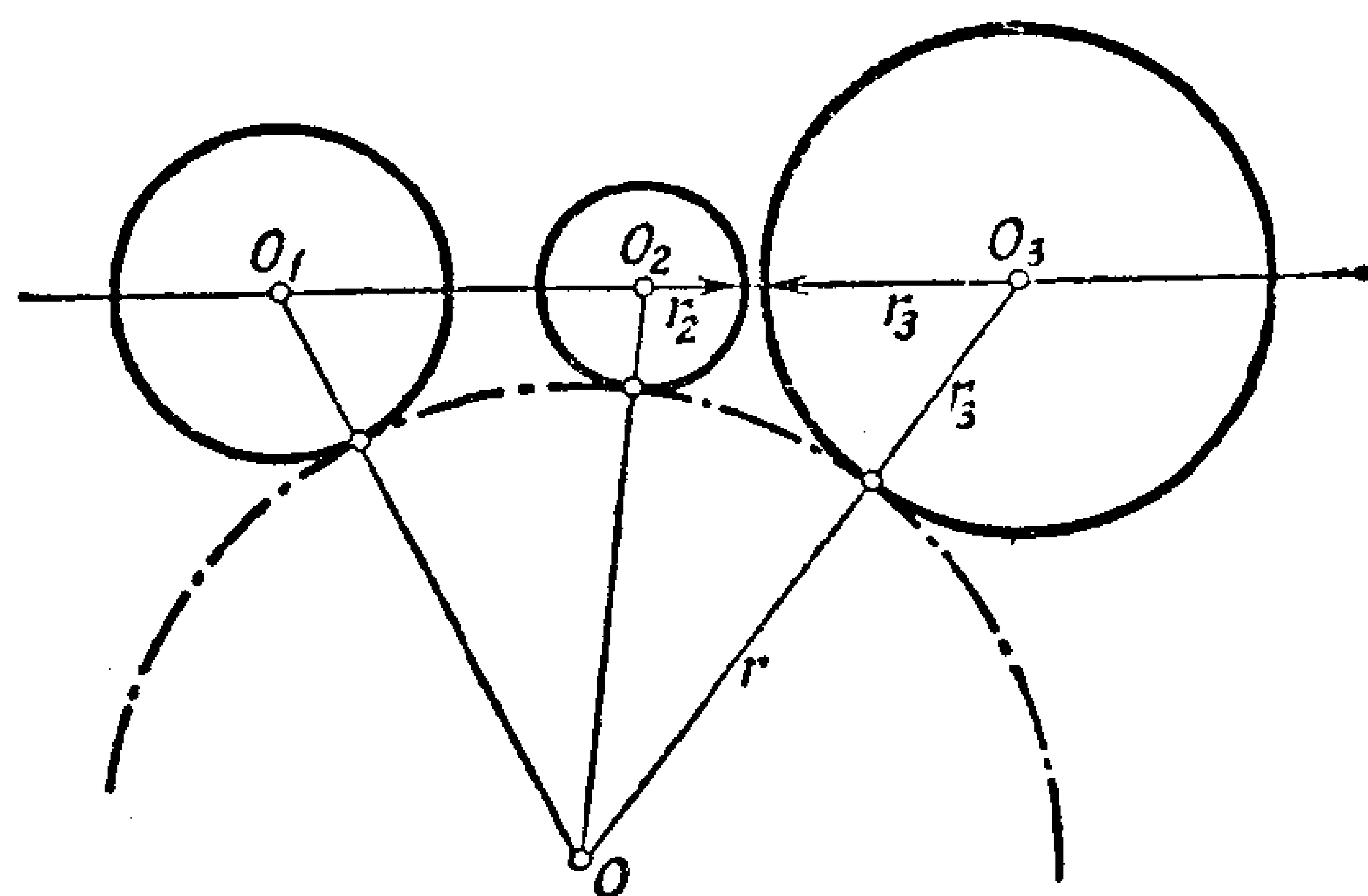


图 185

例如，设 $\angle OO_2O_3 \geqslant 90°$．这时 $\angle OO_2O_3$ 是 $\triangle OO_2O_3$ 中最大的角，于是 OO_3 是这个三角形中最大的边，由此

$$OO_3 > O_2O_3.$$

因为圆 O 和圆 O_3 有公共点，所以

$OO_3 \leqslant r + r_3$. 圆 O_2和圆 O_3没有公共内点，所以 $O_2O_3 \geqslant r_2 + r_3$. 这样一来

$$r + r_3 > r_2 + r_3,$$

由此 $r > r_2$. 因此，r 不能小于所有的 r_1，r_2，r_3.

本题还可作下面的推广.

假设彼此没有公共内点的三个圆的圆心在一直线上. 如果第四个圆和两个旁边的圆都有公共点，那么第四个圆的半径不可能小于中间的圆的半径，而且只有当中间的圆和两个旁边的圆都相切且第四个圆和中间的圆相重合时，第四个圆的半径才能等于中间的圆的半径.

158. 从整数 1 到$3n$中任意挑出 $n+2$ 个数. 证明：当 $n>1$ 时，从所挑出的数中，一定可以找到这样两个数，它们的差大于 n 而小于$2n$.

【证法 1】如果在挑出来的数中，没有$3n$这个数，那么可以将挑出来的每一个数加上同样一个数，使最大的数等于$3n$. 因为任意两个数的差仍然不变，所以只要研究所挑出来的数中有一个是$3n$的情况就可以了. 加上这一假设后，用下面的方法来论证.

如果在所挑出来的数中，有一个数是数 $n+1$，$n+2$，…，$2n-1$ 中的某一个，那么$3n$和这个数的差将大于 n 而小于$2n$，满足本题断言.

如果在所挑出来的数中，没有任何一个数是 $n+1$，$n+2$，…，$2n-1$ 中的某一个，那么这意味着，不同于$3n$的 $n+1$ 个数是从数对

$$(1,2n),\quad (2,2n+1),\quad (3,2n+2),\cdots\cdots,\quad (n,3n-1)$$

中的数里挑出来的. 因为数对总共只有 n 对，而挑出的数有 $n+1$ 个，所以必定从某一个数对中挑了两个数. 因此，在这种情况下，在所挑出的 $n+2$ 个数中，有两个数的差等于$2n-1$，即它们的差大于 n 而小于$2n$，因为当 $n>1$ 时，不等式$2n-1>n$是成立的.

【证法 2】将前$3n$个自然数按上升的次序放在一个圆圈上（当 $n=4$ 时，这些数放在一般的钟的数字上）.

对于这样两个数：如果从小数往大数走，弧长超过圆周的 $\frac{1}{3}$ 而小于圆周的 $\frac{2}{3}$，本题断言是成立的. 若某一段弧大于 $\frac{1}{3}$ 圆周而小于 $\frac{2}{3}$ 圆周，那么和它互补的弧（两段弧之和构成整个圆周，我们叫它们互补）也大于 $\frac{1}{3}$ 圆周而小于 $\frac{2}{3}$ 圆周. 因此，若这两个数之间的两段弧都大于 $\frac{1}{3}$ 圆周，那么本题断言成立.

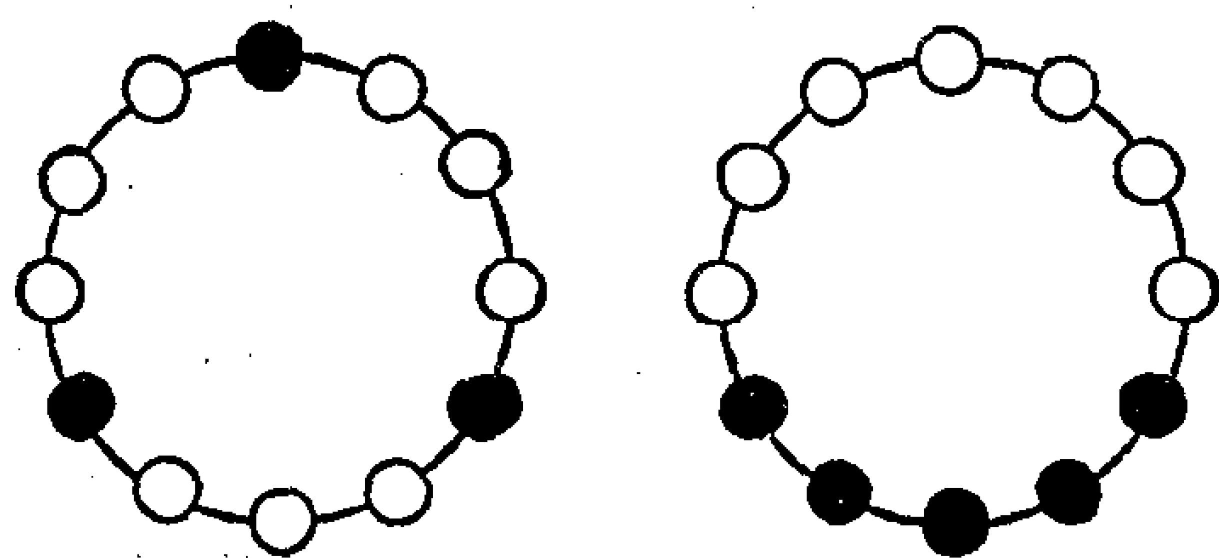
根据上面的说明，我们可将原题用下面的方式来叙述. 将$3n$个点等距离地分布在一个圆周上. 从这$3n$个点中任意挑出 $n+2$ 个点. 证明：在所挑出来的点中，总可以找到这样两个点，使得连接这两个点的两段弧都大于圆周的三分之一.

我们来研究从$3n$个点中用怎样的办法可以挑选出这样一个子集合，使它的任意两个点不能把圆周分成都大于 $\frac{1}{3}$ 圆周的两段弧. 不能选取的点所分布的位置可用下面的禁规除去：

不能在长为 $\frac{1}{3}$ 圆周的圆弧内选取点，如果这个弧的补弧的中点已被选取了的话.

如果某圆弧除端点外，不包含子集合的点，我们将该圆弧叫做自由弧. 根据上面所说的禁规，自由弧中有一个应该不小于圆周的$\frac{1}{3}$. 从禁规还可推出：自由弧不可能既大于圆周的

$\frac{1}{3}$又小于圆周的$\frac{2}{3}$（不然的话，弧的端点将与禁规相违）. 这样一来，子集合的点的选取只允许下面两种情况：最大的自由弧或者等于圆周的$\frac{1}{3}$，或者不小于圆周的$\frac{2}{3}$.


图186

如果最大的自由弧等于圆周的$\frac{1}{3}$，那么子集合只能有三个被选取的点（图186），其中的两个点是这个自由弧的端点. 在这个自由弧的补弧（长为$\frac{2}{3}$圆周）中，除了中点以外，不能再有所选取的点，因为这个弧的端点是选取的点——长为$\frac{1}{3}$圆周的自由弧的端点. 这个补弧的中点一定是选取的点，因为要不然的话，$\frac{1}{3}$的圆周不是最大的自由弧.

如果最大的自由弧不小于$\frac{2}{3}$圆周，那么所选取的点都分布在长为$\frac{1}{3}$圆周的圆弧上，包括它的端点在内. 因为在$\frac{1}{3}$圆周长的弧中总共只包含 $n+1$ 个点，所以在这种情况下，所挑的点不超过 $n+1$个. 当我们把这填满$\frac{1}{3}$圆周的 $n+1$ 个点都选取出来时，也不会违反禁规.

因为$n+2>n+1$，且当$n>1$时，数$n+2>3$，所以在不违反禁规的条件下，是不能选出 $n+2$ 个点的，这就证明了本题的断言.

【证法 3】当 $n=60$时，本题可以变成下面较有趣的形式.

图书馆每天12点开馆，15点闭馆. 进馆要有一分钟的间隔. 第一个读者可以正好12点入馆，最后一个读者可以正好在14点59分入馆. 读者只能一个一个入馆. 读者入馆一小时后都要在书上睡着，而且刚好睡一小时，同时只有闭馆才不影响他的睡觉. 当任何一个读者睡着的时候，规定停止入馆. 证明：在这种奇怪的规则下，一天之内不能有62个读者到过图书馆.

去掉罗嗦的细节，我们不难发现，它就是158题.

如果当第一个读者出现的时候，图书馆的工作人员把钟的指针往后拨到12点上，显然他这样做是为了使得在一天之内让尽可能多的读者到图书馆来. 为了避免工作人员的奔走，我们假设最早出现在图书馆的第一个读者正好是12点入馆的. 必须区分下面三种情况.

我们研究第一种情况. 恰好在13点和14点有一个读者入馆. 显然，在这一天，所有其他的读者不能到图书馆去. 事实上，从12点到13点前，不能有任何读者入馆，因为这时入馆的读者在14点时正好睡着了而不让任何人入馆，以免吵醒他们. 12点入馆的读者从13点到14点前正在睡觉，13点入馆的读者从14点到15点前正在睡觉. 因此，在这一天之内，到过图书馆的总共只有 3 人.

我们研究第二种情况. 假设13点时有一读者入馆，但在14点时无人入馆. 显然，13点以后没有读者入馆：12点入馆的读者从13点到14点在睡觉，13点入馆的从14点到15点在睡觉. 因此，在这种情况下，在这一天到过图书馆的读者都是从12点到13点之间入馆的，所以，在

这一天到过图书馆的不超过61人.

最后我们研究第三种情况. 假设在13点时无人入馆. 我们挑出13点以前入馆的最后一个读者（可能是12点入馆的第一个读者）. 在所挑出的这个读者入馆以后的两小时内没有人入馆，因为他是13点前入馆的最后一个读者，13点时没有人入馆，从13点开始到他入馆以后两小时内有人睡着了（从13点到14点睡着的是12点入馆的读者，然后是我们挑出的读者，如果他不是第一个入馆的读者的话）. 这样一来，在180个可以入馆的时刻错过了119个. 因此，在这种情况下，一天之内到过图书馆的不超过61人.

于是可以断定，在所有的情形，一天之内到过这个有着奇怪规则的图书馆的读者不超过61人. 显然，上面的论证在下面的情形仍然有效：如果一小时不是60分钟，而是n分钟的话. 唯一应当注意的是：用数$n+1$来代替61，且$n+1$不得小于3，即有不等式$n>1$. ★

§71. 有限图的完全子图

由本题断言推出：

对于任何一个自然数$n>1$，存在一个有$3n$个顶点的图，在这个图中，任何3个顶点中有2个顶点有边连接，而且不含有$n+2$个顶点的完全子图.

这个事实在§68中提到过. 具有所要求的性质的图可以这样作. 沿着圆周彼此等距离地放上$3n$个点——图的顶点（它们用1到$3n$的连续自然数来编号），而且每一个顶点和n个前面的顶点以及n个后面的顶点用边连接. 两个顶点之间没有用边连接的仅仅是那些顶点，它们的编号之差大于n而小于$2n$. 由158题的断言推出，在任何$n+2$个顶点中总可以找到两个顶点，它们之间没有边连接. 另一方面，在任何三个顶点中，总可以找到两个顶点是有边连接的，因为如果点的编号a,b,c按上升的次序排列（即$a<b<c$）且$c-a<2n$，那么差$b-a$和$c-b$中总有一个小于n.

159. 假设$\frac{1}{2}<\lambda<1$，在三角形ABC的边BC，CA和AB上取线段

$$BA_1=\lambda\cdot BC,\quad CB_1=\lambda\cdot CA,\quad AC_1=\lambda\cdot AB.$$

证明：三角形$A_1B_1C_1$的周长不超过三角形ABC的周长乘上λ.

【证明】 通过点A_1,B_1,C_1作直线和边AB,BC,CA平行，这些直线和三角形各边的交点记作（以同样的次序）B_2，C_2，A_2（图187）. 因为$\lambda>\frac{1}{2}$，所以点B_2,C_2和A_2在线段CB_1，AC_1，BA_1上.

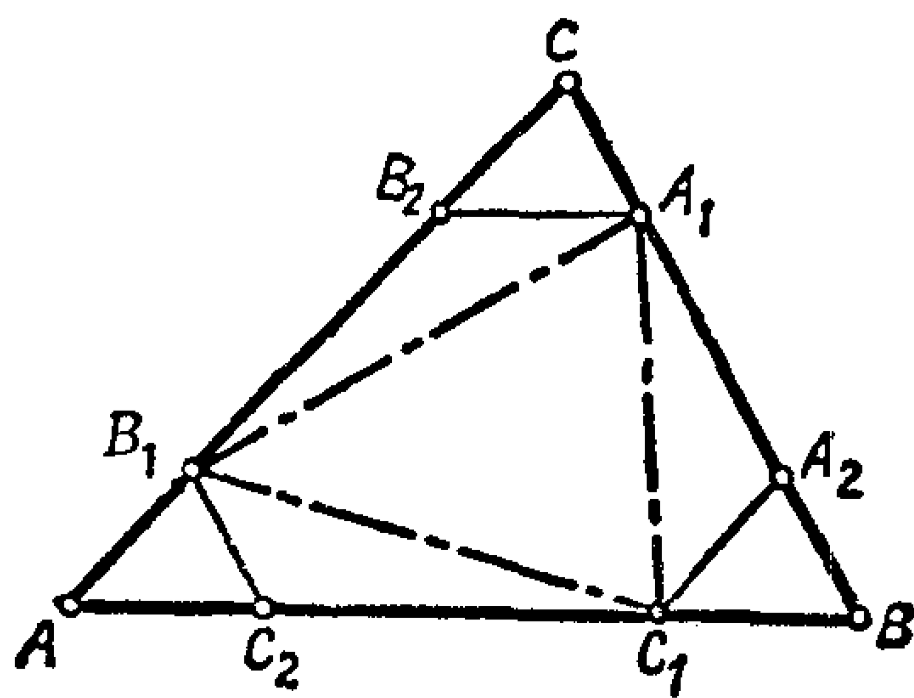


图 187

$\triangle A_1B_1C_1$的每一个边都小于六边形$A_1B_2B_1C_2C_1A_2$的两个边之和. 因此，$\triangle A_1B_1C_1$的周长小于六边形$A_1B_2B_1C_2C_1A_2$的周长，所以我们只要证明这个六边形的周长小于或等于原三角形的周长的λ倍就行了.

因为$A_1B_2\parallel AB$，$B_1C_2\parallel BC$，$C_1A_2\parallel AC$，所以$\triangle AC_2B_1$，$\triangle C_1BA_2$，$\triangle B_2A_1C$都和$\triangle ABC$相似.

由等式

$$A_1C=(1-\lambda)BC,\quad B_1A=(1-\lambda)CA,\quad C_1B=(1-\lambda)AB$$

可知，$\triangle AC_2B_1$，$\triangle C_1BA_2$，$\triangle B_2A_1C$全等．于是$A_1B_2=C_2A$，$B_1C_2=A_2B$，$C_1A_2=B_2C$，因而六边形$A_1B_2B_1C_2C_1A_2$的周长等于线段AC_1，BA_1，CB_1之和，即原三角形ABC的周长的λ倍，于是我们便得到了本题断言．

160．给定一自然数n．由小于n的不同的自然数来构成两组数❶．证明：如果两组数的总个数不小于n，那么从每一组可以挑出一个数，它们的和等于n．

【证明】我们来构造一个新的数组，它的数是由第二组的数被n减所得到的差．包含在第一组中的某一个数必定出现在新构造的数组中，因为两组数的总个数不小于n，而由自然数1，2，…，$n-1$中不可能挑出n个不同的数．在新组中出现的第一组的数和第二组相应的数之和为n，这就是所要证明的．

161．假设n是自然数，d是$2n^2$的正约数．证明：n^2+d不是完全平方．

【证法1】假设$2n^2=kd$，这里k是正整数（因为根据本题条件，d是能除尽$2n^2$的自然数）．如果n^2+d是整数x的平方，那么

$$x^2=n^2+d=n^2+\frac{2n^2}{k},$$

且

$$k^2x^2=n^2(k^2+2k).$$

但是后一个等式是不可能的．事实上，它的左边是整数的平方，而它的右边，仅仅是第一个因子是完全平方，第二个因子不可能是整数的平方，因为它满足不等式

$$k^2<k^2+2k<(k+1)^2,$$

从而它介于两个连续整数的平方之间．

在解答本题时，我们利用了如下事实：如果a，b，c是自然数，且$a^2=b^2c$，那么c应该是某一个整数的平方．为了证明这个断言的正确性，我们利用将自然数分解成素数的乘幂之积的标准分解式（见§7）．在数a^2和b^2的分解式中，所有的素数的指数都是偶数，因为在平方时，指数都增加一倍．用b^2去除a^2时，在所得到的商的分解式中，所有的素数的指数仍然是偶数．因此，c是某一个数的平方，这就是所要证明的．

【证法2】还设$2n^2=kd$．如果本题断言不对，那么存在这样一个数x，使

$$\frac{k+2}{k}=\frac{n^2+d}{n^2}=\frac{x^2}{n^2}.$$

左边的分数的分子分母彼此相差数2，当约去分子分母的公因子时，这个差只能减少．右边的分数在约去分子分母的公因子后化为$\frac{p^2}{q^2}$的形式，其中p和q是自然数，且$p\neq q$，因为$n^2+d\neq n^2$．分数p^2/q^2的分子和分母的差不小于3．事实上，它可以表示成$p^2-q^2=(p+q)(p-q)$，因为$p\neq q$，所以$p+q\geqslant 3$，而$p-q\geqslant 1$．因此上面所写的等式是不可能实现的．

162．在等边凸六边形$ABCDEF$中，顶角$\angle A$，$\angle C$，$\angle E$之和等于顶角$\angle B$，$\angle D$，

❶ 在每一组中，各个数不同．但在两个组中，允许有相同的数．——中译者注．

$\angle F$之和．证明：相对的顶角$\angle A$和$\angle D$，$\angle B$和$\angle E$，$\angle C$和$\angle F$相等．

【**证法 1**】我们从证明下面的引理入手：

如果$\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$是正角，$\alpha+\beta+\gamma=180°$，$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=180°$，此外，

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin\alpha_1 : \sin\beta_1 : \sin\gamma_1,$$

那么

$$\alpha=\alpha_1,\quad \beta=\beta_1,\quad \gamma=\gamma_1.$$

我们作两个三角形，一个三角形的角是α, β, γ，另一个三角形的角是$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$．根据正弦定理，任一三角形的角的正弦比等于它的边的比．因为根据条件，角α, β, γ的正弦比等于角$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$的正弦比，所以，所作的两个三角形相似，从而它们对应的角相等．于是，引理得证．

假设给定的六边形的$\angle A$，$\angle C$，$\angle E$是$2\alpha_1$，$2\beta_1$，$2\gamma_1$（图188）．六边形的内角和为$720°$，因为根据本题条件，顶角$\angle A$，$\angle C$，$\angle E$之和等于顶角$\angle B$，$\angle D$，$\angle F$之和，所以$2\alpha_1+2\beta_1+2\gamma_1=360°$，或$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=180°$．如果$a$是六边形任一边之长，那么$\triangle BDF$的边等于$2a\sin\alpha_1$，$2a\sin\beta_1$，$2a\sin\gamma_1$．如果$\triangle BDF$的角用$\alpha$，$\beta$，$\gamma$来表示，那么根据正弦定理

$$BF : BD : DF = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma,$$

由此

$$\sin\alpha_1 : \sin\beta_1 : \sin\gamma_1 = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

利用引理便可得到：$\alpha=\alpha_1$，$\beta=\beta_1$，$\gamma=\gamma_1$．因此，六边形的对角相等，因为，例如顶角$\angle D$等于角α与β_1的余角以及γ_1的余角之和，即$\alpha+(90°-\beta_1)+(90°-\gamma_1)=2\alpha_1$，而顶角$\angle A$也等于$2\alpha_1$．

【**证法 2**】作三个对角线将六边形切去三个等腰三角形（图189）．根据本题条件，这三

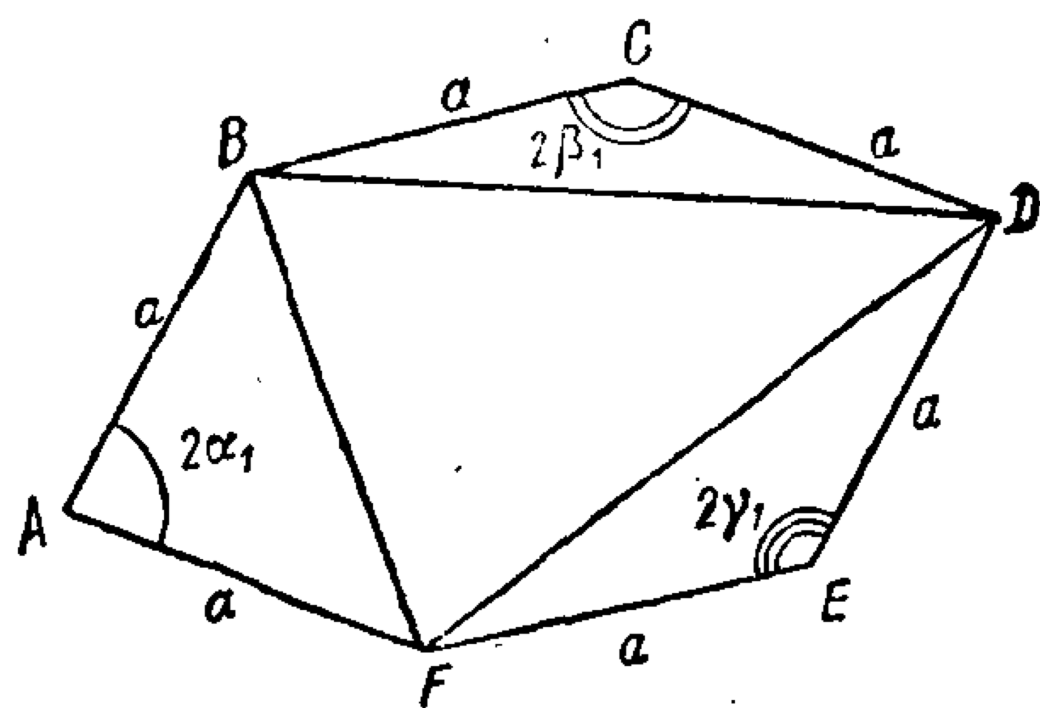


图　188

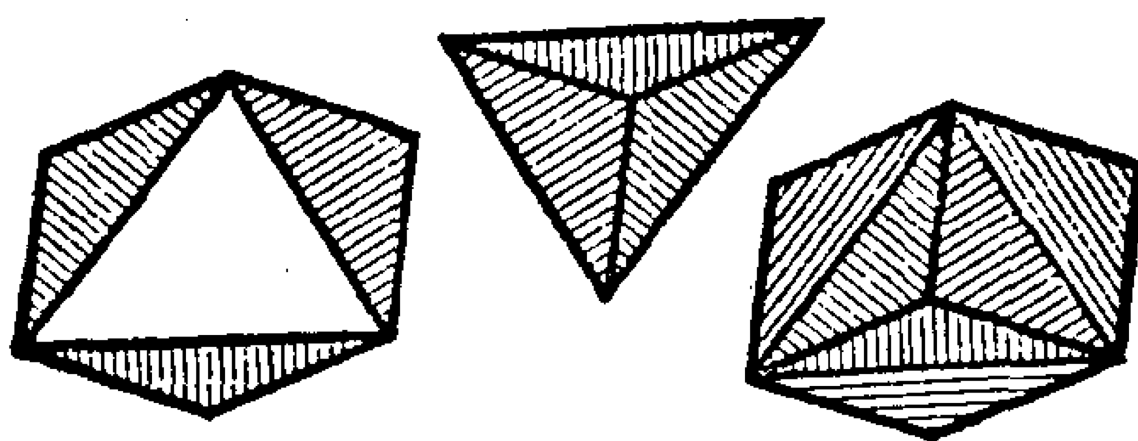


图　189

个三角形的底边所对的顶角之和为360°．因此，由这三个等腰三角形可以构成一个新的三角形．因为它的边和等腰三角形的底边相等，所以新的三角形和六边形切去三个等腰三角形后所剩下的三角形全等．这样一来，这些等腰三角形可以完全填满原来的六边形所剩下的三角形的内部而不留一点空白．因此，六边形$ABCDEF$可以分成三个菱形（每一个菱形由两个等腰三角形组成，它们关于里面的三角形的边对称）．这意味着，六边形的对边平行，从而对角相等．

从图190可以看到，证法 2 可以证明162题的一个推广：

如果凸六边形的对边彼此相等，此外，六边形的三个角（其中任何两个角都没有共同的

夹边）之和等于六边形的另外三个角之和，那么六边形的对角相等.

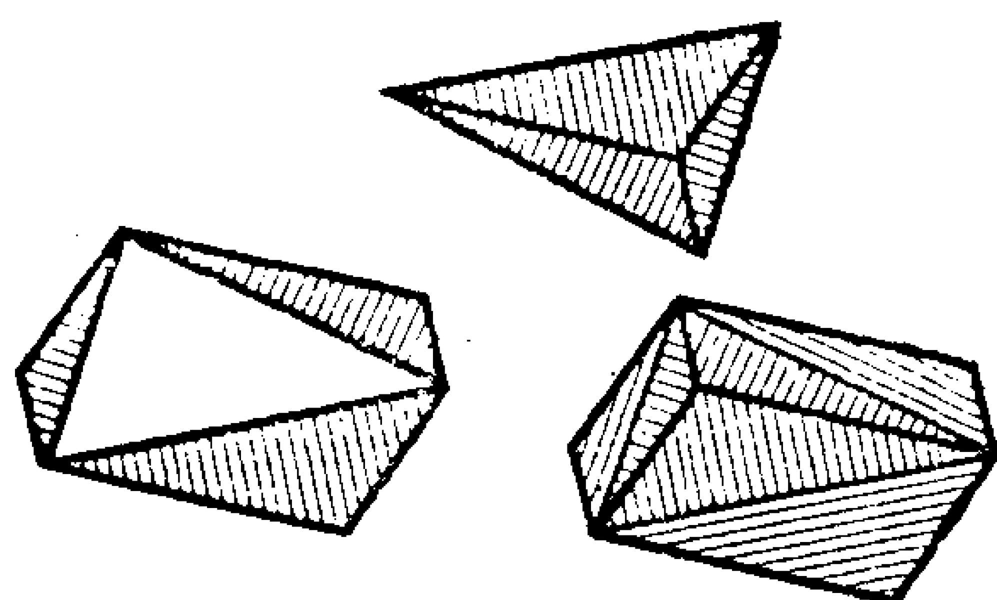


图 190

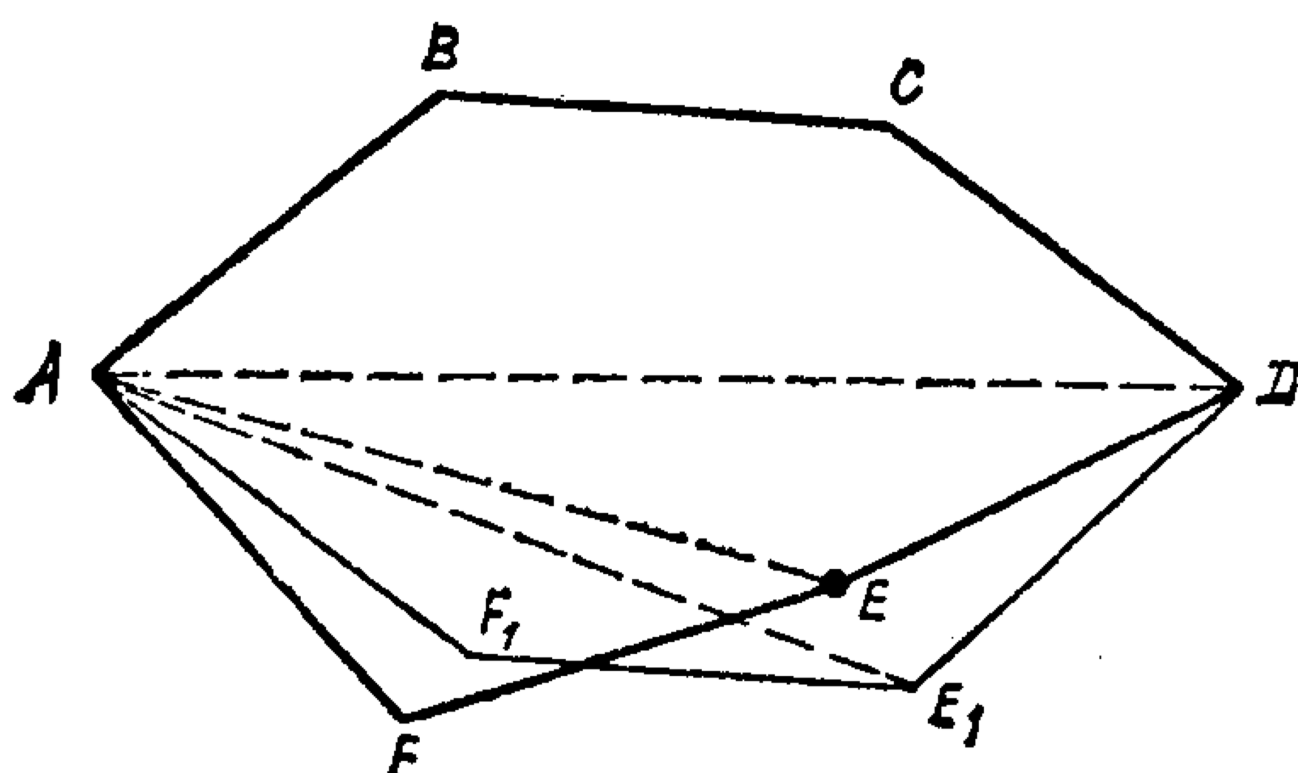


图 191

如果利用证法 2 的方法，可以证明这个命题而不会产生任何困难.

【证法 3】假设给定一个凸六边形 $ABCDEF$，它的对边彼此相等，其角满足本题条件. 我们作一个四边形 DE_1F_1A，使它和四边形 $ABCD$ 关于对角线 AD 的中点对称(图191)，于是我们得到一个具有对称中心的六边形. 因为由对称性，这个六边形的对角相等，所以它既满足本题条件，又满足它的结论.

我们证明：所作的六边形和给定的六边形相重合. 如果不重合，譬如说 $\angle CDE<\angle CDE_1$，那么由 § 38的定理有 $AE<AE_1$. 再对 $\triangle AFE$ 和 $\triangle AF_1E_1$ 应用这个定理得到 $\angle EFA<\angle E_1F_1A$. 但这时两个和数

$$\angle ABC+\angle CDE+\angle EFA$$

和

$$\angle ABC+\angle CDE_1+\angle E_1F_1A$$

不能同时等于360°.

【证法 4】给定六边形的对边都相等，任意三个没有公共夹边的角之和为360°. 把三个和已知六边形全等的六边形的这三个角的顶点放在一起，我们可以使它们的三个角组成一个周角. 利用图192中所用的表示法可以断定：四边形 $A_1A_2C_2C_1$ 和 $A_2A_3C_2C_1$ 是平行四边形，因为由于六边形全等，故四边形的两组对边相等. 这样一来，顶点 A_1，A_2，A_3 在一直线上. 由六边形全等还可推出，$\angle B_1A_1A_2=$ $=\angle B_2A_2A_3$. 这时 $A_1B_1\parallel A_2B_2$. 从而证明了六边形的对边平行，这意味着它的对角相等.

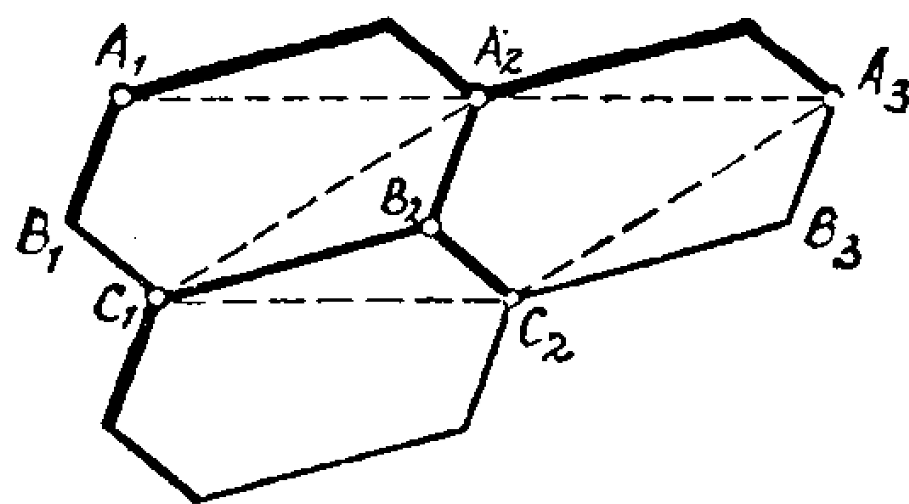


图 192

【证法 5】本题断言可以作下面的推广：

如果凸六边形 $ABCDEF$ 的对边相等，其中某一角小于它的对角，那么，在 $\angle A+\angle C+$ $+\angle E$ 和 $\angle B+\angle D+\angle F$ 这两个和中，包含小角的和比另一个和小.

假设在满足本题条件的六边形 $ABCDEF$ 中，$\angle A<\angle D$（图193）. 因为在 $\triangle FAB$ 和 $\triangle CDE$ 中，这两个角的夹边对应相等，所以 $FB<EC$，而且在 $\triangle FAB$ 中，其它两个角之和比 $\triangle CDE$ 的其它两个角之和大. 在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle EBC$ 中，两组边对应相等，而 $\triangle BEF$ 的第三边比 $\triangle EBC$ 的第三边小，因此 $\angle BEF<\angle EBC$，而且在 $\triangle BEF$ 中，其它两个角之和比

$\triangle EBC$的其它两个角之和大．逐项相加所得到的不等式将会得到：$\angle A$，$\angle C$，$\angle E$的和小于六边形的其它三个顶角之和．

【**证法 6**】我们来弄清楚，如果六边形的对边相等，那么它的对角之间有什么关系．

如果在这种六边形中，有两个相对的顶角相等，那么其它所有相对的顶角彼此都相等．事实上，例如若$\angle A=\angle D$，那么$\triangle FAB$和$\triangle CDE$全等，于是$FB=EC$．这样一来，$\triangle BEF$和$\triangle EBC$全等，且六边形$ABCDEF$有对称中心．

图 193

由上面的证明推出，在这种六边形中，相对的顶角或者是所有的都彼此相等，或者是所有的彼此都不相等．这样一来，在这种六边形中，那怕只有一个角和它的对角不等，那么在$\angle A$，$\angle C$，$\angle E$和$\angle B$，$\angle D$，$\angle F$这两组角中，至少有一组的两个角小于它们的对角．我们来证明：第三个角也小于它的对角．

我们利用下面的事实：如果两个凸四边形的对应边彼此相等，且两个对应的角满足不等式$\alpha<\alpha_1$，那么它们的两个对角也满足不等式：$\beta<\beta_1$．如果我们作对角线把四边形分成两个三角形（图194），那么这个断言是很显然的．事实上，因为$\alpha<\alpha_1$，所以角α_1所在的四边形的对角线较大，由此可得$\beta<\beta_1$（在证法 3 中，已对特殊情况引证过；还可参看§38）．

现在我们已经具备了所有必要的条件来证明原问题的断言：如果$\angle A<\angle D$，$\angle C<\angle F$，那么对于四边形$ABEF$和$BCDE$应用上面所证明过的断言，我们得到：构成$\angle E$的两个四边形的顶角小于构成$\angle B$的两个角（图195）．因此，$\angle E<\angle B$．

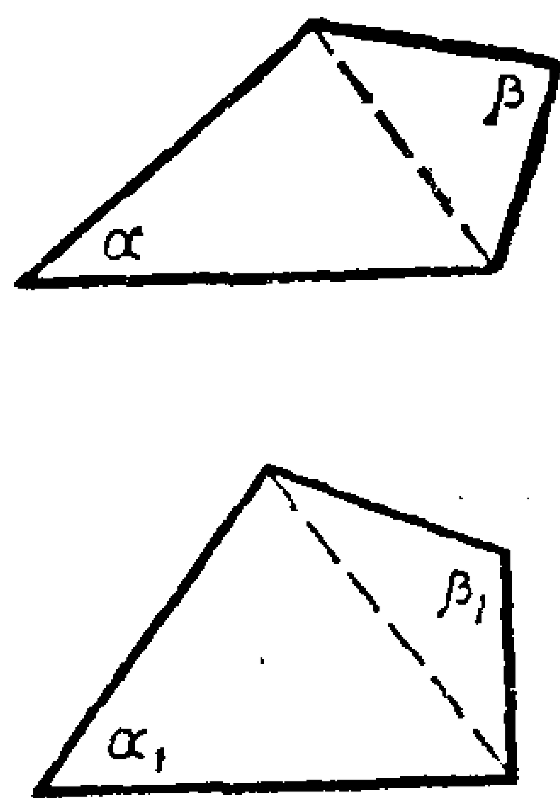


图 194

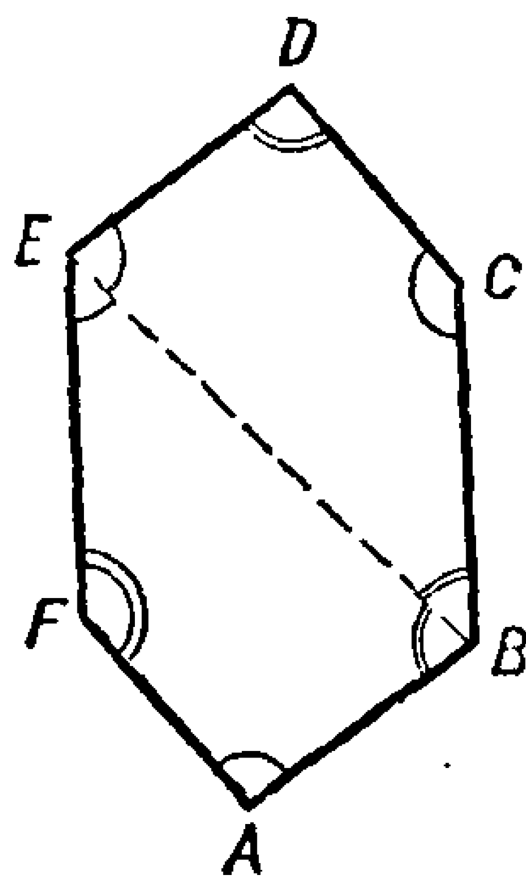


图 195

这样一来，**如果凸六边形的对边彼此相等，那么$\angle A$，$\angle C$，$\angle E$或者都分别等于$\angle B$，$\angle D$，$\angle F$，或者一组中的每一个角都小于它的对角．**

于是我们证明了比原题断言更一般的定理．

在最后一个证法中，我们利用的仅仅是欧氏几何中与平行线公理无关的定理．这就证明了本题的断言及在证明末尾所叙述的比较一般的定理即使是在罗巴切夫斯基一波约依的非欧几何（见§26）中也是成立的．

163．假设在凸四边形$ABCD$中，

$$AB+BD\leqslant AC+CD.$$

证明：边 AB 小于对角线 AC．

【证法 1】 与本题结论相反，我们假设 $AB \geqslant AC$，因此，点 A 或者在线段 BC 的中垂线上，或者在这个中垂线的点 C 所在的那一侧（图196）．因为四边形 $ABCD$ 是凸的，所以顶点 D 与 C 位于直线 AB 的同侧，D 与 A 位于直线 BC 的同侧，D 与 B 位于直线 AC 的异侧．因此，点 D 在从角 ABC 截去 $\triangle ABC$ 后所得到的区域内（在图196中，点 D 所在的区域划了阴影线）．这个区域完全在线段 BC 的中垂线的顶点 C 所在的那一侧，因为在这个区域的所有边界点中，只有点 A 可能在中垂线上．这样一来，点 D 和点 C 属于同一个半平面，因此 $BD > CD$．把所得到的这个不等式和我们一开始所假设的不等式 $AB \geqslant AC$ 加起来，我们得到不等式 $AB + BD > AC + CD$，与本题条件相违．这就证明了本题断言．

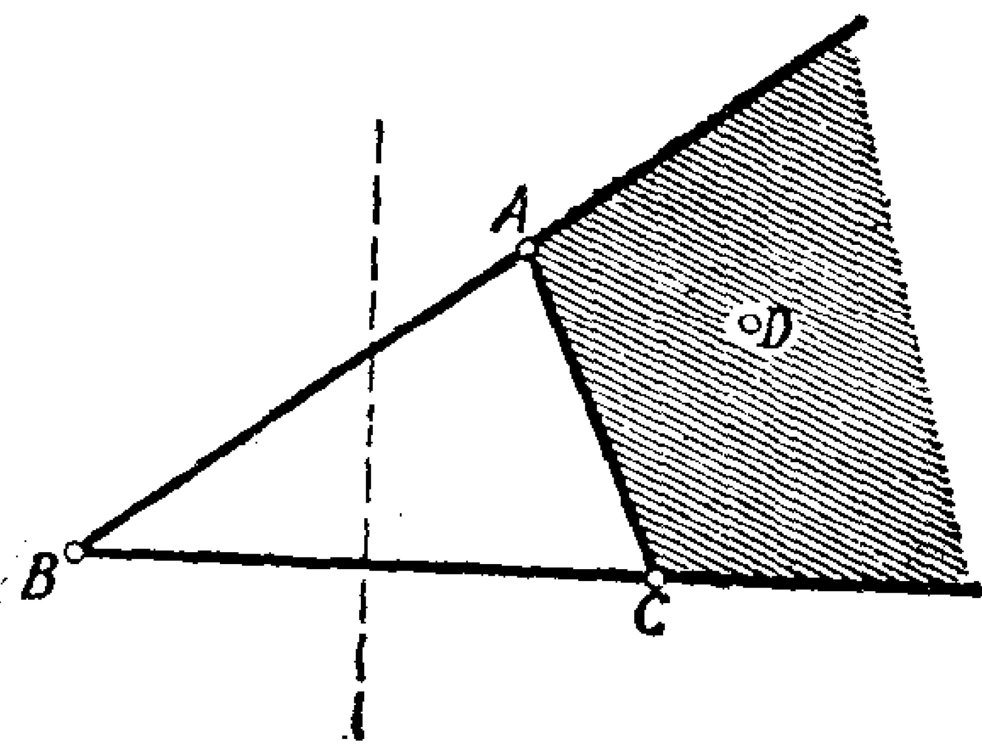


图 196

【证法 2】 我们知道（如果不知道，那么可以从三角形不等式导出），凸四边形的对边之和小于它的对角线之和．因此，在四边形 $ABCD$ 中，

$$AB + CD < AC + BD.$$

根据本题条件，

$$AB + BD \leqslant AC + CD.$$

将两个不等式相加，我们得到 $2AB < 2AC$，这就是所要证明的．

164．证明：若某立体被平面截得的所有截面都是圆，那么这个立体是球．

【注解】 在证明本题之前，我们作某些注解：

1） 本题断言最简捷的证明如下．我们研究给定立体的最大的弦．通过这个弦的任何平面截这个立体所得到的截面都具有圆的形状，这些圆的直径和我们所取的弦相重合，因为要不然的话，这些圆——因而立体的本身，将有更大的弦．这样一来，给定的立体具有球的形状，它的一条直径和我们所取的弦相重合．

我们的论证是不完全的，因为没有证明最大的弦是存在的．严格的证明要利用高等数学的工具．

2） 必须精确说明，应该怎样理解本题条件中所说的“某个立体”这句话．

我们把空间点的任一总体叫做点集合（或简单地叫集合）．我们利用集合的概念来比较严格地叙述本题的条件．

假设给定一个集合，它含有一个以上的点，且具有下面的性质：如果某一个平面包含这个集合的点多于一个，那么这些点填满了这个平面上的一个圆（即圆周本身以及圆周内的平面部分）．证明：给定的点集合是一个球（即球面本身以及球面内的空间部分）．

如果从本题这个比较严格的叙述方式出发，那么下面所作的证明是完全的．

【证法 1】 假设 C 是立体和某一平面相交所得到的圆 k 的圆心（图197）．由点 C 向圆 k 的平面作垂线，且过这条垂线作任一

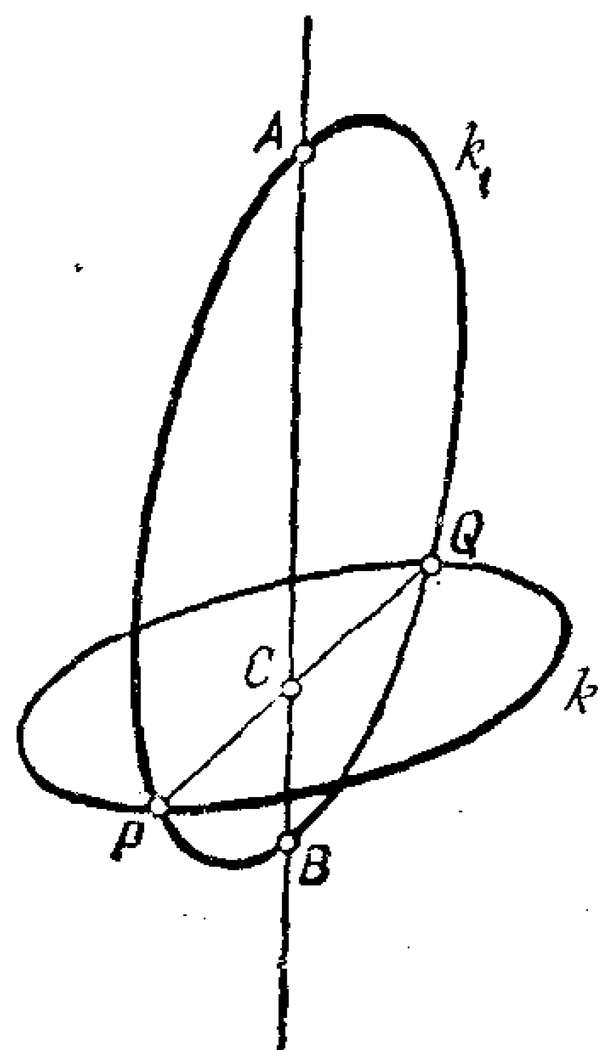


图 197

平面．假设这个平面和圆 k 的边界交于点 P 和 Q，和立体本身交成圆 k_1. 因为 PQ 是圆 k_1 的弦，所以它的中垂线（也就是我们前面所作的圆 k 的平面的垂线）包含圆 k_1 的直径 AB．由于切割平面是任意的，而点 A 和 B 限定了属于这个平面的线段 AB，因而点 A 和 B 在这个立体的边界上，所以可以断言：通过直线 AB 的任一平面和立体的截面都具有以 AB 为直径的圆的形状．这样一来，立体是以 AB 为直径的球．

【证法 2】假设 k 是立体的一个截面，它具有圆的形状(图198)．设 Q 是它的一个内点，P 是由点 Q 出发而不在截面 k 上的射线和立体表面的交点，G 是通过点 P 的球面，且圆 k 的边界在这个球面上．通过直线 PQ 的平面和圆 k 的边界相交于点 A 和 B（因为这个平面包含圆 k 的内点 Q），此外，这个平面和球面 G 交成某一个圆周．这个圆周和立体被通过直线 PQ 的平面所截得的圆周重合，因为它们有三个公共点 P，A，B．因此，立体和球面 G 被任一平面相截，所得的截面相重合．

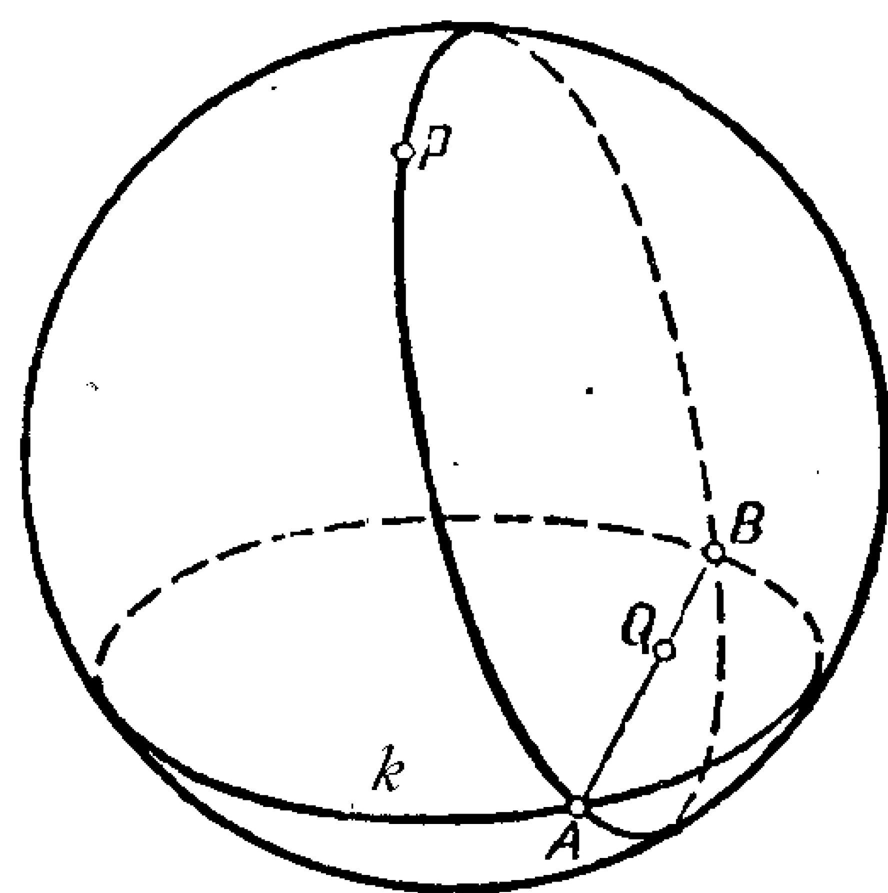


图 198

165．每一个参加循环赛的人和所有其余参加比赛的人都要比赛一次，而且任何一次比赛都没有出现平局．证明：在这些运动员中，可以找到这样的运动员，当他列举被他战胜的人以及他的手下败将所战胜的人时，他能数出所有其他参加比赛的人．

【证法 1】假设在参加循环赛的运动员中，赢的次数最多的是 A．如果本题断言对 A 不成立，那么可以找到这样一个比赛的参加者 B，无论是 A 本人，或者是被 A 战胜的对手都没有战胜他．因此，B 赢的次数比 A 还多，这是不可能的，因为根据上面的假设，A 是赢的次数最多的运动员．这样一来，本题的断言对 A 成立．

【证法 2】我们用完全数学归纳法来证明本题断言．如果参加循环赛的只有两个运动员，那么本题的断言必然成立．假设当参加循环赛的人数等于 n 时，本题的断言成立．若参加循环赛的人数增至 $n+1$，那么根据归纳假设，在前 n 个运动员中，可以找到这样一个运动员 A，当他列举出被他自己战胜的人以及他的手下败将所战胜的人时，他能说出所有前 n 个运动员的名字．假设 B 是参加循环赛的 $n+1$ 个人中最后一名运动员．如果运动员 A 列举被他战胜的人或他的手下败将所战胜的人时，数出了运动员 B，那么对于 A 本题断言成立．如果 A 没有数出 B，那么这意味着 B 战胜了 A 以及所有能被 A 叫出名字来的人❶．这时本题断言对 B 成立．

【证法 3】假设所有参加循环赛的运动员都集合在礼堂里．我们请其中一位运动员把他所战胜的人从礼堂带出去（可能我们所挑选的这位运动员没有把任何人带出去）．如果此后在礼堂里还剩有运动员，那么再请其中一位运动员把他所战胜的人带出去．这样一直进行下去，直到有人把最后一个循环赛的参加者从礼堂带出去为止．做这件事的人战胜了他亲自带出去的所有运动员，也战胜了当他还留在礼堂里时，已经带人出礼堂的所有运动员．因此，从礼堂把最后一个运动员带出去的运动员（也可能就是最后一个运动员自己）能数出所有的运动员（除了他自己）．

❶ 此处原文有误，应为"意味着 B 战胜了 A 以及所有败于 A 的人．"因为 B 不一定能战胜所有能被 A 叫出名字来的人．——校者注．

对于上面所作的解答可做某些注解：

1） 证法1表明：问题的断言对循环赛的优胜者（如果有几个优胜者，那么对任一个优胜者）是成立的．但是不应该认为问题的断言仅仅对优胜者成立．下面的表格表明，本题断言甚至对循环赛的最后一名也是成立的．

更有甚者，本题断言可能对参加循环赛的每一个人都成立．右面那个循环赛表可以作为这个例子．

	A	B	C	D	E
A	—	1	1	1	0
B	0	—	1	0	1
C	0	0	—	1	1
D	0	1	0	—	1
E	1	0	0	0	—

2） 本题可以用图论的语言来叙述．把参加循环赛的每一个人比拟为图的一个且仅仅一个顶点．相应于两个运动员的顶点之间用边来连接，表示他们之间的比赛，边的方向由赢的人指向输的人．循环赛结束时，可以得到一个完全有向图，而本题的断言可叙述作：

在任何一个有限的完全有向图中，可以找到这样一个顶点，从这个顶点出发沿着和有向边一致的方向走，只经过一个或两个相邻的边，可以到达任何一个其它的顶点．

对于无限图，本题断言是不对的．例如假设 $P_1, P_2, P_3, \cdots$ 是无限图的顶点，边 P_iP_k 的方向是由附标大的顶点指向附标小的顶点．这时从任一顶点出发，沿着有向边所指示的方向走，只能到达有小附标的顶点，即仅能走到有限个顶点上．

166．证明：如果梯形的底角不相等，那么从底角较小的顶点所引的对角线大于从另一个顶点所引的对角线．

【证法1】 将梯形的较小的底角（$\angle DAB$）扩大，使之与较大的底角（$\angle CBA$）相等，于是我们得到等腰梯形 $ABCE$（图199）．由于对称性，梯形 $ABCE$ 的对角线的交点 F 应该在底边 AB 的中垂线上．线段 FC 与顶点 B 所属的腰位于中垂线的同一侧．因为 D 是线段 EC 的内点，由对 $\triangle BCE$ 的研究便可推出：线段 BD 和线段 FC 相交，所以原来的梯形的对角线的交点 G 也在中垂线的这一侧．底边 AB 的中垂线把平面分成两部分．包含顶点 B 的那个半平面的所有的点到 B 的距离比到 A 的距离小．因此，对点 G 有不等式

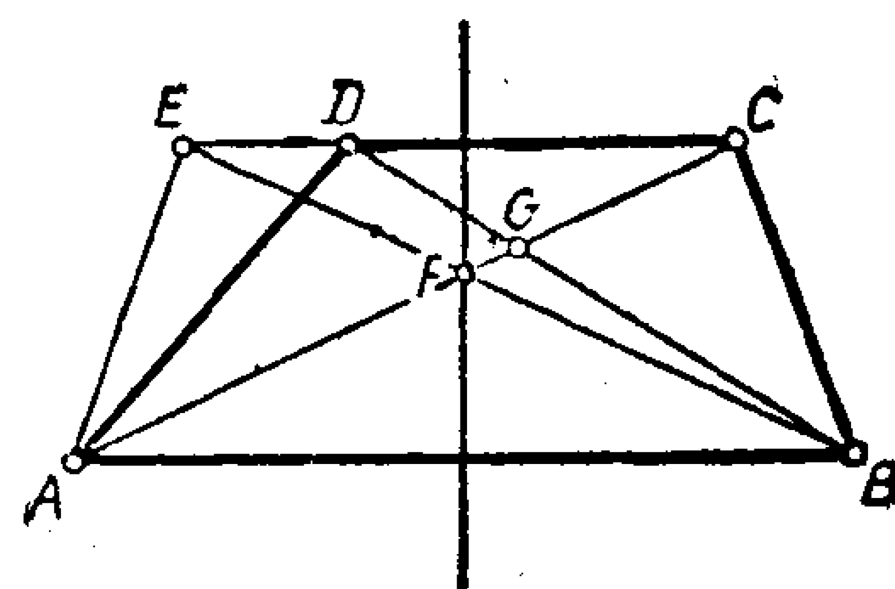


图 199

$$GA > GB.$$

因为 $\angle AGB = \angle CGD$（对顶角），其它两个角也相等（内错角），所以 $\triangle ABG$ 和 $\triangle CDG$ 相似．于是由所得到的不等式可得到新的不等式

$$GC > GD.$$

将所得到的两个不等式相加，我们得到 $AC > BD$，这就是所要证明的．

【证法2】 将梯形 $ABCD$ 的底边 AB 上较小的底角扩大，使得和较大的底角相等，我们得到等腰梯形 $ABCE$（图200）．梯形 $ABCE$ 的对称轴和线段 EC 的中垂线重合．因为顶点 B 和线段 EC 上靠近顶点 C 的那一半位于对称轴的同一侧，因此 $BC < BE$．

由于等腰梯形的对称性，所以 $AC = BE$．在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle BDE$ 中，$\angle CDB$ 和 $\angle BDE$ 互补，因此这两个角中有一个角或为直角，或为钝角．无论是哪种情况，这个角总是三角形中最大的角，且它所对的边是最大的边．与这个大角在哪一个三角形（$\triangle BCD$ 或 $\triangle BDE$）有

关，线段 BD 或小于线段 BE，或小于线段 BC，因此必定小于这两个线段中最大的线段 BE，而 BE 等于对角线 AC.

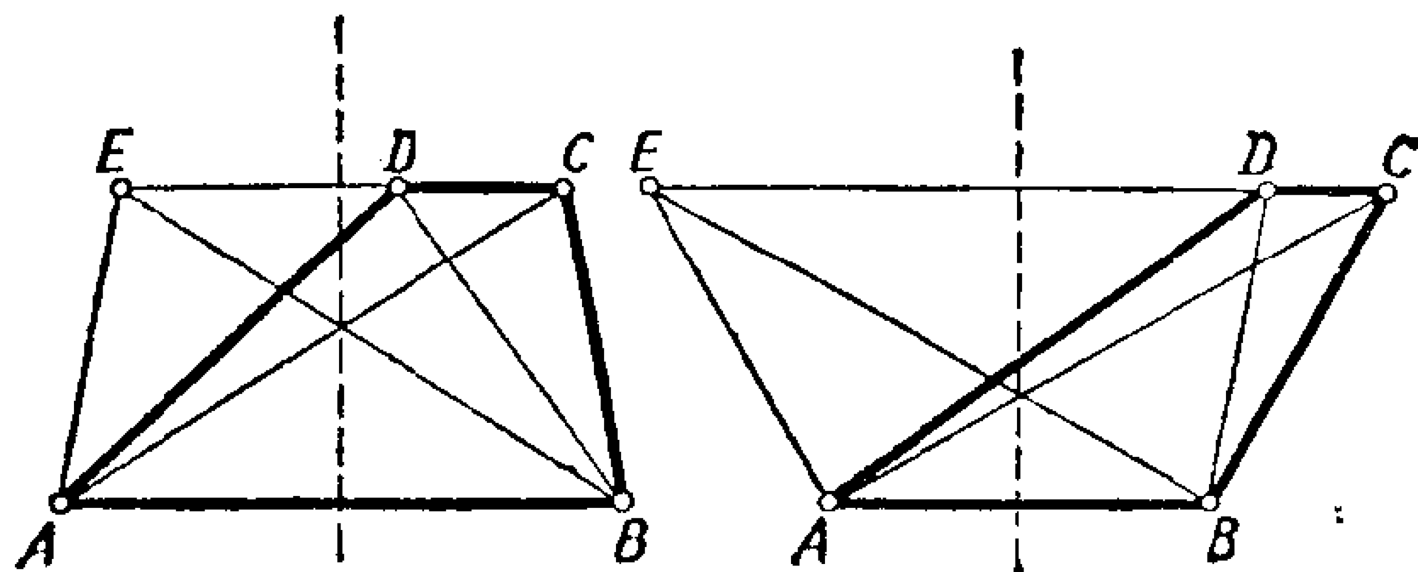


图 200

【证法 3】将梯形 $ABCD$ 的底边 AB 上较小的底角扩大使它和较大的底角相等，于是我们得到等腰梯形 $ABCE$（图200）. 外角 $\angle EDB$ 大于 $\triangle DBC$ 的任一不相邻的内角 $\angle DCB$ 和 $\angle DBC$，因此 $\angle EDB > \angle DCB$，又因为等腰梯形 $ABCE$ 关于底边的中垂线对称，所以

$$\angle DCB = \angle AED.$$

因此，在 $\triangle BDE$ 中，$\angle BDE$ 大于 $\angle BED$，因为 $\angle BED$ 仅仅是 $\angle AED$ 的一部分，而我们证明了 $\angle AED < \angle EDB$. 因为在每一个三角形中，大角对大边，所以 $BE > BD$. 由于对称性，$AC = BE$，于是本题断言被证明了（我们在27题的解法 2 中遇到过它）.

167. 有多少个能被 3 整除而又含有数字 6 的五位数?

【解法 1】我们把所有能被 3 整除而（在十进制中）又包含数字 6 的五位数按照最后一个数字 6 所在的位置（“位置”的编号由个位往高位）来分组.

第一组是以数字 6 为个位数的数. 这些数的中间三位数字可以任意取，而第一个数字（指最高位的数字——中译者注）只能从 1，2，3，4，5，6，7，8，9 中来取（因为五位数不能从零开始），而且要使所有的数字之和能被 3 整除. 三个中间的数字的每一个数字可以有10种方法来取，而第一个数字只能有 3 种方法来取. 事实上，除第一个数字外，其它所有的数字之和被 3 除时，其余数只能是 0，1，2 中的一个. 如果余数为 0，那么第一个数字可以取 3，6，9 中的任一个. 如果余数为 1，那么第一个数字可以取 2，5，8 中的任一个. 如果余数为 2，那么第一个数字可以取 1，4，7 中的任一个. 这样一来，第一组共有 $3\times10^3=3000$ 个数.

第二、三、四组是最后一个数字 6 分别在第二位（十位），第三位（百位），第四位（千位）且其右边不再有 6 的数组成的. 在最后一个 6 的右边的每一位数字可以用 9 种办法来填写，因为在这些数字中不应该有 6. 除了最高位外，所有其它各位可以任意填写，其每一个可以是十个数字中的任一个. 第一个数字可以像上面的情况那样来选取，即每一次都可以从三个允许的数字中选取一个. 这样一来，第二组有 $3\times10^2\times9=2700$ 个数，第三组含有 $3\times10\times9^2=2430$ 个数，第四组有 $3\times9^3=2187$ 个数.

第五组是由最高位（万位）为 6，而其它各位不出现数字 6 的数组成的. 这时中间三个数字中的每一个可以有 9 种办法来选取，因为这些数字可以取 6 以外的任何数字. 最后一位数字应该从同样 9 个数字中选取，且使数字之和能被 3 整除. 最后一位数字仅能有三种办法来选取（如果前四位数字之和能被 3 整除，那么最后一位数字只能从 0，3，9 中挑一个；如果前四个数字之和被 3 除时余 1，那么只能从 2，5，8 中挑一个；如果余 2，那么只能从 1，4，7 中挑一个）. 这样一来，第五组有2187个数.

于是有 $3000+2700+2430+2187+2187=12504$ 个满足本题全部要求的五位数.

【解法 2】我们把本题的解答分成两部分：首先，我们计算有多少个不包含有数字 6 的

五位数，然后证明：其余的数的三分之一恰好能被 3 整除．

1）总共有90000个五位数．我们来确定其中有多少个不包含数字 6．这些数的第一个数字可以用 8 种办法（除 0 和 6 以外的任何数字都可以）来选取，而其它四位的数字可以用 9 种办法来选取（对于它们仅不能取数字 6）．因此，总共有$8\times9^4=52488$个不包含数字 6 的五位数，而至少包含一个 6 的五位数共有$90000-52488=37512$个．这个数能被 3 整除．

2）我们把所有的五位数按上升的次序排列起来，且把所得到的序列从第一个数开始每10个数分成一段．属于同一段的数彼此仅仅是最后一位数字不同．在每一段中标出包含数字 6 的数．在某些段所有的数都被标出了．所有前四位数中含有 6 的那些段——在同一段内，由一个数变到另一个数时，前四位数字不变——便是这样的．在其它的段，所标出的仅仅是一个数，这个数的个位数字是 6．

我们来确定两个相邻的标出的数之差等于什么（在图201中，为了明显起见，黑点对应于标出的数，圆圈对应于未标出的数）．

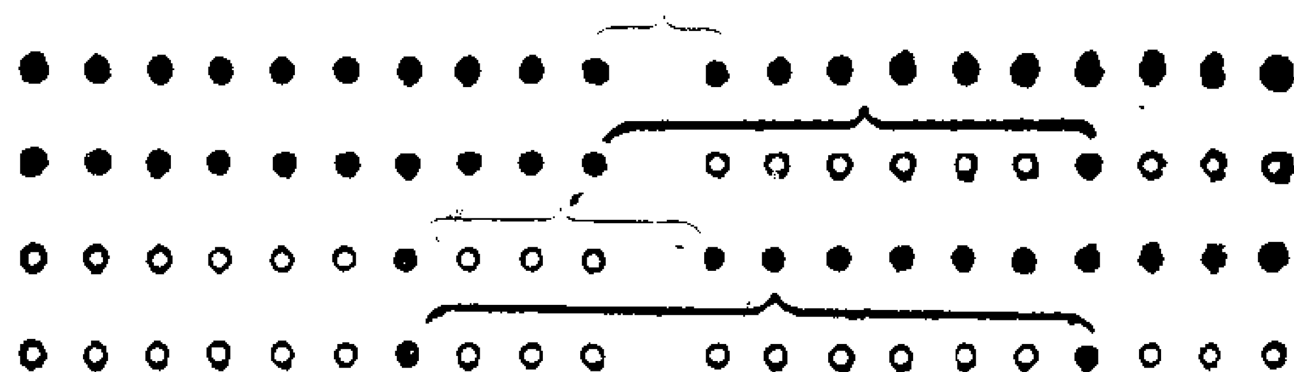


图 201

如果两个标出的数属于同一段，那么这整个一段的数都是标出的数，从而相邻的标出的数之差等于 1．差等于 1 也发生在那种情况，如果两个相邻的标出的数属于两个相邻的段，这两段都是标出的数组成的（图201第一排所示）．如果在两个被研究的数中，较小的数属于全部都是标出的数的一段，而较大的数属于只包含一个标出的数的一段（图201第二排）那么差等于 7．如果两个数中，较大的数属于都是标出的数的一段，而较小的数属于仅包含一个标出的数的一段（图201第三排），那么差等于 4．最后，如果两个数都属于再没有其它标出的数的段（图201第四排），那么差等于10．于是两个相邻的标出的数之差只能取值 1，4，7 和 10．

因为这四个数中的每一个被 3 除都余 1，所以可以断定：在以上升次序排列好的标出的数中，每第三个数能被 3 整除，因为与能被 3 整除的标出的数最靠近的标出的数被 3 除时余 1；在它之后的标出的数被 3 除时余 2；再后面标出的数又能被 3 整除，等等．因为标出的数共有37512个，而这个数能被 3 整除，所以，所有标出的数的三分之一（$37512:3=12504$）能被 3 整除．

【**解法 3**】90000个五位数中，每第三个能被 3 整除，即有30000个五位数能被 3 整除．我们来确定它们之中有多少个不含有数字 6．

这些数的第一个数字可以用 8 种办法来选取，因为在最高位仅不能取数字 0 和 6．第二个，第三个，第四个数字每个都有 9 种办法来选取，因为只是不能利用数字 6．最后一个数字应该这样取，使得这个数的所有五个数字之和能被 3 整除．与前四个数字之和被 3 除时余数等于什么有关，最后一个数字或者可以取 1，4，7 中的一个，或者可以取 2，5，8 中的一个，或者可以取 0，3，9 中的一个．这样一来，最后的数字可以有三种办法来选取．

因此，在能被 3 整除的五位数中，有 $8\times9^3\times3=17496$个不含有数字 6，而有$30000-17496=$ $=12504$个至少含有一个数字 6．

168．两个坐标都是整数的点叫做平面上的整点．证明：如果三角形的顶点和整点重合，且三角形的三边不再含有其它的整点，但是在三角形内有唯一的一个整点，那么这个三角形

的重心和这个“内部的”整点重合.

【证法1】不难看出，整点关于其它的整点或者关于两个整点所连成的线段的中点的对称点还是整点（见§67）.

我们来研究本题条件中所说的整点三角形ABC．假设S是整点三角形ABC内的整点．我们作整点S关于$\triangle ABC$的三边的中点的对称点（图202）．所有这些点仍然是整点．将这些整点记作S_a,S_b,S_c．它们在和原来的三角形ABC对称的三角形A_1BC,AB_1C,ABC_1内．在$\triangle A_1BC$，$\triangle AB_1C$，$\triangle ABC_1$内，没有其它的整点．因为，譬如说，在$\triangle A_1BC$内，除了整点S_a外，那怕是还有一个整点，那么这个整点关于边BC的中点的对称点将在原来的三角形ABC内．因此，在$\triangle ABC$内有两个整点，这是不可能的．作顶点A_1关于整点S_a的对称点．这个点应该在$\triangle A_1B_1C_1$内，而且是整点，因为$\triangle A_1B_1C_1$和$\triangle A_1BC$同位相似，相似中心是点A_1，相似系数等于2，而点S_a是整点．这样一来，所作的点应该和整点S,S_a,S_b,S_c中的某一个重合，因为根据上面所证明的，在$\triangle A_1B_1C_1$内没有其它的整点．由于新作的点是顶点A_1关于整点S_a的对称点，所以它不能和整点S_a本身重合．我们来证明，所作的点也不可能和整点S_b、S_c重合．我们只要证明它不和这两个点中的某一个整点重合就行了．我们来证明它不和整点S_c重合．线段A_1S_a和BS_c关于线段BC和AB的中点与线段AS对称．因此，线段A_1S_a和BS_c都平行且等于线段AS，于是四边形$A_1S_aS_cB$是平行四边形，且整点S_c无论如何也不可能和顶点A_1关于整点S_a对称.

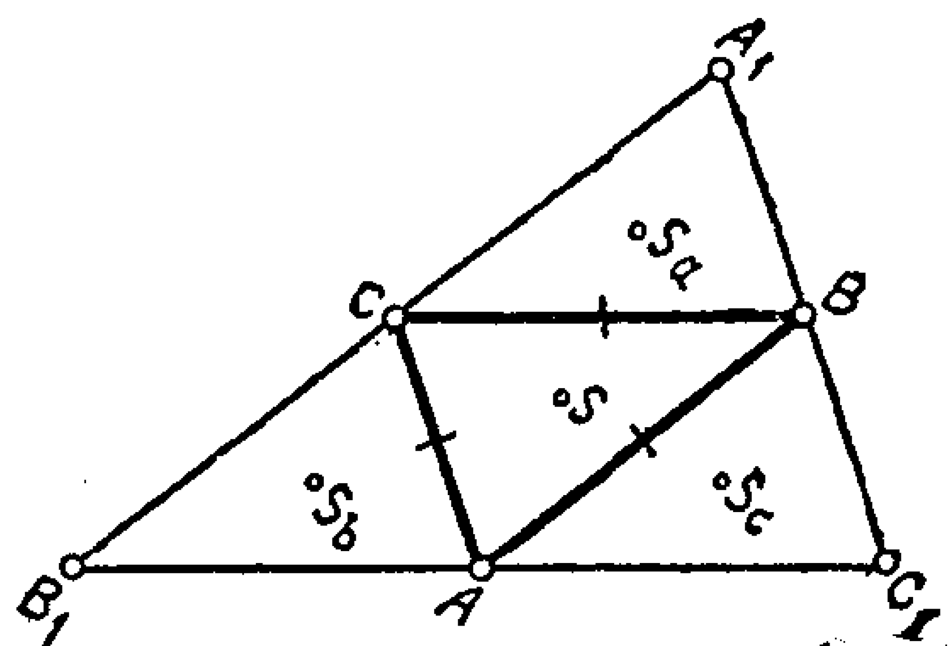


图 202

于是我们证明了：顶点A_1关于整点S_a的对称点只可能是整点S．由此推出，点A_1、S_a、S在一直线上．这条直线通过线段SS_a和BC的中点，因此也通过顶点A_1关于两个线段SS_a和BC的公共中点的对称点，即通过点A．于是整点S在$\triangle ABC$的由顶点A所引的中线上．因为$\triangle ABC$的所有顶点是等同的（无论哪一个顶点和任何其它的顶点没有什么不同），所以整点S也在$\triangle ABC$的其它两条中线上．因此整点S和$\triangle ABC$的重心重合.

【证法2】如果利用已经知道的整点三角形的性质，那么168题的证明将非常简单．假设$\triangle ABC$是本题条件中所说的整点三角形，S是在它里面的整点．整点三角形SAB、SBC，SCA的面积是相等的，因为在这些三角形中，除了它们的顶点以外，无论在它们的内部，或在它们的边上，都没有其它的整点，于是根据137题的证法4所证明的，这样的三角形的面积等于1/2．再由119题的断言推出，整点S和$\triangle ABC$的重心重合.

【证法3】关于原三角形任一边的中点，作和原三角形对称的三角形，于是我们得到一个平行四边形．如像在证法1中所证明的那样，在这个平行四边形内，除了在原三角形内的整点以及和它（关于所取的三角形的边的中点）对称的整点以外，没有其它的整点，因此，只要证明下面的断言就行了：

如果在平行四边形的边界上，除了它的顶点以外，没有其它的整点，在平行四边形内，有两个整点，那么这两个整点在平行四边形的对角线上，且把它分成相等的三部分.

我们先来证明引理：

对于平行四边形的任一内点，总可以找到这样一个平行四边形的顶点，使得以这个顶点为中心，相似系数为 2 的同位相似变换把所取的这个点变成另外一个仍然属于平行四边形的点.

引理的断言的正确性可由下列事实推出：通过平行四边形对边中点的直线把平行四边形分成四个平行四边形，如果将这四个平行四边形的每一个作同位相似变换，相似中心是原平行四边形的顶点，相似系数为 2，那么变换以后将和原平行四边形重合.

对我们所作的平行四边形以及在它里面的整点S和T，应用这个引理（图203）. 整点S和T不会和平行四边形的中心重合，因为不然的话，在平行四边形内便可找到第三个整点，这个整点和另外一个整点关于平行四边形的中心是对称的.

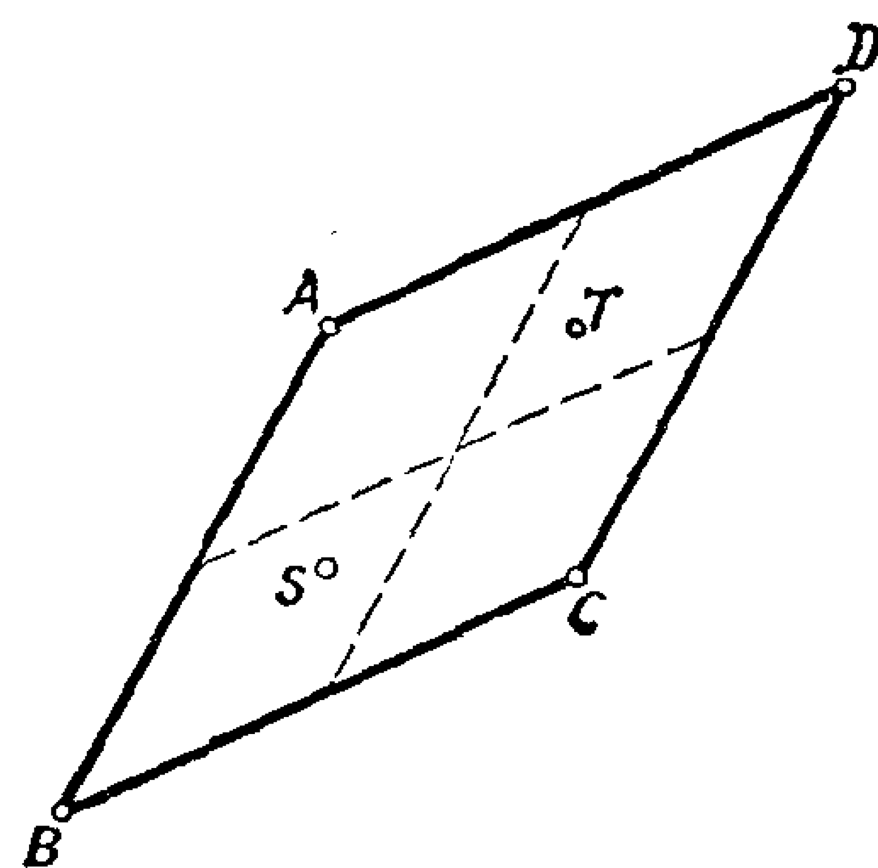


图 203

正像我们在证法 1 中所证明的那样，顶点B关于整点S的对称点属于这个平行四边形. 这个点也是整点，并且不可能是平行四边形的顶点，因为整点S不在平行四边形的边界上，也不和平行四边形的中心重合. 因此，顶点B关于整点S的对称点应该和整点T重合.

利用类似的论证可以证明：顶点D关于整点T的对称点和整点S重合. 这样一来，点S和T在线段BD上且把它分成相等的三部分. 线段BD只能是平行四边形的对角线，因为整点S和T不在平行四边形的边界上. 于是证明了所需要的断言.

【证法4】我们重复在证法 1 开始时所用的论证.

本题条件中所说的整点三角形ABC的三条中线把它分成六个三角形（图204）. 位于$\triangle ABC$内唯一的整点至少属于这些三角形中的某一个，例如在$\triangle AC_1S$内或在它的边界上，但不在线段AC_1上. 作同位相似变换，相似中心是顶点A，相似系数等于 2，这时这个整点变换成新的整点，这个新的整点在$\triangle ABD$（$\triangle AC_1S$的像）内或在它的边界上，但不在边AB上. 因为在$\triangle ABC$内只有一个整点，所以新的整点或者在$\triangle A_1BD$内，或者在它的边界上，但不和顶点B重合. 如果作$\triangle A_1CS$和$\triangle A_1BD$关于点A_1对称，那么在$\triangle A_1CS$内或它的边界上（但不在顶点C）将有一个整点，这个整点和属于$\triangle A_1BD$的整点对称. 但是根据本题条件，在$\triangle ABC$内，只有一个整点. 因此，它必须属于$\triangle A_1CS$，这个三角形是$\triangle ABC$的一部分. 因为$\triangle AC_1S$和$\triangle A_1CS$除了$\triangle ABC$的重心S以外，没有其它的公共点，所以，$\triangle ABC$内唯一的整点和点S重合，这就是所要证明的.

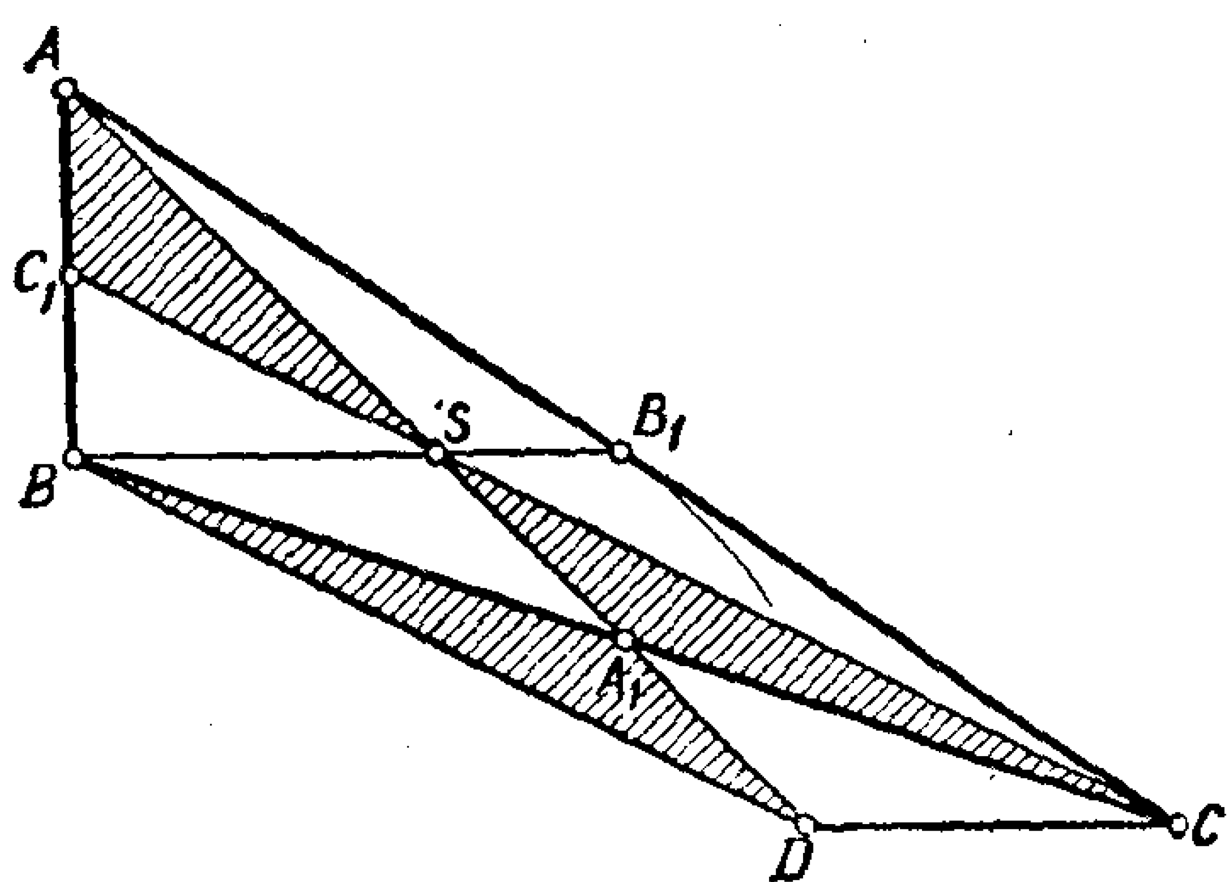


图204

168题的断言的空间类比是不成立的：存在这样一个四面体，它的顶点是空间整点，其边界面不含有其它的整点，在它的内部只有一个整点，但它的重心不和这个唯一的整点重合.

以点A（0,0,0），B（1,0,0），C（0,1,0），D（2,2,5）为顶点的四面体便是一例．在它的内部只有一个整点R（1,1,2），但是点R（1,1,2）不和这个四面体的重心重合．★

§72. 关于法雷分数

整点可以直观地描述分数.

我们给定任何一个自然数n，并且研究所有分母小于或等于n的不可约的真分数．如果把这些分数按上升的次序排列起来，并且在第一个分数的前面加上数$\frac{0}{1}$，而在最后一个分数的后面加上数$\frac{1}{1}$，于是我们得到一组数，通常称为n**级法雷序列**（**法雷贯**），并且**表示为**F_n. 例如，F_8看来是下面的样子：

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{7},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{8},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{7},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{1}.$$

如果把这些数画到数轴上去，那么要看出点的分布的任何一种规律性是不可能的；它们时而密集，时而稀疏，然而所有这些构成n级法雷序列F_n的分数还是服从一些十分简单的规律.

在着手研究它们之前，我们引进一个新的定义．对于分数$\frac{h}{k}$和$\frac{h'}{k'}$（$k>0, k'>0$），我们把分数$\frac{h+h'}{k+k'}$叫做它们的**中项**．我们证明下面的断言：

1） **n级法雷序列F_n的两个相邻的项的中项是不可约的，而且它的分母大于n**；

2） **n级法雷序列F_n的两个相邻的项之差等于它们的分母的乘积的倒数**；

3） **F_n的三个连续的项的中间项等于和它相邻的项的中项.**

断言3）和168题密切相关.

我们在平面上引入直角坐标系，并且每一个分数$\frac{h}{k}$（$0<h\leqslant k\leqslant n$）对应于坐标为（$k$，$h$）的整点．分数$\frac{h}{k}$的不可约性意味着在连接点（$k$，$h$）和坐标原点的线段上，除了和点($k$，$h$）重合的线段端点以外，没有其它的整点．关于这个点可以说，从坐标原点可以看见它，或者为了简短起见，把它叫做**可见点**．分数$\frac{h}{k}$越大，则连接点（k，h）和坐标原点的线段和x的正半轴之间的夹角也越大．对应于n级法雷序列的项的所有点，除了描述分数$\frac{0}{1}$的点以外，都在x轴的上面．点（1，0）在x轴上．另一方面，所有这些点，除了对应于分数$\frac{1}{1}$的点（1，1）以外，都在坐标轴的夹角的平分线之下．最后，从对应于n级法雷序列的项的点到y轴的最大距离等于n（图205）．这三个条件确定了一个直角边等于n的等腰直角三角形.

在这个三角形的内部或周界上的任何一个可见整点对应于F_n的某一项．我们用H_n表示这个三角形．设P和P'是对应于两个法雷分数的整点，O是坐标原点，Q是整点P和P'所对应的分数的中项所对应的点．这时四边形$OPQP'$是平行四边形．

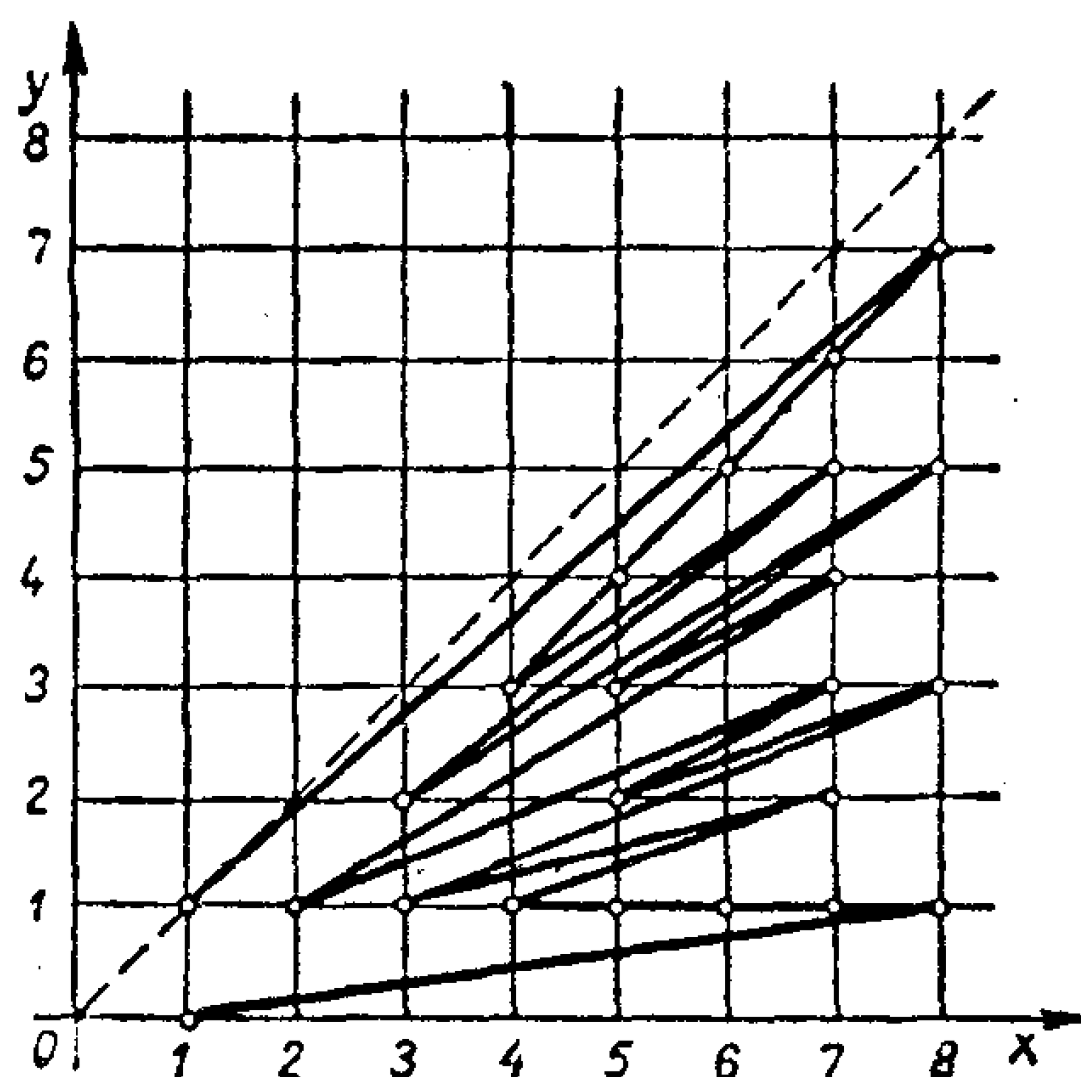


图 205

如果分数$\frac{h}{k}$对应于坐标为$(k-h,h)$的整点，那么将清楚地看出，n级法雷序列F_n的项关于区间［0，1］的中点—$x=\frac{1}{2}$的点是对称分布的（图206）．❶即使在这种情况下，对应于F_n的项的点也分布在直角边等于n的一个等腰直角三角形内，而且法雷分数所“占据的”整点的其它性质仍然保持．因此，在证明上面所叙述的定理时，我们可以利用任何一种直观表示n级法雷序列的项的方法．

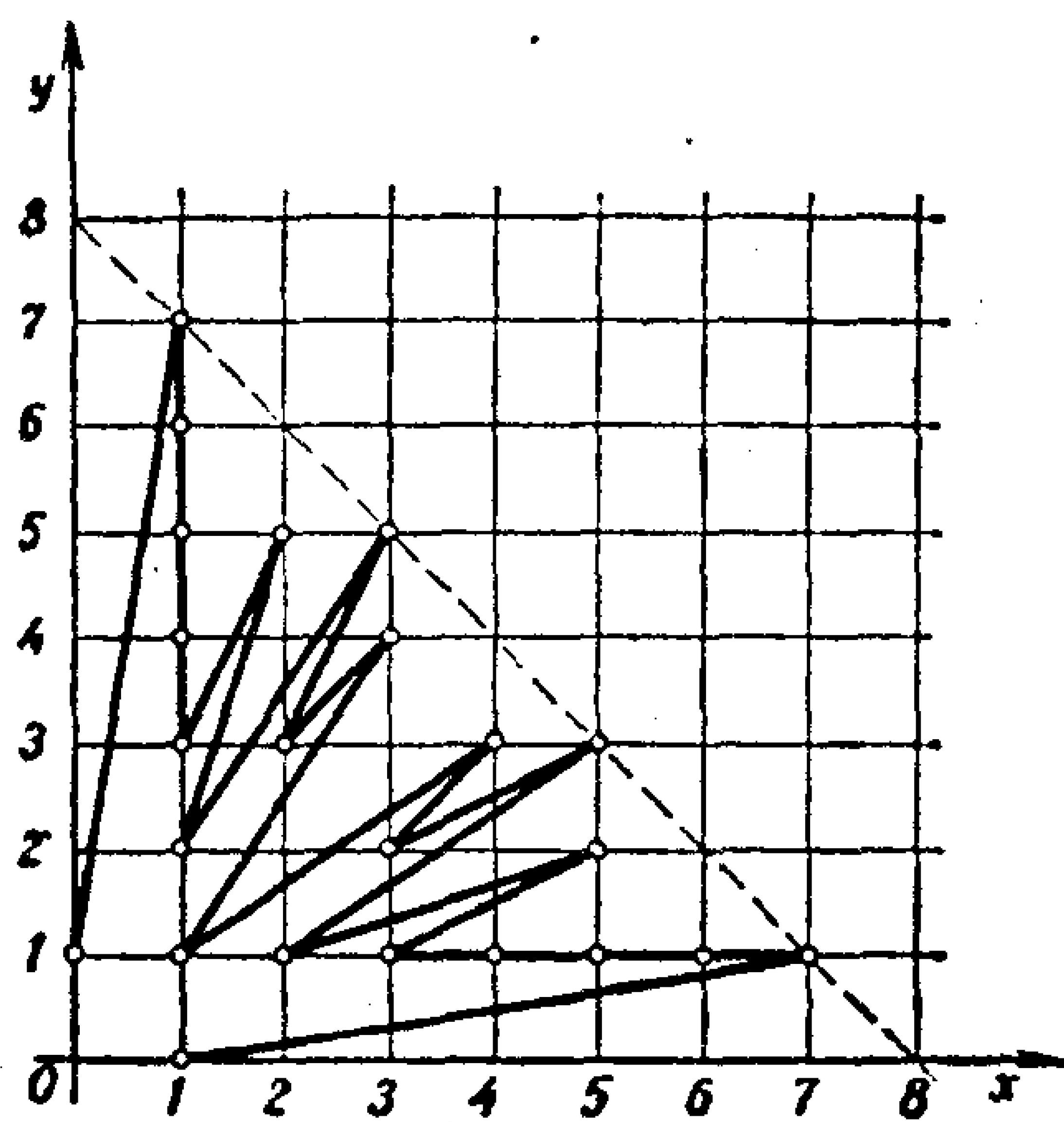


图 206

1）假设P和P'是描述法雷序列相邻两项$\frac{h}{k}$和$\frac{h'}{k'}$的点．点Q对应于分数$\frac{h}{k}$和$\frac{h'}{k'}$的中项，从坐标原点O到点Q指明了平行四边形$OPQP'$的对角线．因此，可以从对应于n级法雷序列F_n的两个相邻的项的点P和P'之间看见点Q，而且和点Q的坐标重合的整点在三角形H_n外，因为F_n不包含那些分数，这些分数所对应的点在通过坐标原点O而且在角POP'内的直线上（图207）．在对角线OQ上没有比点Q更靠近坐标原点的整点，因为不然的话，将有一个整点在线段OQ内，并且线段OQ将被一些整点分成相等的部分．但这时，从坐标原点O可以看见的位于对角线OQ上的整点不能比点O到线段OQ的二等分点（同时也是线段PP'的二等分点）更远，于是这个整点在三角形H_n内，但这是不可能的．于是可见点对应于不可约的分数

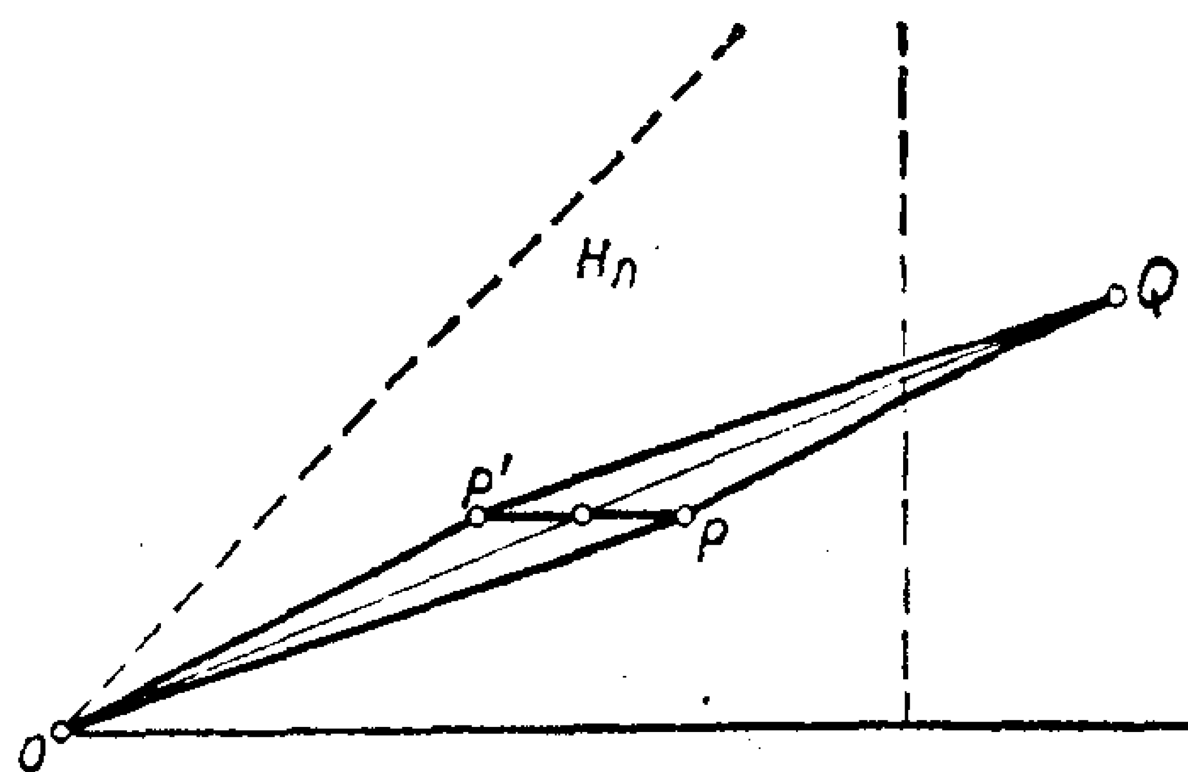


图 207

❶ 关于坐标角的平分线对称的点将与对称的项对应．——俄译编辑注．

$\frac{h+h'}{k+k'}$，而且可见点在三角形H_n外和角POP'内只能在

$$k+k'>n \tag{1}$$

的情况下才有可能.

2) 由1)中所证明的推出，OPP'是基本的整点三角形，因为P和P'是可见点，因此三角形的边OP和OP'不包含其它的整点. 此外，点P和P'对应于n级法雷序列的相邻的项，三角形OPP'在H_n内，因此在三角形OPP'内以及在边PP'上也没有整点. 正像137题的几何描述中所证明的，基本的整点三角形的面积等于$\frac{1}{2}$，因此当用点P和P'的坐标来表示三角形OPP'的面积的二倍时，我们得到

$$h'k-hk'=\pm 1, \tag{2}$$

由此得到

$$\frac{h'}{k'}-\frac{h}{k}=\frac{h'k-hk'}{kk'}=\pm\frac{1}{kk'}.$$

于是，定理2)被证明了.

3) 设P，P'和P''是对应于F_n的连续的三项的点. 这时$OP'P$和$OP'P''$是基本的整点三角形. 它们的面积相等，因此点P和P''在直线OP'的不同的两侧，且到OP'的距离相等（图208）. 这就意味着直线OP'平分线段PP''，因此通过平行四边形$OPQP''$的第四个顶

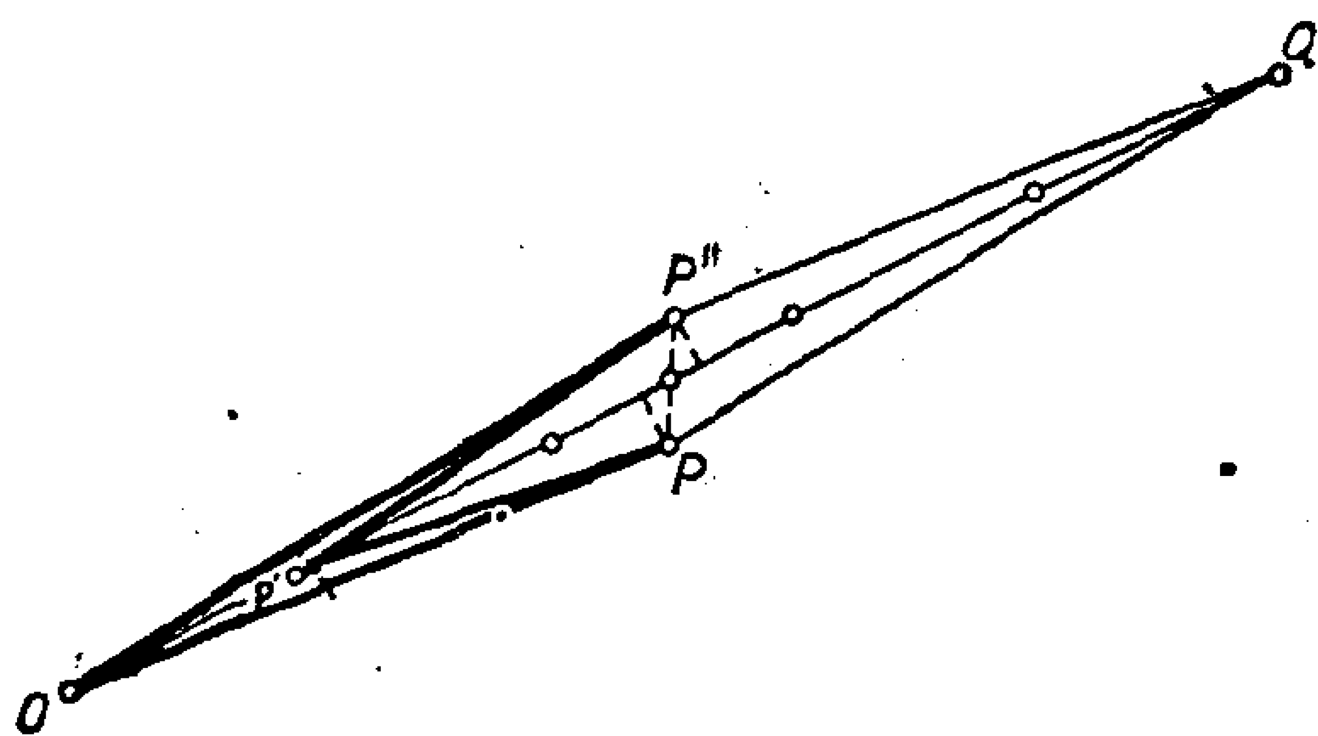


图 208

点Q. 但是点Q对应于点P和P''所对应的分数的中项，因此对应于点P'的数也等于点P和P''所对应的分数的中项，这就是所要证明的.

被证明的定理 3）具有下面的几何意义：**如果整点三角形包含和它的顶点不同的整点，并且这些整点分布在通过三角形的一个顶点的直线上，那么这个直线和三角形的中线重合.**

如果除了和三角形的顶点重合的整点以外，它的周界不含有其它的整点，而在三角形内有一个唯一的整点，那么三角形的所有三个顶点满足定理 3）的以几何形式叙述的条件，且内部的整点和三角形的重心重合. 因此，168题可以看作是定理 3）的特殊情况.

二十二、1957年—1964年试题及解答

169．在平面上给定一锐角三角形ABC．我们研究所有以给定的三角形为底面，而侧面为锐角三角形的棱锥．从棱锥的顶点作三角形ABC所在平面的垂线，求这些垂线的垂足的轨迹．

【解】设P是$\triangle ABC$所在的平面内的一点，过点P作一直线和这平面垂直，并且在这条垂线上取一点D．我们来弄清楚，为了使得我们所选取的点D满足本题的要求（也就是使$\triangle ABD$，$\triangle BCD$，$\triangle CAD$都是锐角三角形），需要些什么条件？

我们先来研究$\triangle ABD$，$\triangle BCD$，$\triangle CAD$的那些和$\triangle ABC$有公共边AB，BC，CA相连的角，例如，我们取$\angle BAD$．过顶点A作一平面垂直于边AB，当且仅当顶点D与顶点B位于这个平面的同一侧时，$\angle BAD$是锐角．对于过点P而垂直于$\triangle ABC$所在的平面的直线来说，这个条件要么对这个垂线上所有的点都满足，要么对它上面的任何一点都不满足，因为垂直于$\triangle ABC$的平面的直线和垂直于边AB的平面是平行的．因此，和$\triangle ABC$的边相连的所有六个角是不是锐角将只和点P的选取有关．如果这个条件对点P本身是满足的，也就是说，如果每一个角

$$\angle BAP,\ \angle ABP,\ \angle CBP,\ \angle BCP,\ \angle ACP,\ \angle CAP \qquad (1)$$

都是锐角，那么对于通过点P而垂直于$\triangle ABC$所在平面的直线上的任何点D，这个条件也将被满足．

其次，我们来研究$\triangle ABD$，$\triangle BCD$，$\triangle CAD$在顶点D处的角．显然，如果平面上的点在以给定的线段为弦，所含的角为锐角的弓形弧上的话，那么这个点对给定线段所张的角为锐角．因此，对于$\triangle ABD$，$\triangle BCD$，$\triangle CAD$在顶点D处的角来说，仅当顶点D到$\triangle ABC$的每一边的中点的距离大于这个边的边长的一半的时候，这些角才是锐角．在通过点P而垂直于$\triangle ABC$的平面的直线上，这样的点D总是可以选取到的，为此只要使点D到$\triangle ABC$的平面的距离大于$\triangle ABC$的最大边长的一半就行了．

于是，如果我们作出了使（1）中所有六个角都是锐角的点P的轨迹，那么便求出了满足本题要求的点的轨迹．

当且仅当在下面的情况下$\angle BAP$和$\angle ABP$都是锐角：如果点P在$\triangle ABC$所在平面的一个带形内，这个带形是由通过顶点A和B而垂直于边AB的两条直线限定的．事实上，如果点P在通过顶点A而垂直于边AB的垂线的顶点B所在的那一侧时，$\angle BAP$是锐角．类似的断言对$\angle ABP$也是正确的．这样一来，使得（1）中所有六个角都是锐角的点P的轨迹是三个带形所交成的区域，这些带形是通过$\triangle ABC$的顶点而且和它的边垂直的直线所限定的．

如果具有变动顶点D的棱锥的底面$\triangle ABC$是锐角三角形，那么三个带形所交成的是六边形（图209），它的内部是满足本题要求的点的轨迹．

对于所作的解答，我们作某些注解．

1）如果我们不利用图209的直观性来论证，也可以证明使（1）中所有的角都是锐角的点的轨迹是六边形的内部．

只要验证每一个带形对于$\triangle ABC$的外接圆心O是对称的就行了．事实上，点O在每一个带形的中线上，这条中线和$\triangle ABC$某相应的边的中垂线相重合．因此，三个带形所交成的区域关于点O是对称的．

$\triangle ABC$的顶点C属于宽为BC和CA的带形所交成的区域（因为带形的边界不平行，所以它们是相交的）．因为$\triangle ABC$是锐角三角形，所以顶点C也在第三个宽为AB的带形内，因而属于所有三个带形所交成的区域．类似的断言对顶点A和B也是对的．

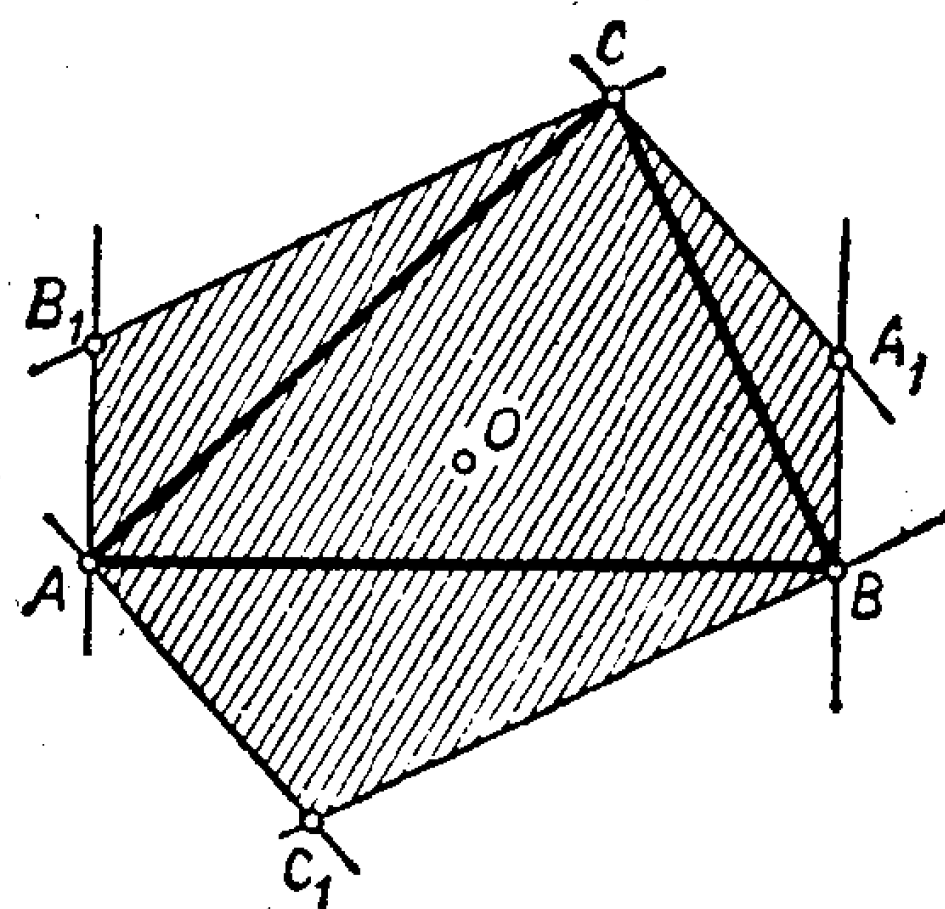


图 209

从三个带形所交成的区域关于点O的对称性推出：不仅$\triangle ABC$的顶点属于所交成的区域，而且这些顶点关于点O的对称点A_1，B_1，C_1也属于所交成的区域．点A，B，C，A_1，B_1，C_1是彼此不同的，因为外接圆心O既不和$\triangle ABC$的任一边的中点重合，也不和它的顶点重合．三个带形所交成的区域不可能有其它的顶点，因为三个带形是由六条直线所限定的，因此它们所交成的区域具有多边形的形状，其边数不超过6．因此，三个宽为AB，BC和CA的带形所交成的区域实际上是六边形．

2）点A_1，B_1，C_1不仅可以作为$\triangle ABC$的顶点关于外接圆心O的对称点来作，也可以作为三角形的垂心（三角形高的交点）关于它的边的中点的对称点来作（图210）．事实上，如果M是点C_1关于边AB的中点的对称点，那么AC_1BM是平行四边形．于是线段AM和BM分别垂直于三角形的边BC和AC．这样一来，点M和三角形的两个高的交点相重合，这就意味着和它的垂心相重合．

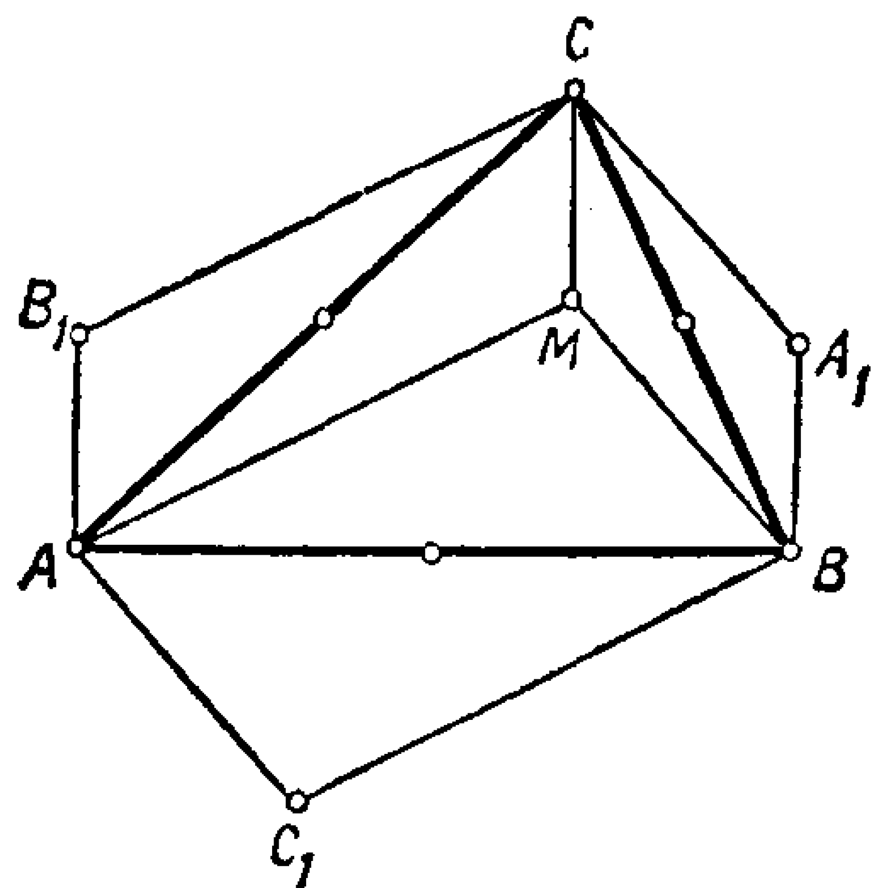


图 210

由所证明的推出：六边形$AC_1BA_1CB_1$的面积比$\triangle ABC$的面积大一倍，因为在$\triangle ABC$的边上向外作的$\triangle C_1AB$，$\triangle A_1CB$，$\triangle B_1AC$和构成$\triangle ABC$的$\triangle AMB$，$\triangle BMC$，$\triangle CMA$分别相等．

3）本题的解答表明：可以作出四个点，使得其中任意三个点都构成锐角三角形．我们顺便指出，直到现在还不知道下列问题的答案：最多可以有多少个点，使得其中任意三个点构成锐角三角形．

170．某工厂生产由六种不同颜色的纱织成的双色布．在这个工厂所生产的双色布中，每一种颜色至少和三种其它的颜色搭配．证明：可以挑出三种不同的双色布，它们含有所有六种颜色．

【证法1】 我们将六种颜色用1到6的一位数来编号，而布的花色规定用两位数来表示，它的数字对应于纱的颜色的编号．

我们取工厂生产的一种布，例如花色为56的布．如果工厂还生产花色为12和34或13和24的布，那么本题的断言已经成立（在三种布56，12，34或56，13，24的花色中有全部六种颜色）．在相反的情况下，工厂不生产（12，34）和（13，24）每对中的一种花色的布．假设工厂不生产花色12和13的布．（我们指出，布的花色的任意一种搭配方式都可以化为我们所研究的情况，只要挑取适当的方式对颜色进行编号就能做到这一点．）

因为在工厂生产的双色布中，每一种颜色至少和其它三种颜色搭配，所以对每一种颜色来说，它最多只能和其它两种颜色搭配．使得工厂的产品中没有这种双色布．对颜色1来说，我们知道了两个这样的搭配：12和13．因此，工厂一定生产花色为14的布．我们假设工厂不生产花色为23的布，因为不然的话，本题的断言对三种花色为14，23，56的布成立．

但是，如果工厂不生产花色12和23的布，那么由上面的证明推出，它一定要生产花色为25的布：因为在生产的花布中，没有花色为13和23的布，所以工厂应该生产花色为36的布．这样一来，本题断言在这种情况下也成立，因为在花色为14，25和36的布中出现了全部六种颜色．

170题可以"翻译"成图论的语言．把每一种颜色和图的顶点相对应，连接一对顶点之间的边表示工厂所生产的布的花色．所得到的图有6个顶点，任意两个顶点之间的边不得多于1个．根据本题条件，从每一个顶点发出的边至少有3个，所以每一个顶点的阶数大于或等于3．本题断言意味着，在图的边中可以找到3个没有公共端点的边．

在没有边相连的顶点之间用虚线连接起来．这时在证法1中所用的论证步骤可以直观地表示为图211所表示的图的形式．在那个图中，仅仅是证法1中所说到的那些边用实线画出来了．

在下面的证法中，我们仍然用图论的语言来叙述本题．

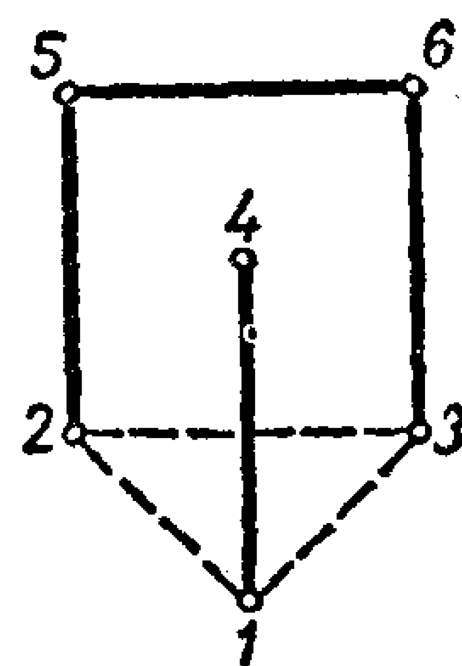


图 211

【证法2】假设P_1，P_2，…，P_6是图的顶点．不失一般性，我们假设图含有边P_1P_2．因为从顶点P_3出发的至少有3条边，我们研究其中一条不以P_1和P_2为终点的边．我们总可以适当选择记号使得另一条边以顶点P_4为终点．这样一来，我们所研究的图含有边P_3P_4．因此只要研究图不含有边P_5P_6的情形就行了，因为如果图含有边P_1P_2，P_3P_4，P_5P_6，那么本题断言已成立了（证法2的论证步骤类似于上一证法中的步骤，它用图212直观地表示）．

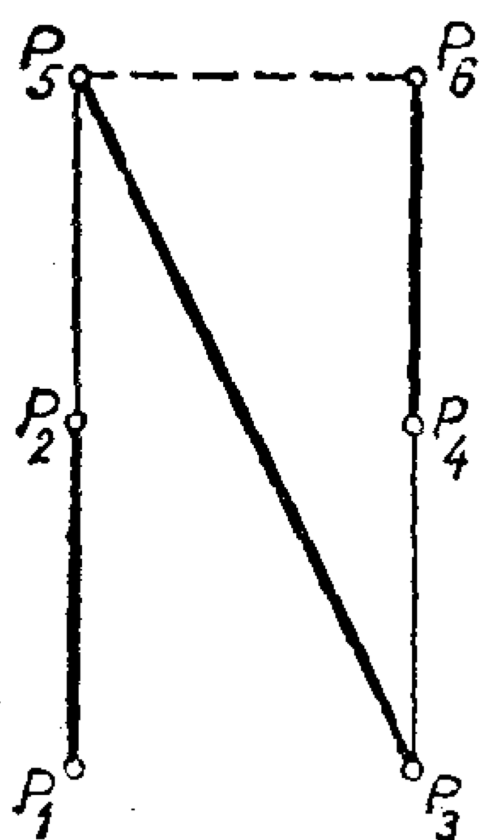


图 212

因为由顶点P_5发出的边至少有3条、那么在边P_1P_5，P_2P_5，P_3P_5，P_4P_5中，属于图的棱不少于3条、不属于图的边不多于一条．因此，顶点P_5至少和每一条边P_1P_2和P_3P_4的一个端点有边相连．不失一般性，可以假设我们所研究的图含有边P_2P_5和P_3P_5．

对顶点P_6作类似的论证将表明，在边P_1P_6、P_2P_6、P_3P_6、P_4P_6中，不属于图的不多于一条．因此，在边P_1P_6和P_4P_6中，至少有一条（例如，后一条）属于图．于是本题断言对边P_1P_2，P_3P_5、P_4P_6成立，这就是所要证明的．

现在我们想就试题的本身做某些注解．

1）本题的断言可有下面的推广（这里以及下面所有的注解，我们都用图论的语言来叙述）：**如果图至少包含有6个顶点，并且它的任意两个顶点之间的边不多于一条，而每一个顶点的阶数不小于3，那么从图的边中，可以挑选出三条端点都不相同的边．**

我们可以这样来证明这个断言，在证法2中，对于"图不包含边P_5P_6"这一假设用另一个假设"图不包含连接附标为$i>4$，$j>4$的两个顶点的边"来代替．

2）前面所说的断言，当用数n和$2n$来代替数3和6时，仍然成立：

如果图至少包含$2n$个顶点，且任意两个顶点之间的边数不多于1，而且每一个顶点的阶数不小于n，那么从图的边中，可以挑选出n条端点互不相同的边．

这里的 n 表示自然数. 可以利用类似于证法 2 中所用的方法来证明这个断言.

我们将图的边一个接一个地选出来，后面选出来的边和所有前面选出来的边没有公共的端点. 这样一直进行下去，直到再选不出这样的边为止. 假设我们能选出 k 个边. 如果 $k \geqslant n$，那么断言被证明了. 我们假设 $k < n$，且在选出了边 P_1P_2，P_3P_4，…，$P_{2k-1}P_{2k}$ 之后，在其它的边中，每一条边至少有一个端点和点 P_1，P_2，…，P_{2k} 中的某一个重合. 这时顶点 P_{2k+1} 和 P_{2k+2} 至少和 P_1，P_2，…，P_{2k} 中的 n 个顶点相连（因此，不等式 $2k \geqslant n$ 对所有的情况都成立）.

如果我们能证明，在被选出的边中有这样一条边，它的一个端点和顶点 P_{2k+1} 相连，而另一个端点和顶点 P_{2k+2} 相连（在证法 2 中，P_3P_4 是这样的边），那么定理将被证明了，因为若我们从被选出的边中去掉刚才说的这条边，而补充两条新的边：一条是所去掉的这条边的一个端点和顶点 P_{2k+1} 连成的边，另一条是所去掉的这条边的另一个端点和顶点 P_{2k+2} 连成的边，这时所选取的边的个数增加了 1，而且只要所选取的边的个数不等于 n，我们就可以一直进行下去.

上面所提到的断言可证明如下. 首先注意，除了选出的 k 条边以外，其它任何一条边至少有一个端点和顶点 P_1，P_2，…，P_{2k} 中的某一个重合. 由于选出的边只有 k 条，而从 P_{2k+1} 和 P_{2k+2} 发出的边总共不少于 $2n$ 条，于是在这些 $2n$ 条以上的边中，至少有 3 条边的端点和同一条选出的边的端点重合，因为要不然的话，从 P_{2k+1} 和 P_{2k+2} 发出的边不得多于 $2k < 2n$ 条. 于是，在所选取的边中，有这样一条边，它的一个端点和顶点 P_{2k+1} 相连，而另一个端点和 P_{2k+2} 相连. 这条边的存在正是我们要证明的.

【证法 3】如果在图的边中有这样的边，把它去掉之后，所得到的新图仍然满足本题的条件，那么可以把这条边叫做多余的并把它去掉. 去掉图中所有多余的边（它们的个数是有限的，因为图是有限的）之后，我们得到新的图，在这个新图中，如果去掉任意一条边，那么至少有一个顶点的阶数（即从它发出的边数）小于 3. 本题断言只要对这样的图来证明就行了. 因为去掉多余的边并不破坏本题的条件（每一个顶点的阶数仍然大于或等于 3）.

我们研究这样的图，它的顶点和原图的顶点重合，而边是连接在原图中没有边相连的一对顶点的（这样的图叫做**补图**；见 § 68）. 因为从原图的每一个顶点发出的边不少于 3 条，所以从补图的每一个顶点发出的边不多于 2 条. 若从原图中去掉边将会破坏这个性质，因为这时在原图中至少有一个顶点的阶数小于 3 了. 因此，对补图补加边也会使它破坏上面所说的性质.

我们来弄清楚，为了使得一个图可以看成是原图的补图，这个图应该是怎样的图.

属于图的两个顶点仅仅在它们有边相连时，它们的阶数才可能都小于 2，因为如果它们之间没有边相连，我们将图补加上从一个顶点到另一个顶点的边，这时图的无论哪一个顶点的阶数都不大于 2，但这是不可能的. 由此推出，只能有这样一些图，在这些图中：1）所有顶点的阶数为 2；2）只有一个顶点的阶数小于 2，而所有其余的顶点的阶数都等于 2；3）有两个顶点的阶数为 1，且它们之间有边相连，而其余所有的顶点都是 2 阶的. 事实上，如果图有 3 个阶数小于 2 的顶点，那么它们彼此之间可以用边来连接，于是它们之中的每一个都发出两条边，但这是不可能的，因为根据假设它们的阶数小于 2.

因为每一条边有两个端点（每一条边连接图的两个顶点），所以，不管边的个数有多少，图的顶点被它们连接的次数是偶数. 这就意味着，图的所有顶点的阶数之和是偶数. 由此推出，如果图只有一个阶数小于 2 的顶点，那么它不可能发出任何一条边（这种孤立点的阶数等于 0）. 于是我们证明了原图的补图的一个重要性质：如果补图的边是从 2 阶顶点发出的，那么这条边的另一个端点也是 2 阶顶点.

这样一来，对于 2 阶顶点可以断言：连接它们的边所构成的环路是“多边形”，因为当从一个 2 阶顶点出发我们到达另一个 2 阶顶点，从这个 2 阶顶点再前进又可以到达第三个 2 阶

顶点，等等，只要没回到原来的 2 阶顶点就可以一直走下去．像上面所证明的那样，原图的补图可能含有 6 个，5 个或 4 个 2 阶顶点．如果有 6 个 2 阶顶点，那么连接它们的边或者构成一个六边形，或者构成两个三角形．如果有 5 个 2 阶顶点或 4 个 2 阶顶点，那么连接它们

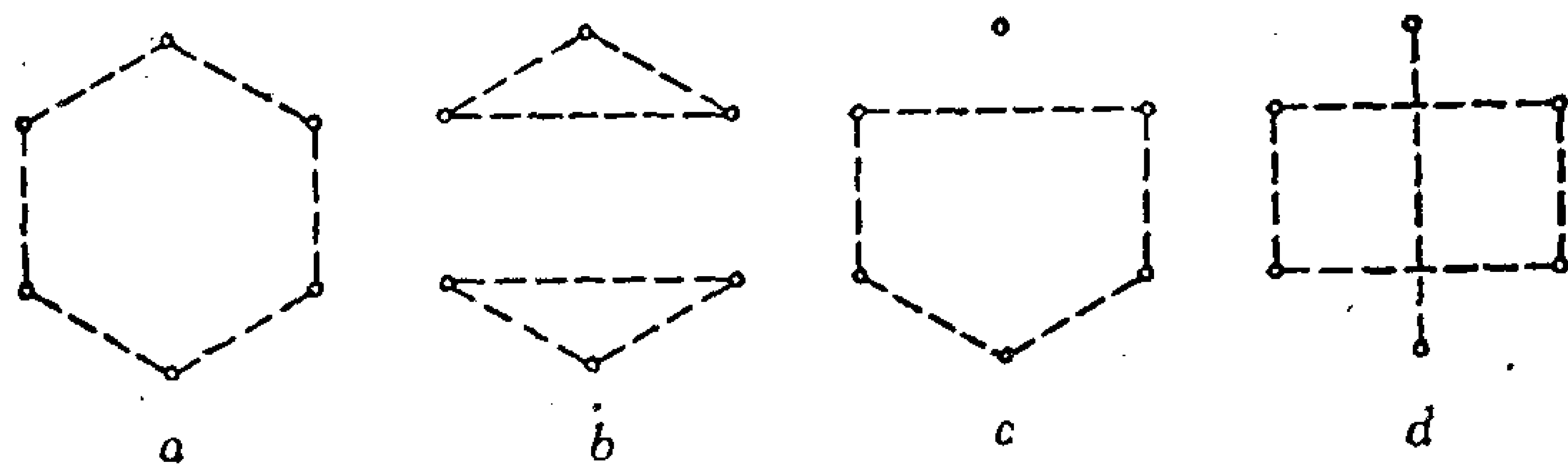


图　213

的边构成五边形或四边形．这样一来，所有多边形的边数不小于 3．

于是我们弄清了原图的补图有下列各种形状（图213）：*a*）六边形；*b*）两个没有公共顶点的三角形；*c*）由一个五边形和一个单独的顶点构成的图；*d*）由一个四边形和两个有边相连的顶点所构成的图．

对于所有四个图，不难补加三条边，使得这些边连接所有 6 个顶点而又没有公共端点．（在图214中画了两个图，每一个图都对应于图213中所表示的四种图的任一个）．这意味着，在工厂所生产的布中，总可以挑选出三种由所有 6 种颜色的纱生产出来的不同花色的布．★

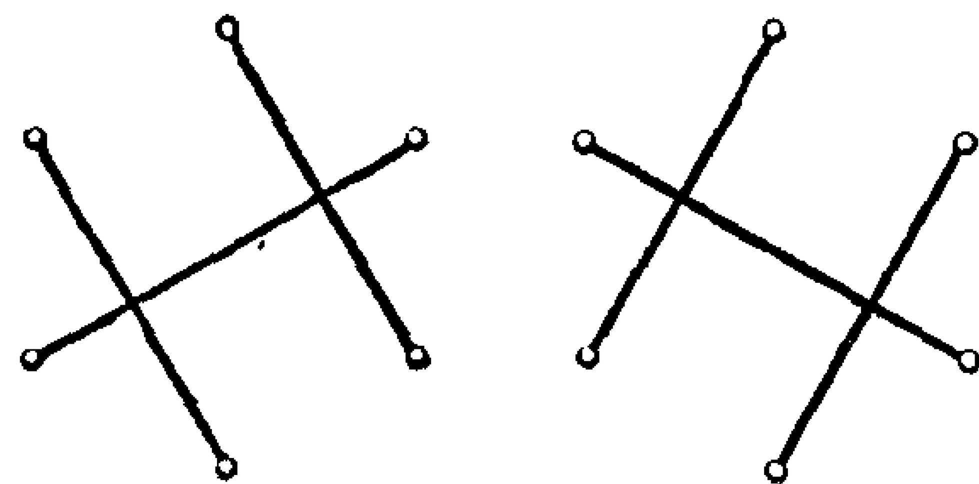


图　214

§73. 关于哈密尔顿图

将图214中所画的两个图一个放在另一个的上面，我们得到图215所画的六边形．可以走遍这个六边形的所有顶点，而且每一个顶点仅仅经过一次．如果由图的边可以作成一个包含图的所有顶点的环路，这些顶点被图的边一个接着一个地连接起来，使得当沿着环路走一遍时，每一个顶点仅仅遇到一次，那么这样的环路叫做**哈密尔顿环路**，而图的本身叫做**哈密尔顿图**．170题的断言可以叙述成下面的样子：**具有 6 个顶点且其阶数不小于 3 的图是哈密尔顿图**．当然，我们仅仅考虑任何两个顶点不能用多于一条的边连接的图．

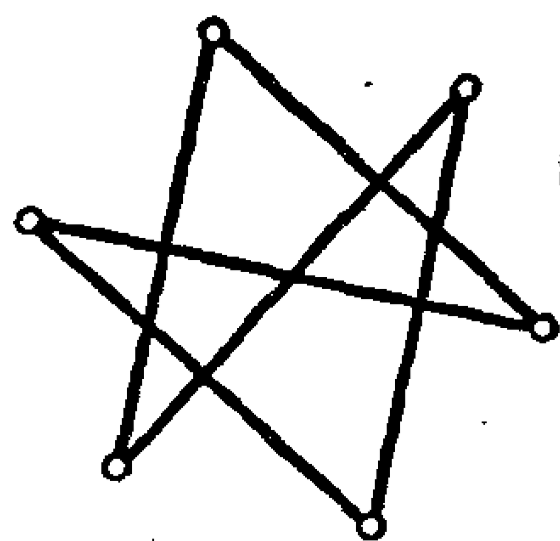


图　215

本题的断言可以推广．如果代替 6 而取 n 个顶点，代替最小的阶数 3 而规定顶点的最小阶数等于 $\frac{n}{2}$（自然数 n 应该大于 2，而在其它方面是任意的），那么断言仍然是正确的．

我们来证明：**如果图有 n 个顶点（$n \geqslant 3$）且每一个顶点的阶数不小于 $\frac{n}{2}$，那么这样的图是哈密尔顿图**．这个定理是嘎波尔・狄拉克在1951年证明的．下面的证明属于拉约什●波

沙（他想出这个证明还是在中学学习的时候）.

我们证明等价的断言：**如果图 G 有 n 个（$n\geqslant 3$）顶点，并且不是哈密尔顿图，那么它的某一个顶点的阶数小于 $\frac{n}{2}$.**

图 G 至少有两个顶点没有用边连接，因为完全图（其每一对顶点彼此之间用边连接起来了）是哈密尔顿图．我们把这两个顶点用边连起来．如果连接边以后，所得到的图未成为哈密尔顿图，就照此重复做下去．经过有限步以后，总可以作出哈密尔顿图，因为将有限图的顶点两两连接起来的边的个数是有限的．我们去掉最后所连的一条边，设这条边是 P_1P_n．

所得到的图 G_1 和原来的图 G 有同样多个顶点，而且从图 G 变到图 G_1 时，任何一个顶点的阶数没有降低．因此，只要证明在图 G_1 中可以找到一个阶数小于 $\frac{n}{2}$ 的顶点就行了．在图 G_1 中存在一条从 P_1 到 P_n 的路径经过这个图的所有顶点而且经过每一个顶点仅仅一次，因为对 G_1 添加上边 P_1P_n 后，我们得到哈密尔顿图（图216）．我们将图 G_1 的顶点标记成那样的次序，使得它们依次出现在 P_1 到 P_n 的路径中：P_1，P_2，P_3，…，P_n，因此图 G_1 包含有边 P_iP_{i+1}，对于所有的 $i=1, 2, \cdots, n-1$ 都如此．设 P_1 是 k 阶顶点，P_n 是 l 阶顶点．我们用 $P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots, P_{i_k}$ 表示和顶点 P_1 有边相连的顶点，其中 $i_1=2<i_2<\cdots<i_k\leqslant n-1$．这时顶点 P_{i_j-1}（其中 $j=2, 3, \cdots, k$）不能和顶点 P_n 有边相连，因为要不然的话，图 G_1 包含有哈密尔顿环路 $P_1P_2\cdots P_{i_j-1}P_nP_{n-1}\cdots P_{i_j}P_1$．因此，顶点 P_n 至少和顶点 P_1，P_2，…，P_{n-1} 中的 k 个顶点没有边连接，于是 $l\leqslant n-1-k$，$l+k\leqslant n-1$．这样一来，在数 k 和 l 中，至少有一个小于 $\frac{n}{2}$．于是定理得证．

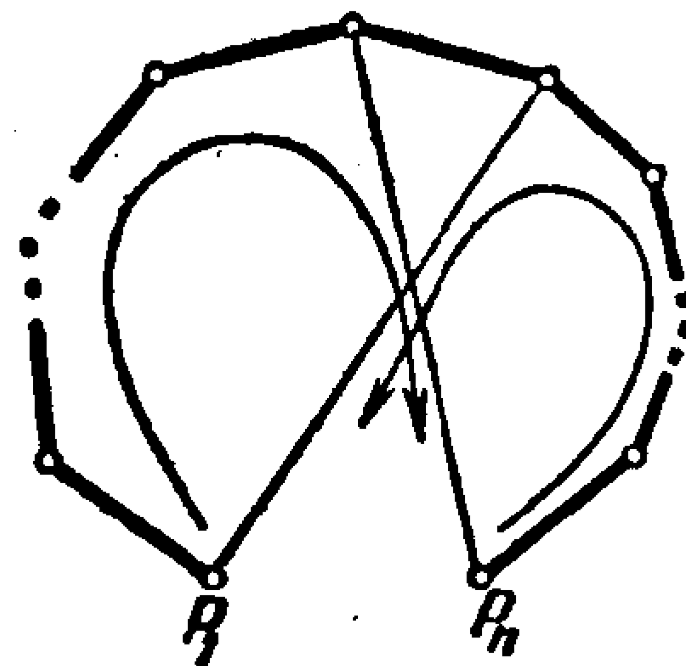


图 216

利用类似的方法，波沙证明了下面更一般的定理：

设图 G 有 $n\geqslant 3$ 个顶点。如果对于每一个 $k<\frac{n-1}{2}$，阶数不超过 k 的顶点的个数小于 k，而且对于奇数 n，$\frac{n-1}{2}$ 阶的顶点的个数不超过 $\frac{n-1}{2}$，那么 G 是哈密尔顿图.

171．假设 a_1，a_2，…，a_n 是自然数 1，2，…，n 的某一排列．对 1，2，…，n 的所有排列，求和

$$|a_1-1|+|a_2-2|+\cdots+|a_n-n|$$

的最大值．

【**解**】和数中的绝对值符号是可以去掉的，只要在 $a_k-k<0$ 的地方将数 a_k 和 k 都反号就行了．这样一来，我们可以把原来的和数表示成 $2n$ 个被加项（带有不同的符号）的和，在这些被加项中，数 1，2，…，n 中的每一个数出现两次，而且有 n 个被加项是负的．从数 1，1，2，2，…，n，n 的和中减去那些负的被加项❶的和的两倍，便可得到原来的和的

❶ 注意：这里说的"负的被加项"是一种方便的说法，实际上是指它们的绝对值．——中译者注．

值．因此，如果负的被加项的和最小，原来的和达到最大值．因为负的被加项有 n 个，所以它们的和不可能小于数列 1，1，2，2，…，n，n 的前 n 项的和．当挑取数 1，2，…，n 的适当的排列，可以使得在原来的和中具有负号的正好是这前 n 项．例如，排列 n，$n-1$，…，1 就是这样的排列，它把原来的和化为

$$|n-1|+|(n-1)-2|+\cdots+|1-n|.$$

于是，剩下的只要计算最大的和了．我们注意到，无论从和的哪一端（左端或右端）往和的中间走，每下一个被加项总比前一项减少 2．和的两端的项等于 $n-1$．当往和的中间走时，只要没达到中间项，它的项的值总在减小．可能有两种情况：或者有两个中间项等于1，或者一个中间项等于 0．

因此，如果数 n 是偶数，那么算出公差为 2，项数为 $n/2$ 的算术级数 1，3，…，$n-1$ 的和的二倍，便求得了原来的和的最大值．这样一来，当 n 是偶数时，原和的最大值等于 $n^2/2$．如果 n 是奇数，那么算出公差为 2，项数为 $(n-1)/2$ 的算术级数 2，4，…，$(n-1)$ 的和的二倍，便求得了原和的最大值．这样一来，当 n 是奇数时，原和的最大值等于 $\frac{n-1}{2}\cdot(n+1)=\frac{n^2-1}{2}$．

不用算术级数求和公式，如果用特别的办法来选取数 1，2，…，n 的排列，也可以算出原和的最大值．

当 $n=2k$ 时，选取排列 $k+1$，$k+2$，…，$2k$，1，2，…，k 是方便的．在去掉原和的绝对值符号以后，在每一个差 a_l-l 中，数 1，2，…，k 是较小的数，而且数 1，2，3，…，k 中的每一个在较小的数中出现两次．根据早先的证明可以断定：对于排列 $k+1$，$k+2$，…，$2k$，1，2，…，k，原来的和达到最大值．每一个差的绝对值等于 k．因此，所有绝对值的和等于 $2k^2$．

当 $n=2k+1$ 时，选取排列 $k+2$，$k+3$，…，$2k+1$，$k+1$，1，2，…，k 是方便的．在每一个差中，较小的数又是 1，2，…，k，但是正中间的差，减数和被减数都等于 $k+1$．由此可以得出结论：对于排列 $k+2$，$k+3$，…，$2k+1$，$k+1$，1，2，…，k，原和达到最大值．最中间的差的绝对值等于 0，所有其它的差的绝对值等于 $k+1$．因此，绝对值的和等于 $2k(k+1)$．

两个结果可以合起来：原和的最大值等于数 $n^2/2$ 的整数部分，也就是不超过 $n^2/2$ 的最大整数．

172．在平面上给定六个点，其中任何三点都不在一直线上．证明：在这六个给定的点中，可以挑出这样三个点，使得在这三个点构成的三角形中，有一个角不小于120°．

【证明】本题等价于下面的命题：从在平面上给定的 6 个点中总可以挑选出这样 3 个点，使得从一个点引出的通过其它两个点的射线之间的夹角不小于120°．我们在这种形式下来证明本题的断言．

给定的点或者构成一个凸六边形，或者其中有 3，4 或 5 个点构成三角形，凸四边形或凸五边形，而其余的点在它们的内部．我们把三角形，四边形，五边形或六边形叫做给定点的**凸包**❶．

❶ 在给定的平面点上插上小针（每个小针和平面垂直），并且在这些小针上缠上线，把这些线拉紧，我们就可得到给定点的凸包．

如果凸包具有六边形的形状，那么至少有一个角不小于120°，因为六个角的和等于720°.

如果凸包具有四边形或五边形的形状，那么，假若我们作一条对角线（在四边形的情况）或从一个顶引两条对角线（在五边形情况），我们总可以把它划分成三角形. 在所得到的三角形中，某一个三角形必定包含有给定的点. 因此，总可以得到一个三角形，它的顶点是给定的点，还包含有其它给定的点，这个点不和三角形的任一顶点重合. 把这个被包含的点和三角形的三个顶点连接得三个线段，这些线段之间的夹角至少有一个不小于120°，因为三个夹角之和等于360°.

如果凸包是三角形，不难用上面的方法进行证明.

这就证明了本题的断言.

对于本题的条件和它的结论我们指出下面几点：

1) 6个给定点中的任何3点不在一直线上不是本质的. 如果某3个点在一直线上，那么由中间的点到边上的点的射线之间的夹角为180°（即大于120°）.

2) 将6个给定的点中的每一个点和其余五个点连接成线段. 对每一个点来说，线段之间最大的夹角能否不大于120°，如果可能，那么是在什么情况下?

如果6个给定点的凸包是六边形，将给定的点两两连成线段，那么对每一个点来说线段之间最大的夹角不超过120°仅仅当所有这些角都等于120°的时候，这时六边形的边和某一个正六边形的边平行（凸包的本身不一定具有正六边形的形状）.

如果6个给定点的凸包不是六边形，那么正像在172题的证明中所推得的那样，在给定的点中，可以挑选出这样三个点，使得以这三个点为顶点的三角形至少还包含一个给定的点P，而且点P对这个三角形的三边所张的角都为120°，因为要不然的话，对某一边的张角将大于120°.

如果这个条件满足，只要再取一个给定点Q，这时在两两连接6个给定点的线段的夹角中，最大的夹角必定大于120°（图217）. 事实上，如果点Q在由点P引的通过三角形的一个顶点的射线上，那么三个给定点在一直线上，连接中间的点和旁边两个点的线段之间的夹角等于180°，换句话说，它大于120°. 如果点Q在由点P引的通过三角形的顶点的射线把平面所分成的一个120°的角内，那么由点P引的通过点Q的射线和由点P引的通过点Q所在的120°的角的外面的点的射线之间的夹角大于120°. 于是我们证明了下面的断言：**假设在平面上给定6个点，那么在由每一个点引的通过其它5个点的射线之间的6组夹角中，最大的夹角总不小于正六边形的顶角，而且仅仅只有当给定的6个点分布在一个六边形的顶点上且这个六边形的边与正六边形的边平行的时候，上面所说的最大的夹角才能和正六边形的顶角相等.**

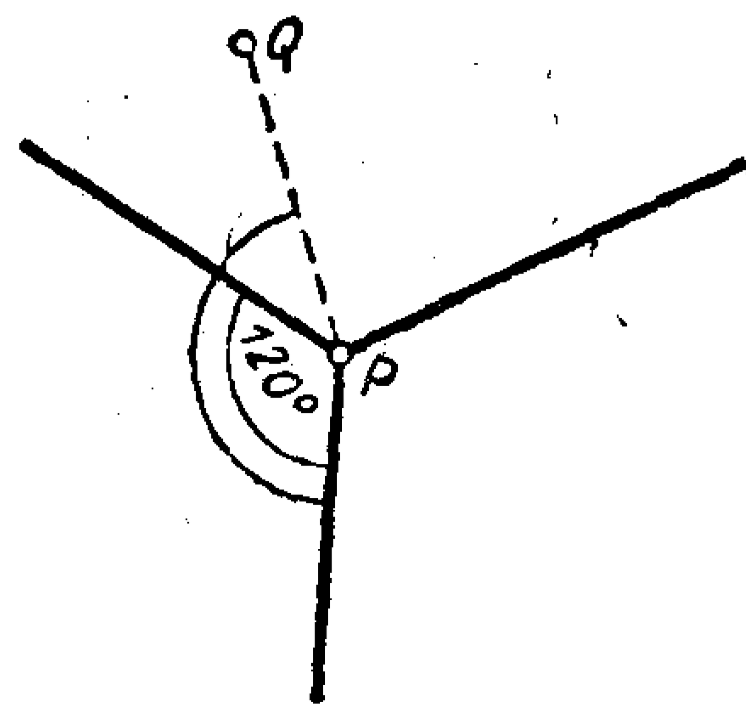


图 217

3) 如果代替6个点，在平面上给定3、4或5个点，上面所证明的命题仍然成立. 事实上，如果给定的点在作为它们的凸包的多边形的顶点上，那么，如果从它们的每一个顶点引通过多边形的其它的顶点的射线时，我们将发现，射线之间最大的夹角分别不小于正三角形，正方形或正五边形的内角，而且仅在下面的情况下和它相等：如果具有相应边数的多边形的所有的角都相等，即如果它的边和具有同样边数的正多边形的边平行. 如果在给定的点（如果它们有4个或5个）中，有一个点不和作为它们的凸包的多边形的顶点重合，那么由这点引的通过多边形的顶点的射线之间最大的夹角不小于120°，可是正方形和正五边形的内角小于120°.

不难证实，如果在平面给定的是7个点，我们所指出的规律性不再有效了. 我们来证明下面的断言：**如果在平面上给定7个点，那么在从某一点引的通过其它两点的射线之间的夹角中，可以找到大于120°的角；另一方面，对于任一角$\alpha>120°$，可以指出平面上7个点的一种分布，使得从任一点引的通过其它**

两点的两条射线之间夹角总小于α. 对此还应补充一点：在一般的情况下，这样分布的7个点不在凸七边形的顶点上.

如果7个给定点的凸包具有多边形的形状，它的边数小于7，那么我们的断言可由2)中所证明的推出. 如果7个给定点分布在凸七边形的顶点上，那么从每一个顶点引的通过其余所有的点的射线之间最大的夹角不小于正七边形的内角，而正七边形的内角大于120°.

为了证明断言的第二部分，我们取一个正三角形，在它的每一个顶点附近，用和这个顶点的对边平行的直线切去一个小三角形，将7个点放在所得到的六边形的顶点上和它的中心（图218）. 只要调整所切去的"角"的大小，总可以使得从六边形的中心所引的通过它的顶点的射线之间最大的夹角与120°的角相差任意小.

这个结果属于美国数学家$L\cdot M\cdot$布留门达利.

173．证明：如果u和v是整数，u^2+uv+v^2能被9整除，那么u和v都能被3整除.

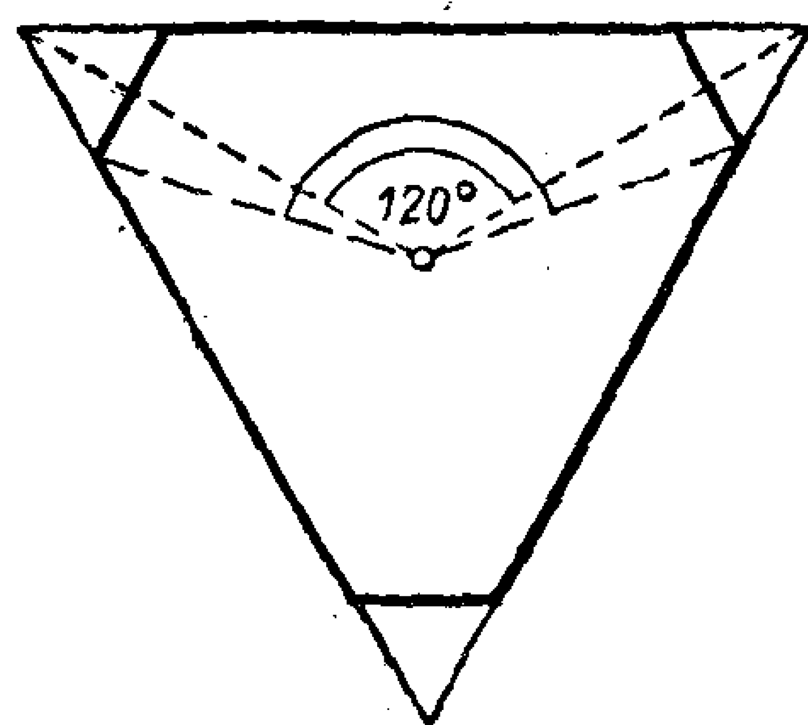


图 218

【证明】数u和v的每一个被3除时，其余数只能是0，1，2. 我们取余数的所有可能的组合（共9种）可以得到本题的证明. 但是有比较快的证法，无需取所有的组合. 我们研究这个证法.

把原来的表达式变成下面的形式

$$u^2+uv+v^2=(u-v)^2+3uv.$$

根据本题条件，原表达式能被9整除，因而也能被3整除，因为右边的第二个被加项能被3整除，所以第一个项也能被3整除.

整数的平方能被3整除仅仅当这个整数的本身能被3整除的时候才有可能，这时它的平方能被9整除.

因为原表达式能被9整除，所以右边的第二项（$3uv$）能被9整除. 因此uv能被3整除. 这只有当它们之中的一个因子能被3整除时才有可能. 但在前面我们证明了差$u-v$能被3整除. 这样一来，另一个因子也能被3整除. 于是，两个数u和v都能被3整除，这就是所要证明的. （显然，如果数u和v能被3整除，那么原表达式能被9整除.）

174．设凸六边形$ABCDEF$的对边AB和DE，BC和EF，CD和FA平行. 证明：$\triangle ACE$和$\triangle BDF$的面积相等.

【证法1】我们作对角线AD，BE和CF. 假设R、P、Q是它们的交点（这三个点可能重合）. 这些点把$\triangle ACE$和$\triangle BDF$分成三角形(图219)，

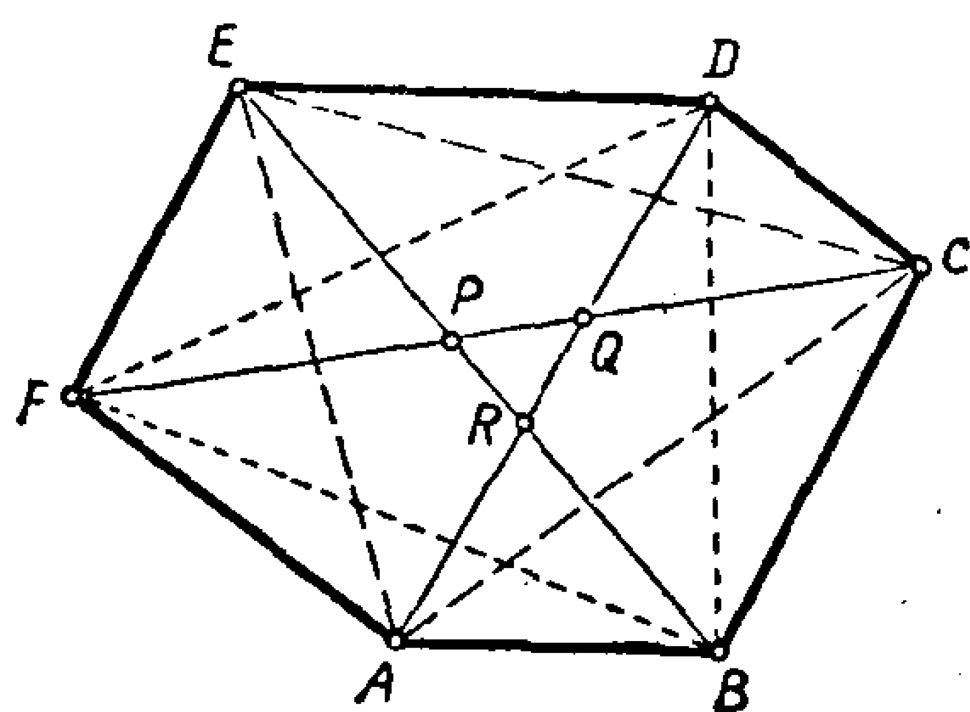
$$\triangle ACQ,\ \triangle CEP,\ \triangle EAR,\ \triangle PQR\ (\triangle ACE),$$
$$\triangle DFQ,\ \triangle FBP,\ \triangle BDR,\ \triangle PQR\ (\triangle BDF). \tag{1}$$

如果我们能证明上排的每个三角形的面积分别等于它下面的各个三角形的面积，那么本题的断言就被证明了. 对于最后两个三角形，它们的面积显然相等. 我们来证明第一对的两个三角形的面积相等. 这可由$\triangle ACF$和$\triangle ADF$的面积相等推出，因为在$\triangle ACF$和$\triangle ADF$中，AF是公共边，由于六边形的对边DC和AF平行，故由顶点C和D向底边作的高相等. 由$\triangle ACF$和$\triangle ADF$中除去它们的公共部分（$\triangle AQF$）所得到的$\triangle ACQ$和$\triangle DFQ$的面积也相等. 用类似的方法可以证明其余各对三角形的面积相等. 这样，本题断言被证明了.

在上面的证明中，我们是从直观的图形出发的，认为（1）中的三角形无空隙地填满了$\triangle ACE$和$\triangle BDF$．我们要指出，本题可以不用这种不严格的叙述来证明．

所作的对角线AD，BE和CF和$\triangle ACE$和$\triangle BDF$相交．事实上，根据本题条件，六边形$ABCDEF$是凸的，例如，由于顶点B，C和顶点E，F在直线AD的不同的两侧，所以直线AD和线段CE和FB相交，这也就意味着，直线AD和$\triangle ACE$以及$\triangle BDF$相交．对角线AD，BE和CF的交点属于$\triangle ACE$和$\triangle BDF$，因为每一个对角线通过这两个三角形的一个顶点且和它的对边交于内点，于是将其它两个对角线的端点分隔开．

如果三个对角线相交于一点，那么不再需要证明什么了．我们假设对角线AD，BE和CF不交于一点．顶点A，C，E在$\triangle PQR$的边QR，PQ，RP的延长线上．如果顶点E在边RP的P外的延长线上，那么顶点A不能在边QR的Q外的延长线上，因为要不然的话，$\triangle PQR$和$\triangle ACE$分布在直线PQ不同的两侧，因此，$\triangle PQR$不可能在$\triangle ACE$内．这样一来，或者是顶点A在边QR的R外的延长线上，顶点C在边PQ的点Q外的延长线上，顶点E在边RP的点P外的延长线，或者顶点A，C，E分别在$\triangle PQR$的相应边的相反的延长线上（图219）．于是断言被证明了．类似的断言对$\triangle BDF$也是正确的．



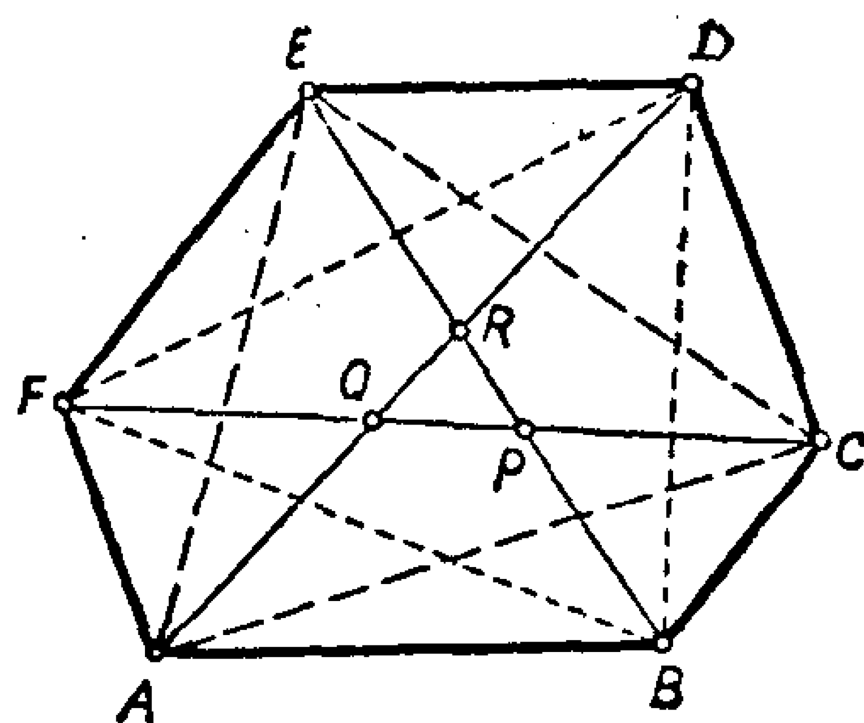


图　219

所证明的断言可以用下面的方式来叙述．

通过三角形的顶点作和对边相交的直线，我们来研究它们所构成的三角形（**如果这些直线不相交于一点**）．**这时原三角形的顶点在里面的三角形的边的延长线上，而且在里面三角形的不同的顶点外面**（在图220中，原三角形的顶点用小白圈表示，里面的三角形的顶点用小黑圈表示）．

【证法2】我们第一次分别将六边形的三组边AB和BC、CD和DE，EF和FA补充成平行四边形，第二次将三组边BC和CD，DE和EF，FA和AB补充成平行四边形．在这些平行四边形中，（不和六边形$ABCDEF$的顶点重合的）第四个顶点记作P，Q，R和U，S，T（点P，Q，R以及点U，S，T在特殊情况下可能重合）．如果在这些平行四边形中，和六边形$ABCDEF$的顶点相重合的两个顶点用对角线连起来，我们将得到三角形ACE和BDF（图221）．

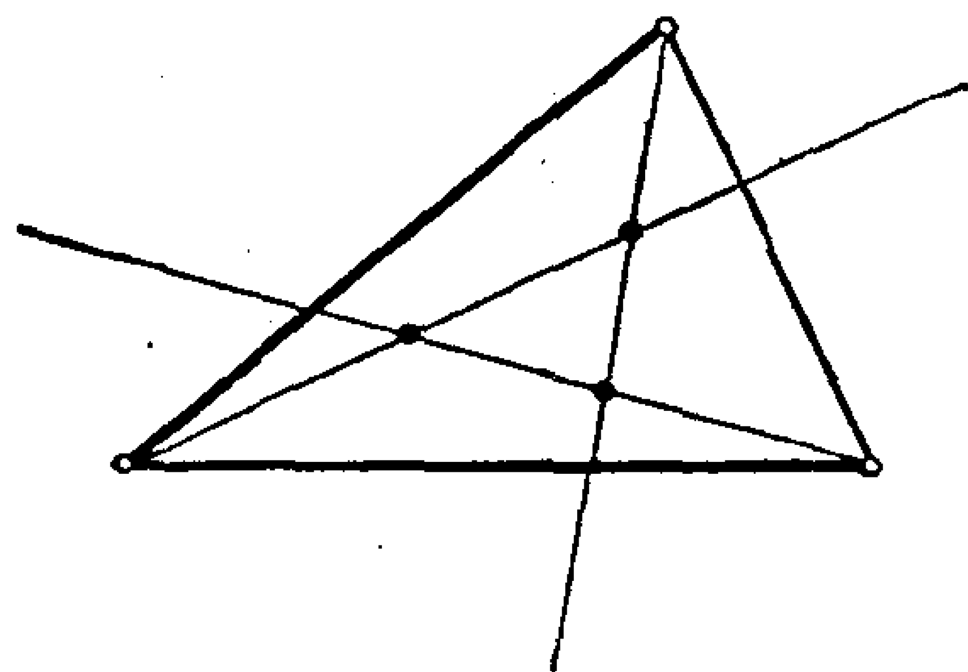


图　220

在用两种方法将六边形$ABCDEF$划分成平行四边形时，对于任意两个平行四边形来说，

由它们的公共顶点（也是六边形的顶点）所引出的边是重合的（在同一直线上），因为每一

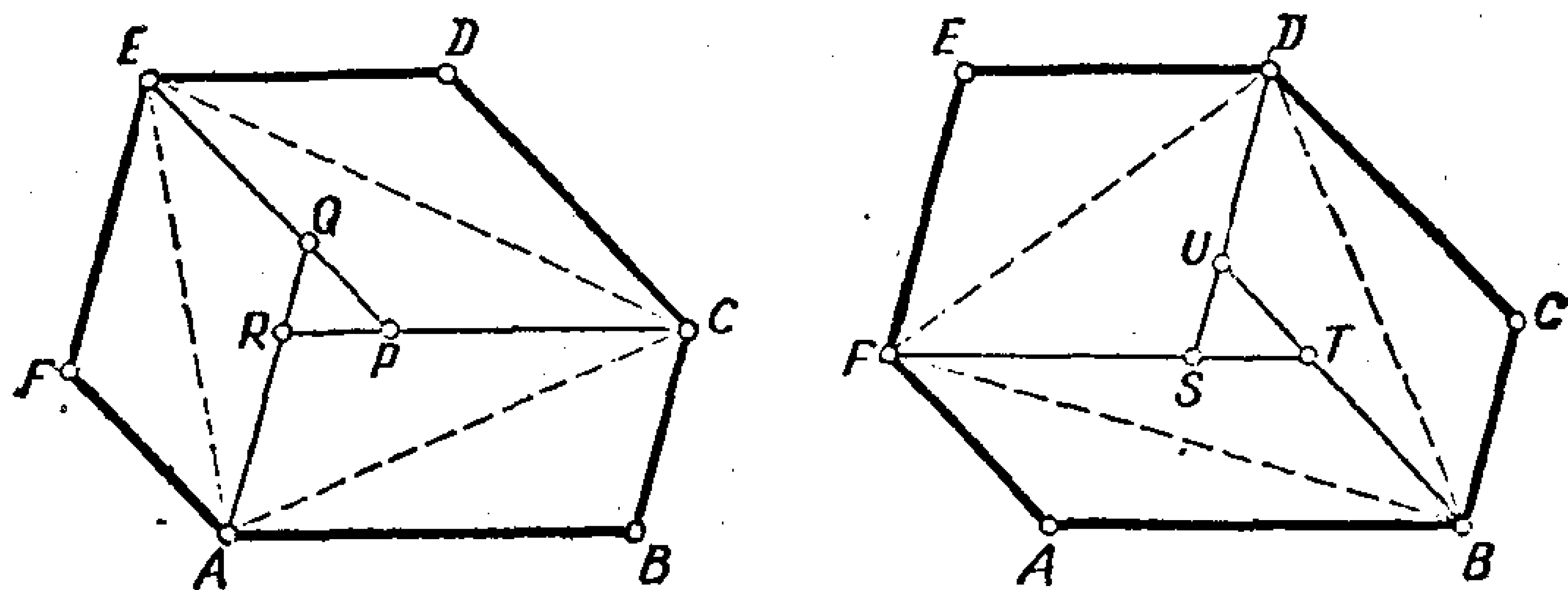


图 221

个这样引出的边和它所在的平行四边形的对边平行，而这些边和六边形的两个对边重合，根据本题条件，它们是平行的．因此△PQR和△STU的边（如果三角形不缩成一点）平行于六边形的一对边且等于它们的差，于是△PQR和△STU全等且三个平行四边形$ABCR$，$CDEP$，$EFAQ$的面积之和等于三个平行四边形$FABT$，$BCDU$，$DEFS$的面积之和．由此推出，△ACE和△BDF——由三个一组的平行四边形的"一半"和两个全等的三角形中的一个所组成的——的面积相等．于是本题断言得证．

关于证法 2 也需要做些注解：

1） 如果能不利用图形的帮助来证明平行四边形的一半和它们的边所交成的三角形既无空隙又不重叠地填满了△ACE和△BDF，那么上面的证明才是比较严格的．例如，我们来研究△ACE．直线AQ，CR，EP把它分成几部分．这些直线相交时，构成△PQR，因为，例如直线AQ和六边形的边BC和EF平行，而且由于六边形$ABCDEF$的凸性，线段BC和EF分布在直线AQ的两侧．对于直线CR，EP以及对△BDF可进行类似的论证．在每一个△ACE和△BDF中，这些直线的分布如同图220所示的那样，由此推出所要的断言．

2） 由证法 2 推出，△ACE的面积等于六边形$ABCDEF$的面积和△PQR的面积的算术平均值，而△BDF的面积等于六边形$ABCDEF$的面积和△STU的面积的算术平均值．这样一来，△ACE（以及△BDF）**的面积不小于六边形$ABCDEF$的面积的一半**．由此可以断言：**在由六边形$ABCDEF$的两个相邻的边构成的三角形中，至少有一个三角形的面积不大于六边形的面积的 1/6**．（具体地说，在三个三角形ABC，CDE，EFA中至少有一个的面积不大于六边形的面积的 1/6，同样地，在△BCD、△DEF，△FAB中，至少有一个的面积不大于六边形的面积的 1/6．）

如果去掉六边形的对边平行这个条件而研究任意的凸六边形，那么不难作出一个例子，使得△ACE和△BDF的每一个的面积小于六边形的面积的一半，也不难作出一个例子，使得△ABC，△CDE，△EFA的每一个的面积大于六边形的面积的 1/6．我们不加证明地说一下：在由六边形相邻的两个边构成的六个三角形中，不可能每一个三角形的面积都大于六边形的面积的 1/6，甚至六个三角形的面积的几何平均值也不可能大于六边形的面积的 1/6．

【**证法3**】我们约定：对于△ABC，如果从顶点A到B再到C又到A是逆时针方向，我们就把它的面积算作正的，如果是顺时针方向，面积就算作负的．

不难看出，对于△ABC所在的平面上的任一点O，将有等式（图222）

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCA}.\text{❶} \qquad (2)$$

如果某三点在一直线上，那么它们构成的"三角形"蜕化成一个线段，其面积认为等于零．

❶ $S_{\triangle ABC}$表示△ABC的面积．——中译者注．

在六边形$ABCDEF$所在的平面上取一点O，并研究所有以点O为其一个顶点的三角形.

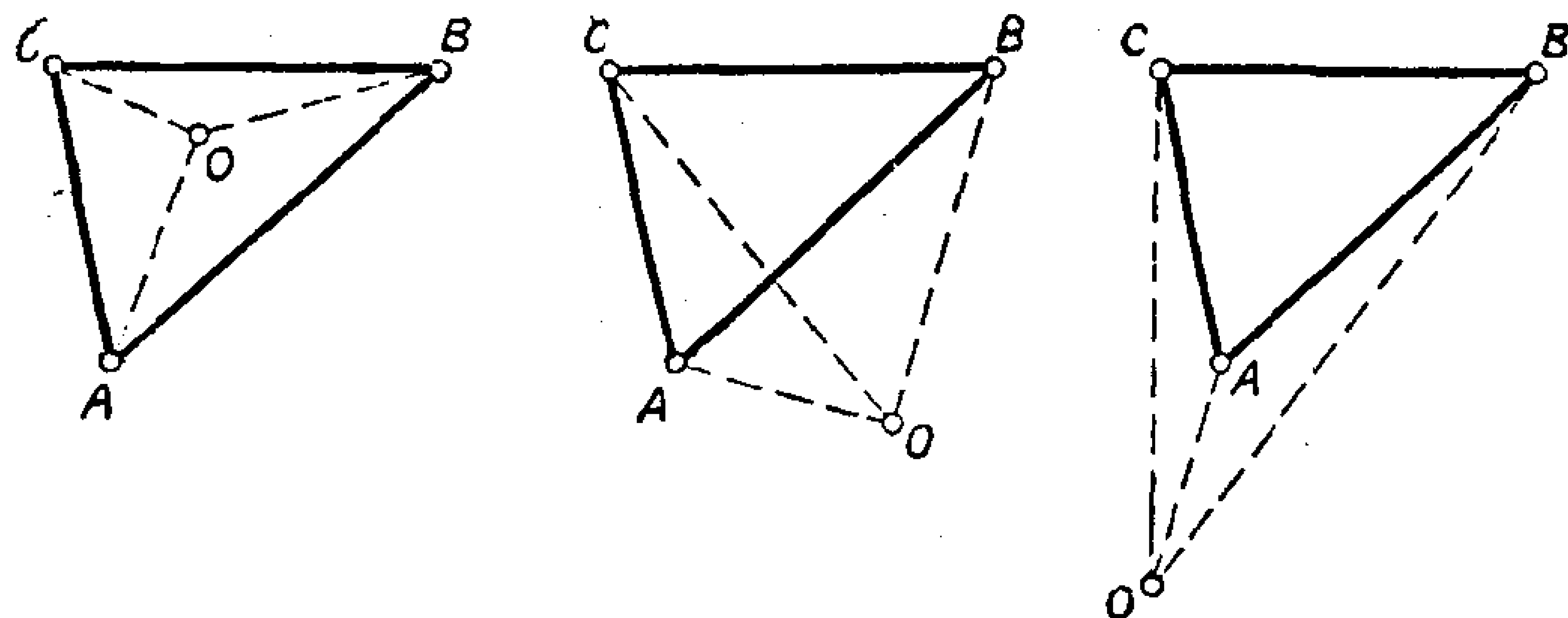


图 222

对于有向三角形（即面积可正可负的三角形），通常的平面几何学的命题仍然成立：如果$\triangle ABC$和$\triangle ABD$的顶点C和D在与它们的公共边AB平行的直线上，那么$\triangle ABC$的面积和$\triangle ABD$的面积相等. 事实上，$\triangle ABC$的面积的绝对值等于$\triangle ABD$的面积的绝对值，而当顶点沿着与三角形的底边平行的直线运动时，周界的迴转方向不变.

因此，如果在六边形$ABCDEF$中，$AB \parallel DE$，$BC \parallel EF$，$CD \parallel FA$，那么有向三角形$\triangle ABE$和$\triangle ABD$，$\triangle CDA$和$\triangle CDF$，$\triangle EFC$和$\triangle EFB$的面积彼此相等（图223）. 由此，利用关系式（2），我们得到

$$S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OBE}+S_{\Delta OEA}=$$
$$=S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OBD}+S_{\Delta ODA},$$
$$S_{\Delta OCD}+S_{\Delta ODA}+S_{\Delta OAC}=$$
$$=S_{\Delta OCD}+S_{\Delta ODF}+S_{\Delta OFC},$$
$$S_{\Delta OEF}+S_{\Delta OFC}+S_{\Delta OCE}=$$
$$=S_{\Delta OEF}+S_{\Delta OFB}+S_{\Delta OBE}.$$

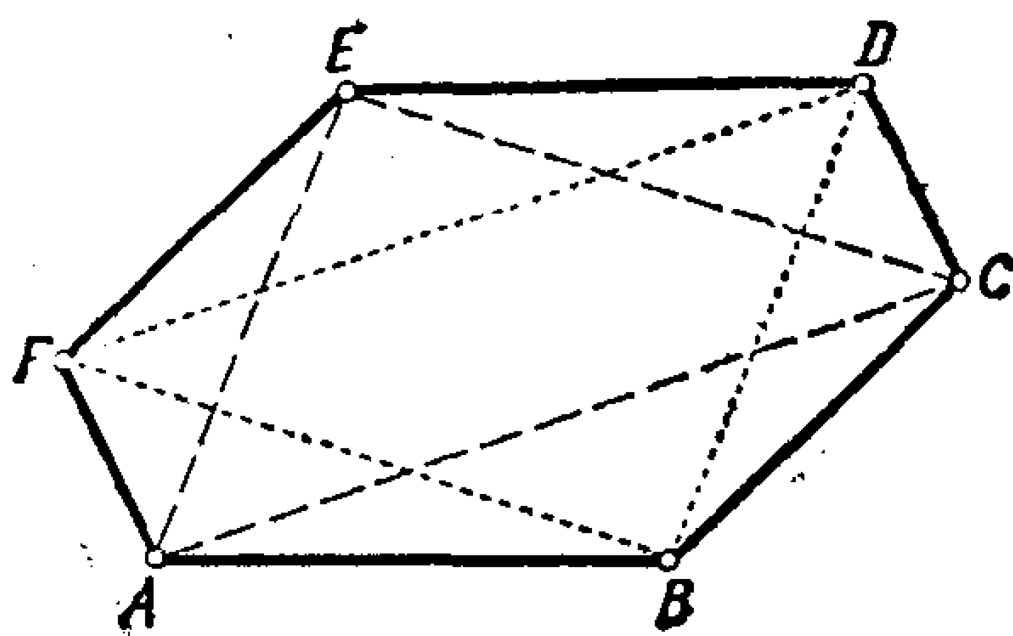


图 223

在上面的三个等式中，左边第一项和右边第一项是相同的，左边三个第二项和右边三个第三项也是相同的，仅仅是顺序不相同. 因此，将三个等式左右分别相加，我们得到等式

$$S_{\Delta OEA}+S_{\Delta OAC}+S_{\Delta OCE}=S_{\Delta OBD}+S_{\Delta ODF}+S_{\Delta OFB},$$

由此，利用关系式（2），我们得到

$$S_{\Delta ACE}=S_{\Delta BDF},$$

这就是所要证明的.

应该注意到，在证法3中，我们仅仅利用了六边形的对边平行这个条件，因此本题的断言在下面的情况也是成立的：如果原六边形是非凸的，即它的边可以相交于不是六边形的顶点的其它点.（在图224中画出了若干个这样的六边形.）另一方面，因为所有的计算是对有向三角形进行的，所以从174题的证法3推出，$\triangle ACE$和$\triangle BDF$的面积不仅绝对值相同，而且符号也相同.

175. 证明：如果x，y，z是不同的整数，而n是非负的整数，那么

$$\frac{x^n}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^n}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$

是整数.

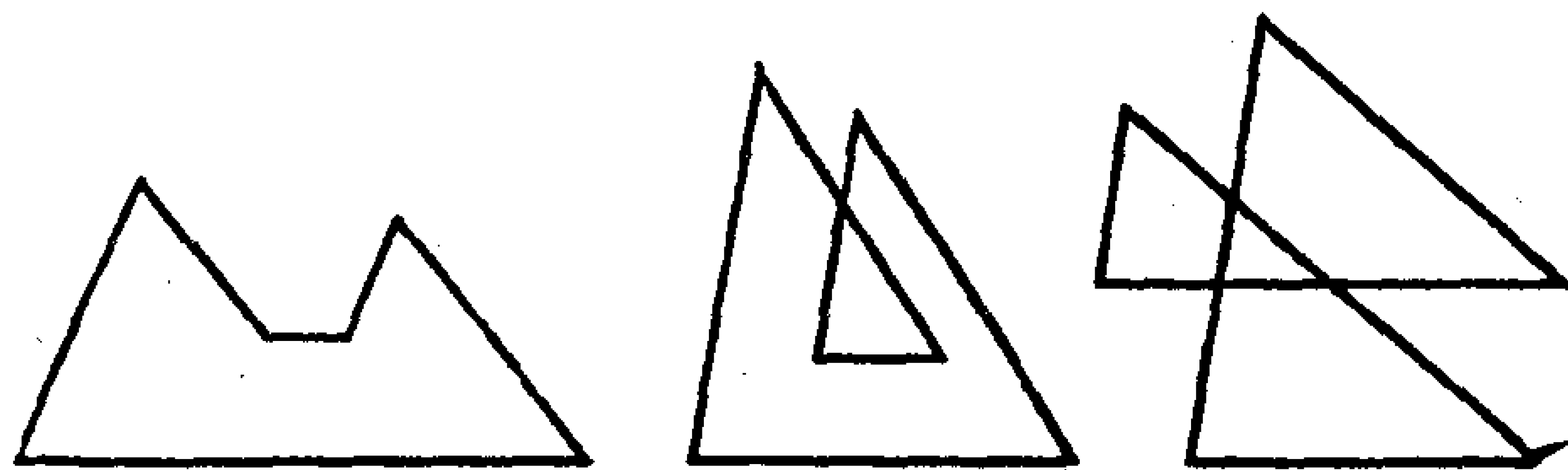


图 224

【证法1】我们证明：如果将原表达式的三个被加项通分，那么分子能被分母整除（多项式整除）．它们的商仍然是三个变元x，y，z的整系数多项式．这样一来，如果x，y，z是整数，那么原表达式也只能取整数值．

通分后，原表达式变成

$$\frac{x^n(y-z)+y^n(z-x)+z^n(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)}. \tag{1}$$

当$n=0$时，分子变成0：

$$(y-z)+(z-x)+(x-y)=0. \tag{*}$$

因此，当$n=0$时，原表达式的值变为0．其次，利用等式

$$x-y=-(y-z)-(z-x),$$

对任意的n可将分子变成

$$(x^n-z^n)(y-z)+(y^n-z^n)(z-x).$$

当$n=1$时，分子变成零．当$n\geqslant 2$时，可以提出因式$(x-z)(y-z)$，于是得到下面的形式

$$\begin{aligned}&(x-z)(y-z)[x^{n-1}+x^{n-2}z+\cdots+xz^{n-2}+z^{n-1}-\\&-y^{n-1}-y^{n-2}z-\cdots-yz^{n-2}-z^{n-1}]=\\&=(x-y)(x-z)(y-z)[(x^{n-2}+x^{n-3}y+\cdots+xy^{n-3}+y^{n-2})+\\&+z(x^{n-3}+\cdots+y^{n-3})+\cdots+z^{n-2}].\end{aligned}$$

方括弧中的x，y，z的多项式具有整系数，当x，y，z为整数时，它只能取整数值，这就是所要证明的．（当$n=2$时，方括弧中只剩下最后一项，当$n=3$时，只剩下第一个圆括弧中的项和最后一项．）

对于上面的证法必须注意下面几点：

1）当$n\geqslant 2$时，方括弧中的多项式的结构很简单：它是x，y，z的所有可能的幂指数之和为$n-2$的幂的乘积之和．

2）为了证明本题的断言，如果仅仅证明了对于任何给定的值x，y，z，表达式（1）的分子所相应的值能被每一个整数$x-y$，$x-z$ $y-z$单独整除是不够的．由此要得出（1）的分子能被乘积$(x-y)(x-z)(y-z)$整除必须要三个差$x-y$，$x-z$，$y-z$中的任何两个是互素的数．在一般情况下，这个条件是不满足的．

现在把表达式（1）的分子和分母看作三个变量x，y，z的多项式．多项式$x-y$，$x-z$ $y-z$没有非零次的公因式，即没有包含变量x，y，z的公因式，作为多项式，它们是互

素的．由此推出：在整系数多项式类中，从表达式（1）的分子中可以提取乘积$(x-y)(x-z)(y-z)$．但是，在做出这个结论时，我们不加任何证明地利用了比我们所要证明的断言深刻得多的定理．

如果利用关于多项式分解因式的定理，可以证实我们的论证的正确性．我们将这定理以下面的形式来叙述：**如果数t是多项式$f(x)$的零点，那么$f(x)$可以分解成因式$(x-t)$和某一个次数比多项式$f(x)$的次数低1次的多项式的乘积；如果$f(x)$是整系数多项式，t是整数，那么$f(x)$可以分解成因式$(x-t)$和某一个次数比多项式$f(x)$的次数低1次的整系数多项式的乘积**．这个命题可由§17的1）中所证明的定理直接推出．

下面的证明实质上是利用这个定理．

【证法2】如果$n=0$或$n=1$，表达式（1）的分子变成0．当$n\geqslant 2$时，将分子的项按x的降幂排列且用下面的方法将它们归并：

$$x^n(y-z)-x(y^n-z^n)+yz(y^{n-1}-z^{n-1})=$$
$$=(y-z)[x^n-x(y^{n-1}+y^{n-2}z+\cdots+z^{n-1})+yz(y^{n-2}+\cdots+z^{n-2})] \qquad (2)$$

（当$n=2$时，最后一个圆括弧中的项变成1）．我们把所得到的表达式看作是x的多项式f，而y和z当作整数参数（$y\neq z$）．当$x=y$时，等式（2）的左边变成零．因为$y\neq z$，所以右边方括弧中的因式也为零．这个因式是x的整系数多项式，而y是整数．因此，f可以表示成$(x-y)f_1(x;\ y,\ z)$的形式，其中$f_1(x;\ y,\ z)$是与y，z有关的x的整系数多项式，其次数比方括弧中的多项式低1次．

当$x=z$时，由于等式（2）的左边为零而f_1前面的乘积$(y-z)(x-y)$不为零（因为$y\neq z$），所以这个多项式f_1变成零．因为$f_1(x;\ y,\ z)$是x的与y，z有关的整系数多项式，而z是整数，那么f_1可以分解为乘积$(x-z)f_2(x;\ y,\ z)$，这里$f_2(x;\ y,\ z)$是x的与y，z有关的整系数多项式，其次数比多项式$f_1(x;\ y,\ z)$低1次．这样一来，把任意的整数值x_1代入到表达式（1）的经过变换后的分子中去，我们得到$(y-z)(x_1-y)(x_1-z)$和整系数多项式$f_2(x_1;\ y,\ z)$的乘积．因此，对整数x，y，z，表达式（2）仅有整数值，这就是所要证明的．

【证法3】假设表达式（1）用$P_n(x,\ y,\ z)$来表示．我们对n用完全数学归纳法来证明$P_n(x,\ y,\ z)$是三个变量x，y，z的整系数多项式．

当$n=0$时，断言是对的，因为表达式$P_0(x,\ y,\ z)$恒等于零．

假设对某一个值$n=k$，$P_k(x,\ y,\ z)$是x，y，z的整系数多项式．约去相同的项，我们得到恒等式

$$P_{k+1}(x,\ y,\ z)-zP_k(x,\ y,\ z)=$$
$$=\frac{x^{k+1}-zx^k}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^{k+1}-zy^k}{(y-x)(y-z)}=\frac{x^k-y^k}{x-y},$$

即

$$P_{k+1}(x,y,z)=zP_k(x,y,z)+(x^{k-1}+x^{k-2}y+\cdots+y^{k-1}),$$

其中当$k=0$时，应该用0来代替圆括弧中的和．因为根据归纳假设，$P_k(x,\ y,\ z)$是x，y，z的整系数多项式，所以类似的断言对$P_{k+1}(x,\ y,\ z)$也是对的．因此断言对所有的非负整数n被证明了．

【证法4】表达式

$$(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-(x+y+z)t^2+(xy+xz+yz)t-xyz$$

可看作t的多项式，当$t=x$，$t=y$，$t=z$时，它变为零．对于表达式

$$t^n(t-x)(t-y)(t-z)$$

也有上面所说的性质，其中n是任意的非负整数．这样一来，不管t是表示变量x，y，z中的哪一个，总有恒等式

$$t^{n+3}=t^{n+2}(x+y+z)-t^{n+1}(xy+xz+yz)+t^n xyz$$
$$(t=x,\ 或t=y,\ 或t=z) \qquad (3)$$

（不难直接验证它的正确性）．

和在证法3中一样，我们用$P_n(x, y, z)$来表示表达式（1）．这时，借助于恒等式（3）来变换表达式$P_{n+3}(x, y, z)$，我们得到新的恒等式

$$P_{n+3}(x,y,z)=(x+y+z)P_{n+2}(x,y,z)-$$
$$-(xy+xz+yz)P_{n+1}(x,y,z)+xyzP_n(x,y,z).$$

由此看出，如果对三个连续的整数值n，表达式$P_n(x,y,z)$是x，y，z的整系数多项式，那么对于n的所有更大的值，表达式$P_n(x, y, z)$也是x，y，z的整系数多项式．而$P_0(x, y, z)=P_1(x, y, z)=0$，$P_2(x, y, z)=1$．因此，对于$n$的所有非负的整数值，$P_n(x, y, z)$是$x$，$y$，$z$的整系数多项式．

176．在水平面上，三个点和天线的基点相距100米，200米，300米，从这三点测得天线的视角的和为90°．天线的高等于多少？

【解法1】假设天线高x米，和天线基点相距100米，200米和300米的点对天线的张角为α，β，γ．这时

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{x}{100},\quad \mathrm{tg}\beta=\frac{x}{200},\quad \mathrm{tg}\gamma=\frac{x}{300}.$$

根据本题条件$\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$，所以

$$\mathrm{tg}\gamma=\frac{x}{300}=\mathrm{tg}[90^\circ-(\alpha+\beta)]=\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}=\frac{1-\frac{x}{100}\times\frac{x}{200}}{\frac{x}{100}+\frac{x}{200}}=\frac{100\times200-x^2}{300x}.$$

因此

$$2x^2=100\times200,$$

因为天线的高x只能是正数，所以$x=100$米．

【解法2】假设CT是天线的高．在不同的两侧取线段$TA=100$米和$TB=200$米，使和CT都成直角．这时$AB=300$米．因此，角γ显然可以看作是点A对线段$BD=CT$的张角，BD是由点B所作线段AB的垂线，且和线段CT在AB的不同的两侧（图225）．四边形$BCTD$是平形四边形，因为它的两个对边CT和BD平行且相等．因此，相交于点E的两条对角线CD和TB相互平分．于是

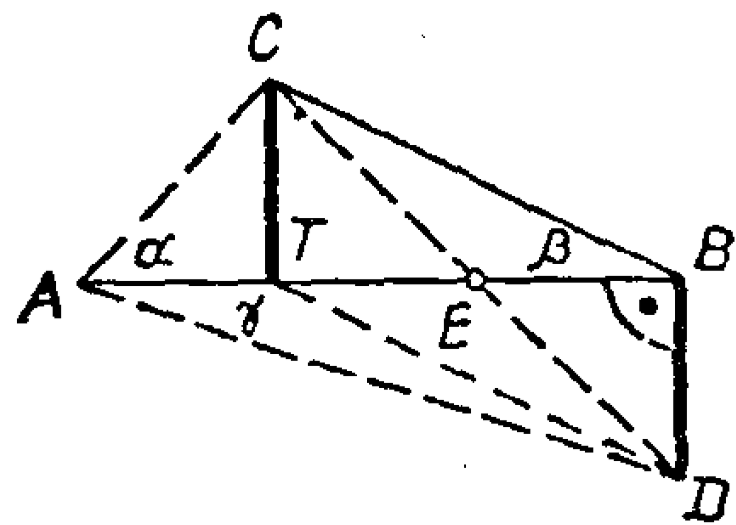


图 225

$ET=100$米，$\angle TEC=\alpha$，$\triangle ACE$是等腰三角形．我们来确定$\angle ACE$．因为在四边形$ADBC$中，顶点A和B的顶角之和等于$\alpha+\beta+\gamma+90^\circ$，根据本题条件$\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$，所以顶角

A 和 B 之和等于 180°. 因此，四边形 $ADBC$ 可以内接于一圆，且 AD 和这个圆的直径重合，因为点 B 对它所张的角为 90°. 于是有 $\angle ACD=\angle ACE=90°$. 这样一来，$\triangle ACE$ 是等腰直角三角形，从而角 α 等于 45°. 这就是说，$\triangle ATC$ 也是等腰直角三角形，因而天线的高等于 100 米.

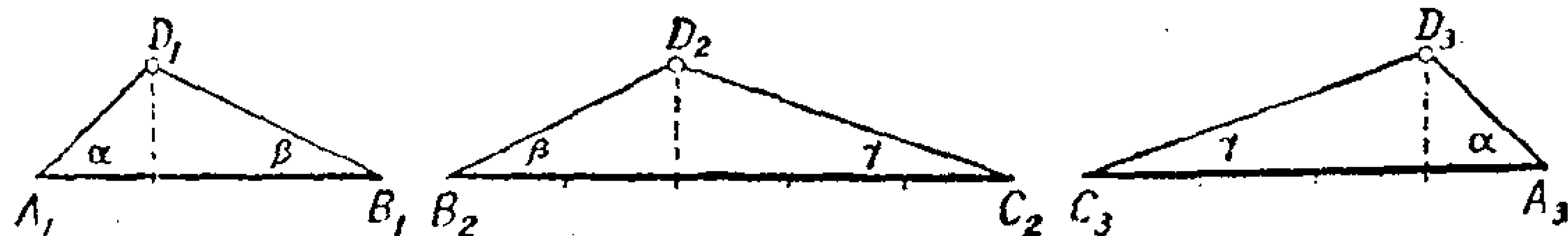


图 226

【解法 3】我们以三种形式来画天线：在天线基点的两边各取一线段，线段的端点对天线所张的角为 α 和 β，β 和 γ，γ 和 α（图 226），根据本题条件，和 $\triangle A_1D_1B_1$，$\triangle B_2D_2C_2$，$\triangle C_3D_3A_3$ 的边 A_1B_1，B_2C_2，C_3A_3 挨着的顶角之和等于 $2\alpha+2\beta+2\gamma=2\times 90°=180°$. 因此，$\angle A_1D_1B_1$，$\angle B_2D_2C_2$，$\angle C_3D_3A_3$ 之和等于 360°. 因为 $B_1D_1=B_2D_2$，$C_2D_2=C_3D_3$，$A_3D_3=A_1D_1$，所以由 $\triangle A_1D_1B_1$，$\triangle B_2D_2C_2$，$\triangle C_3D_3A_3$ 可以构成一个 $\triangle ABC$（图 227）. 它的边 $AB=300$ 米，$BC=500$ 米，$CA=400$ 米. 于是有关系式

$$BC^2=CA^2+AB^2.$$

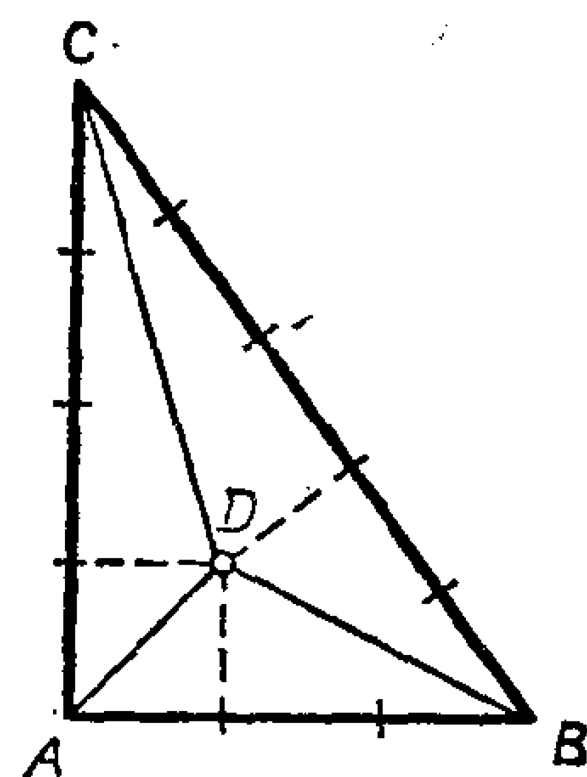


图 227

由此（根据勾股定理的逆定理）推出，$\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle CAB$ 是直角. 这样一来，$2\alpha=90°$，因而天线的高等于 100 米.

177. 三兄弟在某一天去看望生病的朋友，而且在这同一天，三兄弟的妻子也去看望这个朋友. 任何一个拜访者去的次数都不超过一次. 三兄弟中的每一个人在病友的房间里都遇到了他两个兄弟的妻子. 证明：三兄弟中的某一人在病友的房间里遇到了自己的妻子.

【证法 1】例如，我们假设兄弟 A 在朋友的病房里没有遇到自己的妻子. 这时 A 的妻子或者在她的丈夫去之前已经离开了（在这种情况下，她比其他两妯娌先离开病房，因为在她之后去的 A 在病房里遇到了这两妯娌），或者是在自己的丈夫离开病房之后去的（在这种情况下，她比其他两妯娌去得迟，因为这两妯娌在病房遇到了她的丈夫 A，而她去之前，A 已走了）. 这样一来，三妯娌中的每一个人仅仅在两种情况下没有遇到自己的丈夫：或者她比其他两妯娌先离开病房，或者她比她们去得晚.

但是在三妯娌中至少有一个人不比其他两个人都去得迟也不比其他两个人都早离开. 因此，三妯娌中至少有一个人在病房里遇到了自己的丈夫.

【证法 2】我们用反证法来证明本题断言. 假设任何一对夫妇都没在病房里相遇.

如果兄弟 A 到朋友那儿去比自己的妻子去得早，那么他应该在他的妻子去之前就离开朋友那儿了. 根据本题条件，A 在朋友那儿遇到了兄弟 B 的妻子. 因此，兄弟 B 的妻子去看望生病的朋友比 A 的妻子要早. 兄弟 B 在自己的妻子离开之后（为了使得和她不相遇）才能在病房遇到 A 的妻子.

如果兄弟 A 到朋友那儿去比自己的妻子去的晚，那么由上面的论证推出：兄弟 B 应该比自己的妻子去的早，即两对夫妇 A 和 B 去看望朋友正好是相反的次序（即若 A 比妻早去，则

B比妻晚去；若A比妻晚去，则B比妻早去．——中译者注）．

对于夫妇A和C，B和C重复同样的论证，我们得到下面的结论：为了使得夫妇之间不相遇，那么夫妇C去看望生病的朋友应该和两对夫妇A和B的次序相反，这是不可能的，因为根据上面所证明的，夫妇A和B去看望的次序相反．因此，三兄弟中至少有一个人在病房里遇到了自己的妻子．

用同样的方法可以证明比较一般的定理．为了便于理解，我们稍微改变一下方式来叙述原题．

三对夫妇在桌旁就坐，例如，以这样的顺序：兄弟A，兄弟B的妻，兄弟C，兄弟A的妻，兄弟B，兄弟C的妻（她的另一边坐的是兄弟A）．我们假设第二天这所有在桌旁就坐的六个人去看望生病的朋友，每个人只去一次且在那里遇到了前一天坐在自己左右两边的人．我们断定，这只可能发生在下面的情况下：如果至少有一对夫妇（在桌旁，他们彼此坐在对面）在病房相遇．

以这种方式叙述的177题可以看作是下面比较一般的断言的特殊情形．

n对夫妇在桌旁以这样的方式就坐，使每对夫妇坐在对面．他们大家约定第二天去看望一个生病的好友．第二天，每个人去看望朋友时在那里遇到了在桌旁坐在自己左右两边的两个人．我们知道，每个人看望朋友只去了一次．试证明：至少有一对夫妇在朋友那里相遇．

我们假设命题是不正确的：任何一对夫妇在病房里都没有相遇（其它条件仍然认为是满足的）．在桌旁就坐的次序表示作：A_1，A_2，…，A_{2n}，这时A_1和A_{n+1}，A_2和A_{n+2}，…，A_n和A_{2n}是夫妇．我们选取这样的表示法，使得在A_1和A_{n+1}这一对夫妇中，先去看生病的朋友的叫做A_1（根据问题的条件，这意味着，A_1在A_{n+1}去之前就离开朋友那儿了）．这时在病友那儿和A_1相遇的A_2应该比A_{n+1}先到朋友那儿去．A_2的配偶A_{n+2}在病友那儿和A_{n+1}相遇，但根据问题条件没和A_2相遇，所以A_{n+2}只能在A_2离开朋友那儿以后才去．类似地A_{n+3}只能在A_3离开之后才去，等等．重复这样的论证n次，虽然我们是从假设“A_1比A_{n+1}先到病友那儿去”出发的，可是却得到这样的结论：在病友那儿遇到A_1的A_{2n}只能在他的（或她的）配偶A_n（A_n在病友那儿遇到了A_{n+1}）走了之后才能去．

因此，至少有一对夫妇在生病的朋友那儿相遇，这就是所要证明的．

178．在参观团的任意四个人中，有一个人原先见过其他三个人．证明：在任何四个参观团员中，总可以找到一个人，他原先见到过所有的参观团员．

【证明】我们只要讨论参观团的人数不少于4人的情况．如果参观团的人数少于4人，问题的条件和结论就失去意义了．

假设A和B是两个原来未曾见过面的参观团员．这个假设是允许的，因为要不然的话，那么每一个团员原先见过所有其他的团员，从而本题断言对每一个团员都成立了．我们还假设另外还有两个团员（他们构成不同于AB的一对）在参观时是首次见面，因为如果不存在这样一对团员，那么在任何四个团员中可以找到这样一个人（甚至两个这样的人），他原先见过所有其他的团员．

在不同于AB这一对且原来未曾见过面的一对团员中，必定要么包含有A，要么包含有B．事实上，我们假设在这一对团员中既没有A也没有B（我们用CD来表示他们）．这时在四个团员A，B，C，D中找不到任何一个人，他原来见过所有其他三个人，这与本题条件相违．于是，我们假设不同于AB的原来未曾见过面的一对团员是AC（选用适当的记号，我

们总可以做到这一点).

现在我们来弄清楚：在不同于AB和AC的一对团员中，能否还有原来未曾见过面的一对团员. 根据上面的证明，在每一个这样的对子中要么有A，要么有B. 但是对于AC，也可进行同样的论证. 因此，在任何两个原来未曾见过面的团员中，要么有A，要么有C. 这样一来，这个原来未曾见过面的“新”对子只可能是BC或AD，这里的D不是上面所说到的团员.

但是，最后一种情况是不可能的，因为四个团员A，B，C，D不满足本题的条件. 因此，如果不算对子AB，AC，那么初次见面的一对团员只可能是BC. 因此，如果不算团员A，B，C，那么其他任何一个团员原先和所有的团员都见过面. 因为在任何四个团员中，总可以找到一个不同于A，B，C的团员，所以本题的断言被证明了.

178题可以“翻译”成图论（见§52）的语言. 每一个参观团员对应于图的一个且仅仅一个顶点，未曾见过面的两个团员所对应的顶点用边连接起来. 根据本题条件，我们得到一个有限图，它所有的边连接两个不同的顶点，且连接每一对顶点的边不多于一个. 在这个证法中，当说到图时，我们总是指这样的图.

原题可以用下面的方式来叙述，下面所叙述的问题和原题是等价的. **假设在不少于四个顶点的图中，不能找到这样四个顶点，它们之中的每一个顶点至少和其它三个顶点中的一个用边连接起来. 这时，在图的任何四个顶点中，可以找到这样一个顶点，它和所有其它的顶点都没有用边连接起来.**

用图论的语言可得到问题的简短而明显的证明.

不失一般性，我们假设在图中至少有两条不同的边a和b，因为要不然的话，在所有的顶点（可能除去两个顶点）中，没有引出任何一条边，因而在图的任何四个顶点中，总可以找到这样一个顶点，它没有引出任何一条边. 边a和b有一个公共的端点，因为要不然的话，它们的端点所构成的四个点不满足本题的条件. 用类似的论证可以查明：假若不算边a和b，那么在图中只能有一条边，而且这条边与边a和b至少有一个公共端点. 这条边或者是由连接边a和b的自由端点而得到的，或者是由边a和b的公共端点发出的（图228）. 后一情形是不可能的，因为由一个顶点发出三条边是和本题条件相违的. 这样一来，只能是和边a与b的三个端点相重合的图的顶点才能用边连接. 这就证明了，在任意四个顶点中，至少可以找到这样一个顶点，它不和图的其它任何一个顶点用边连接起来.

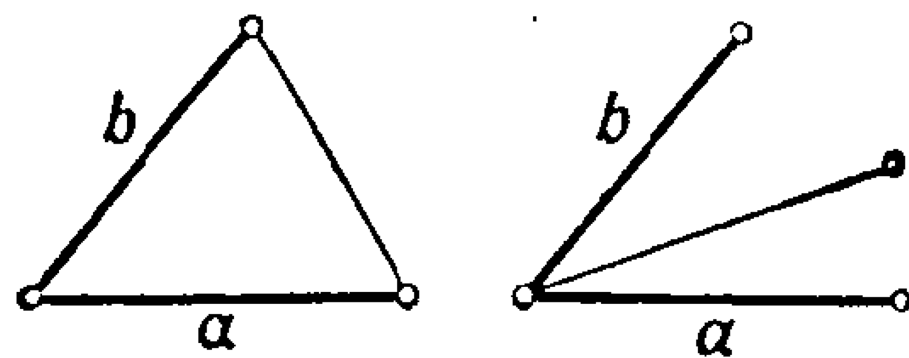


图 228

179. 假设$a_1=1$，a_2，a_3，…是无穷的自然数列，当$k>1$时，有不等式

$$a_k \leqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}.$$

证明：所有的自然数都可以表示成这个数列的某些项之和的形式（在特殊的情形，和可以由一项构成，即自然数可以和数列的某一项重合）.

【**证法1**】我们来证明比所要证明的稍广一点的断言，即下面的断言：如果$0<n\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_k$，那么自然数$n$可以表示成有穷序列$a_1$，$a_2$，…，$a_k$中某些数之和的形式. 我们对$k$利用完全数学归纳法.

如果$k=1$，那么断言成立，因为根据本题条件$a_1=1$，在这种情况下，n只能等于1.

假设$k>1$. 我们假设当上面的不等式中的数k用$k-1$来代替的时候，断言成立.

如果$0<n\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}$，那么根据归纳假设，数$n$可以表示成所要求的形式，即可表示成有穷序列$a_1$，$a_2$，…，$a_{k-1}$中某些数之和的形式.

假设

$$1+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}\leqslant n\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_k.$$

因为根据本题条件，不等式的左端不小于a_k，所以从后一不等式推出

$$0\leqslant n-a_k\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}.$$

这样一来，数$n-a_k$或者等于0，或者根据归纳假设可以表示成有穷序列a_1，a_2，…，a_{k-1}中的某些数之和的形式. 于是，或者$n=a_k$，或者自然数n可以由有穷序列a_1，a_2，…，a_{k-1}中某些数之和再加上a_k来得到，即可以表示为有穷序列a_1，a_2，…，a_k的某些数之和的形式.

【证法2】 如同上面的证法那样，我们来证明：如果$0<n\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_k$，那么自然数$n$可以表示成有穷序列$a_1$，$a_2$，…，$a_k$的某些项之和的形式，但这一次我们对$n$来用完全数学归纳法.

如果$n=1$，那么断言对任何k的值都成立，因为根据本题条件$a_1=1$.

设$n>1$. 假设断言对于所有小于n的数m是成立的.

对于固定的$n>1$，应该研究使不等式$n\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_k$成立的$k$的值. 这只要研究使不等式

$$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}<n\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_k$$

成立的最小的k值就行了，因为当k增加的时候，只不过是在自然数n表示成有穷序列a_1，a_2，…，a_k的某些数的和的形式时，这种挑选数的方法增加了而已.

由后一不等式可得到不等式$0\leqslant m<a_k$，其中$m=a_1+a_2+\cdots+a_k-n$. 利用本题条件所给出的不等式，我们得到

$$0\leqslant m\leqslant a_k-1\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}<n.$$

因此，如果除了$m=0$（即$n=a_1+a_2+\cdots+a_k$）的情况以外，那么

$$0<m<n\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_k.$$

根据归纳假设，这意味着数m可以表示为a_1，a_2，…，a_k中某些项之和. 此外我们得到，自然数n可以表示成序列a_1，a_2，…，a_k的其余的项之和的形式.

180. 假设E是正方形$ABCD$的边AB的中点，在边BC和CD上取点F和G,使AG和EF平行. 证明：线段FG和正方形$ABCD$的内切圆相切.

【证法1】 设$\triangle CFG$的某傍切圆和它的边FG相切于点H，和边CF、CG的延长线相切于点J，K（图229），那么

$$CJ=CK,\qquad FJ+GK=FG, \tag{1}$$

因为由一点向同一圆所作的切线是相等的，所以$FJ=FH$和$GK=GH$. 不但如此，而且在所有由一个点在边CF的延长线上，另一个点在CG的延长线上所构成的点对中，只有这两个和傍切圆相切的切点才能满足关系式（1）. 事实上，如果移动J和K，那么线段$CJ=$$=CK$的长度或者增加，或者减小. 因此，和$FJ+GK$的量值也或者增加，或者减小，已不等于线段$FG$的长了.

如果我们能够证明正方形的边BC，CD的中点J，K是边BC，CD和傍切圆相切的切

点的话，那么这个傍切圆和正方形$ABCD$的内切圆相重合，且线段FG和正方形的内切圆相切．我们注意：点J和K在边CF和CG的延长线上．事实上，$AG \parallel EF$、$AK \parallel EC$，于是点K、G、C的分布顺序和点C，F，J的分布顺序是一样的．

设正方形的边长等于2（换句话说，取正方形的边的一半作为长度单位）．这时，如果设$DG=x$，那么

$$CG=2-x, \quad GK=x-1.$$

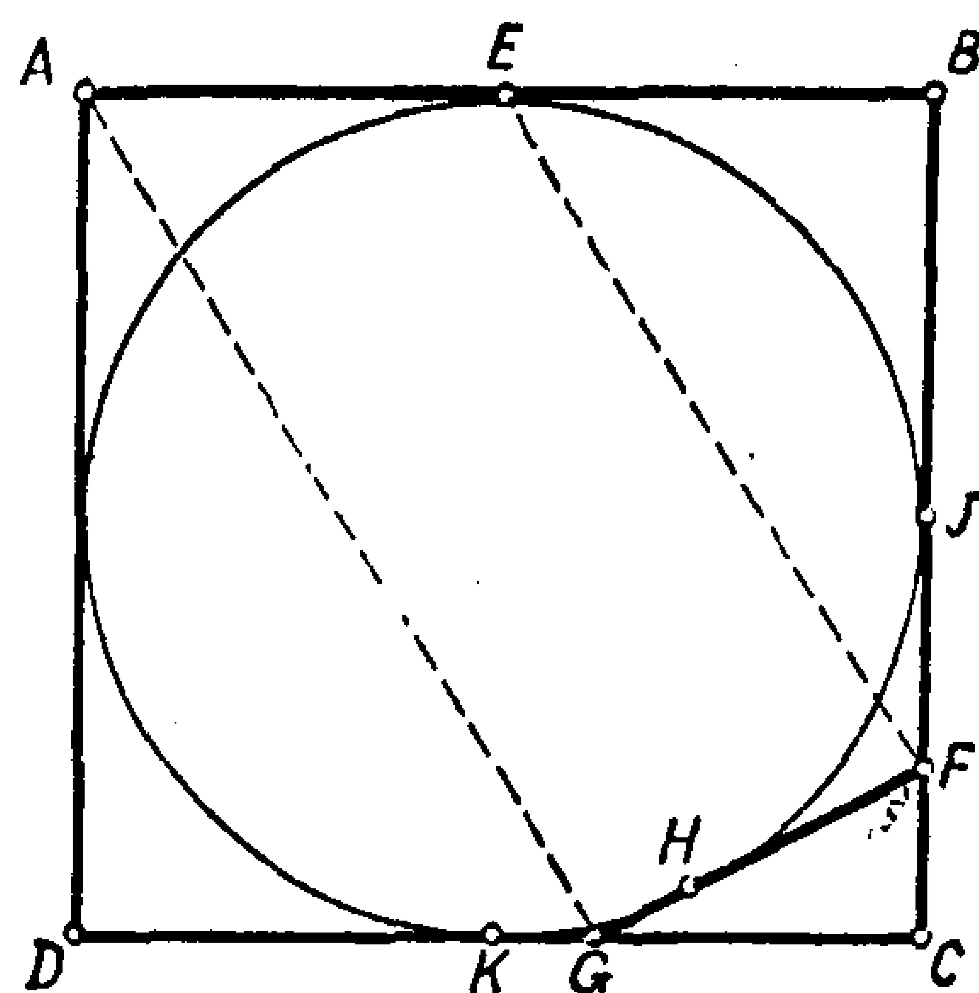


图 229

$\triangle ADG$和$\triangle FBE$是相似的（因为它们的边平行），因此$2:x=FB:1$，即$FB=2/x$，故

$$CF=2-\frac{2}{x}, \quad FJ=\frac{2}{x}-1.$$

我们所要证明的关系式$(FJ+GK)^2=FG^2$可用勾股定理变成和它等价的式子

$$\left[\left(\frac{2}{x}-1\right)+(x-1)\right]^2=\left(2-\frac{2}{x}\right)^2+(2-x)^2.$$

上式是成立的，因为它的左边的表达式可表示成

$$\left(\frac{2}{x}-2+x\right)^2=\left(\frac{2}{x}-2\right)^2+2x\left(\frac{2}{x}-2\right)+x^2,$$

而

$$2x\left(\frac{2}{x}-2\right)+x^2=4-4x+x^2=(2-x)^2.$$

【**证法2**】如果O是直角三角形CFG的傍切圆的圆心，该圆与斜边FG及直角边的延长线相切（图230），那么

$$\angle FOG=45^\circ, \qquad (2)$$

因为OF和OG是$\angle JFH$和$\angle HGK$的平分线，而$\angle JFH$和$\angle HGK$是$\triangle CFG$的两个互余的角的补角（H，J，K是切点；这里的表示法和证法1中所用的表示法一样）．

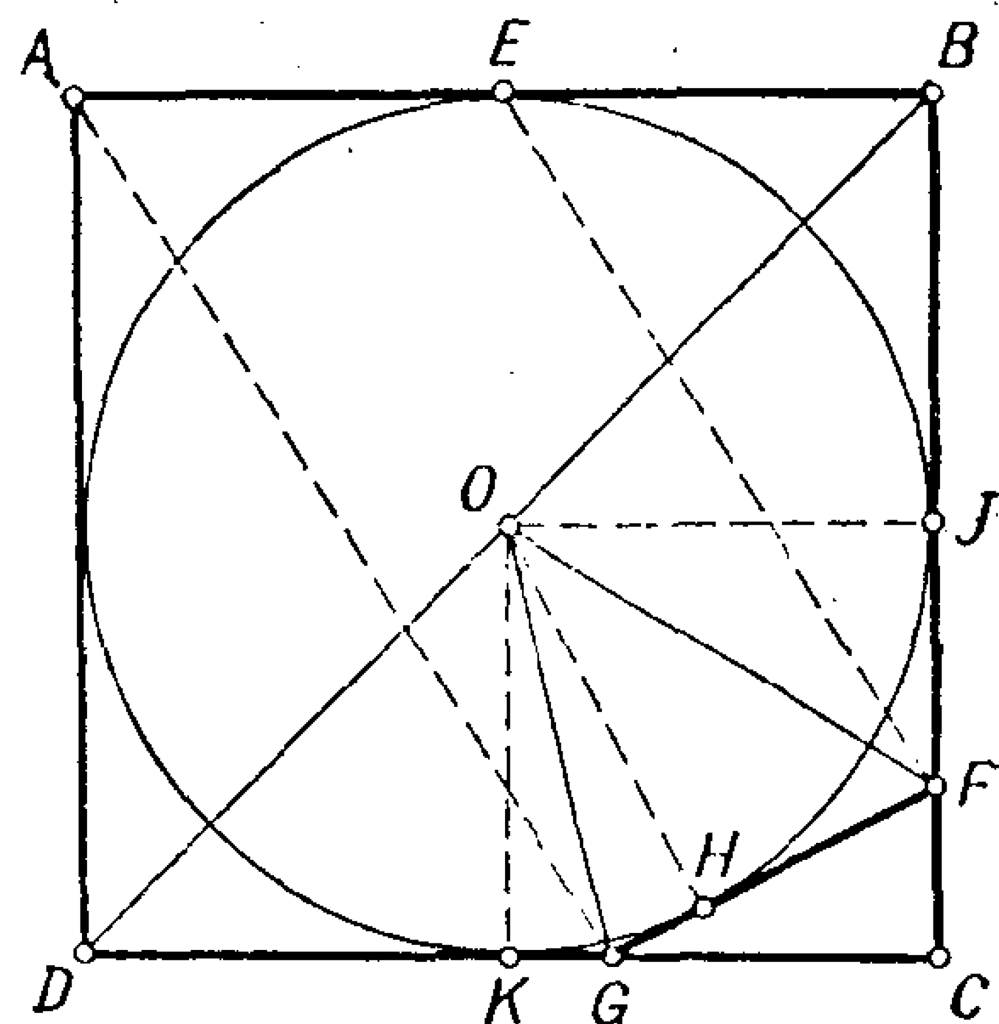


图 230

我们断言：所有位于直角三角形CFG的直角的平分线上的点中，只有傍切圆心O对线段FG的张角为45°．事实上，当点O沿着角平分线移动时，点O对FG的张角或者增加，或者减小．

因此，只要证明等式（2）仅对正方形的中心成立就行了，也就是要证明

$$\angle FOG=\angle GDO. \qquad (3)$$

左边的角与$\angle GOD+\angle FOB$互补，右边的角与$\angle GOD+\angle OGD$互补，因此，如果我们能

证明

$$\angle FOB=\angle OGD, \tag{4}$$

那么（3）成立.

首先我们注意，因为$AG \parallel EF$，$\triangle ADG$和$\triangle FBE$相似，所以$DG:2a=a:BF$，这里$2a$是正方形的边长，因此$DG\cdot BF=2a^2$、由于$DO=BO=a\sqrt{2}$，所以$DG:DO=BO:BF$. 由这个比例等式可知$\triangle GDO$和$\triangle OBF$相似，因为在这两个三角形中，$\angle GDO=\angle OBF==45°$. 由这两个三角形相似推出对应角相等，即等式（4）成立.

【证法3】如果点F给定了，那么条件$AG\parallel EF$单值地确定点G. 如果过点F作正方形的内切圆的第二条切线（第一条切线和正方形的通过点F的边重合），那么它和正方形的边CD的交点也由点F单值确定. 180题断言，由给定点F单值确定的两个点互相重合. 因此我们来证明：如果线段FG和正方形的内切圆相切，那么$AG\parallel EF$.

在研究正方形的内切圆的同时，我们还研究$\triangle CFG$的和边CF以及其它两边的延长线相切的傍切圆（图231）. 假设R是这个圆和边CG的延长线（因此也是正方形的边CD的延长线）相切的切点. 点F可以看作是两个圆的相似内心，因为它和这两个圆的内公切线的交点重合. 由此推出，两个圆分布在内公切线的两侧，由于相似，这两个圆与相互平行的直线AB及DC相切的切点E、R和点F在一直线上并在点F的两侧.

于是，为了要证明$AG\parallel EF$（即ER），也就是要证明四边形$AERG$是平行四边形，只要证明$GR=AE$就行了. 但这个等式可这样推出：首先$AE=KC$，其中K是边CD的中点，其次，$CR=KG$，因为傍切圆同三角形的一条边向两个顶点外的延长线相切，两个切点关于这边的中点是对称的.

图 231

对于180题以及上面所作的证明，我们作某些注解.

1） 在证法3中所证明的断言在下面的情况下仍然有效：如果所说的点不是属于正方形的边BC，CD，而是属于直线BC，CD，以及不是和正方形的内切圆相切的线段FG，而是和正方形的内切圆相切的直线FG. 新的断言的证明和证法3中所作的证明相差不大，我们把它留给读者.

2） 本题的断言在下面的情况下仍然有效：如果所研究的不是正方形，而是菱形，点E不是边AB的中点，而是边AB和菱形的内切圆相切的切点. 在这种情况下，证法3可直接搬过来.

本题的断言在下面情况下仍然有效：如果不仅用菱形来代替正方形，用菱形的一个边和它的内切圆相切的切点来代替边AB的中点E，而且用线段BC，CD和FG所在的直线来代替这些线段. 这个断言的证明和证法3差不多，我们把它留给读者.

181. 平面上的四个点可以连成六个线段. 证明：最长的线段和最短的线段的比不小于$\sqrt{2}$.

【证法1】假设P_1，P_2，P_3，P_4是平面上的四个给定点. 我们取这些点所确定的线段中最短的作为长度单位. 现在要证明：在6个线段中至少有一个线段的长度不小于$\sqrt{2}$.

假设 P_1P_2 是由四个给定的点所确定的线段中最短的线段，即单位长线段．以点 P_1 和 P_2 为圆心作两个单位圆（图232）．点 P_3，P_4 中的任何一个点都不可能在这两个圆内，因为要不然的话，线段 P_1P_2 就不是点 P_1，P_2，P_3，P_4 所确定的线段中最短的线段了．现在我们以点 P_1 和 P_2 为圆心作两个半径都为 $\sqrt{2}$ 的圆．这两个圆通过正方形 P_1P_2BA 的顶点 A 和 B：以 P_2 为圆心的圆通过顶点 A，以 P_1 为圆心的圆通过顶点 B．如果点 P_3，P_4 中的某一个点不在以 P_1 和 P_2 为圆心，以 $\sqrt{2}$ 为半径所画的圆内，那么它到圆心的距离不小于 $\sqrt{2}$．

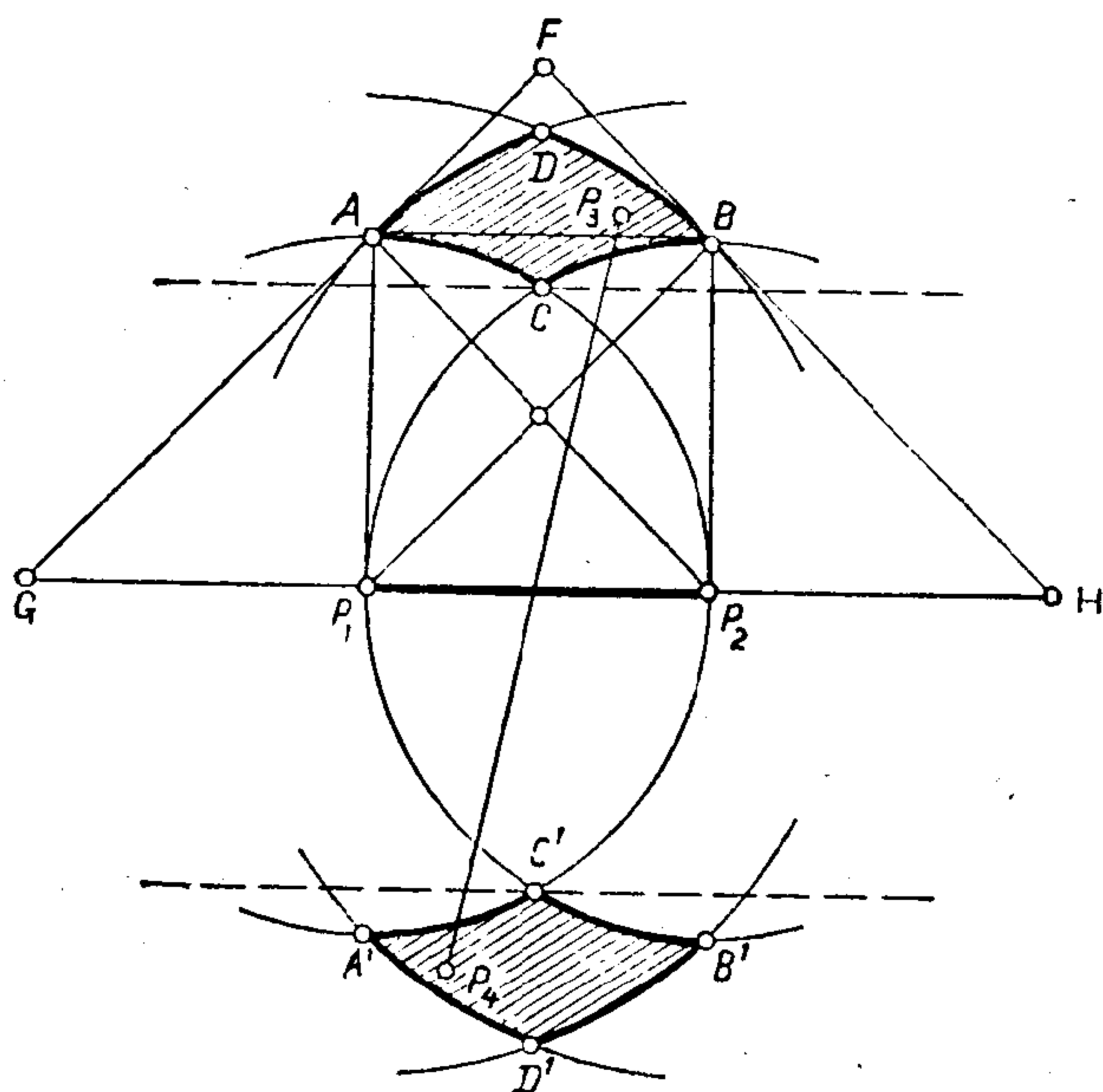


图 232

这样一来，我们只要研究点 P_3 和 P_4 在每一个半径为 $\sqrt{2}$ 的圆内且在以点 P_1，P_2 为圆心的单位圆外（或在圆上）的情形就行了．这意味着点 P_3 和 P_4 属于曲线多边形 $ADBC$ 和 $A'D'B'C'$，但除去弧 AD，BD 和 $A'D'$，$D'B'$ 上的点．

从图232看出，曲线四边形 $ACBD$ 位于以 AB 为对角线的正方形内，且在曲线四边形的顶点中，只有顶点 A 和 B 在正方形的周界上（下面我们严格证明这一点）．由此（由于曲线四边形 $ACBD$ 和 $A'C'B'D'$ 对称）推出，曲线四边形的任意两点之间的距离不大于1，因为位于正方形内的任一线段不会大于正方形的对角线（也许这样做更显然：作正方形的外接圆，其圆的直径等于正方形的对角线，位于圆内的任一线段总比它的直径短）．

于是只要研究点 P_3 属于一个曲线四边形，而点 P_4 属于另一个曲线四边形的情况就行了．过点 C 和 C' 作直线和线段 P_1P_2 平行．这两条直线确定了一个带子，这条带子把曲线四边形 $ACBD$ 和 $A'C'B'D'$ 分开了．带子的宽大于 $\sqrt{2}$，因为单位长线段 CP_1 和 P_1C' 之间的夹角等于 $120°$，即大于 $90°$．线段 P_3P_4 和带子相交．因此，它的长度不小于带子的宽，即不小于 $\sqrt{2}$，这就是所要证明的．

上面我们借助于图232利用了下面这一点：曲线四边形 $ACBD$ 包含在以 AB 为对角线的正方形内，而且只有曲线四边形的顶点 A 和 B 属于正方形的周界．现在我们比较严格地证明

这个断言.

圆周的弧所围成的曲线四边形的顶点 A 和 B 必定在正方形的周界上. 因此只要证明曲线四边形 $ACBD$ 的其它的点不属于正方形的周界就行了. 除了顶点 A 和 B 以外，线段 AF 和 BF 不包含曲线四边形其它的点，因为这两个线段在过点 A 和 B 向大圆弧所作的切线上. 由此推出曲线四边形 $ACBD$ 在 $\triangle FGH$ 内. 以点 P_1 为圆心的单位圆的弧 AP_2 和 $\triangle FGH$ 的周界相交两次（在点 A 和点 P_2）且把曲线四边形 $ACBD$ 和弦 AP_2 分开. 只有弦 AP_2 的端点才可能是曲线四边形 $ACBD$ 和这个弦 AP_2 的公共点. 因此，除了点 A 以外，线段 AP_2上的任何其它的点都不可能属于曲线四边形 $ACBD$. 对于线段 BP_1 也可以进行同样的论证(除了点 B 外，它上面的任一点都不属于曲线四边形 $ACBD$).

【证法2】在直角三角形中，斜边与较小的（精确地说，不是较大的）直角边的比不小于$\sqrt{2}$. 事实上，如果 $a\leqslant b$，那么 $c^2=a^2+b^2\geqslant 2a^2$，由此得到 $c/a\geqslant\sqrt{2}$.

如果三角形的两边长度保持不变，而其夹角增加，那么第三边也变大（见 §38)，因此在钝角三角形甚至在蜕化的三角形（彼此衔接起来的线段所组成的）中，最大的边和最小的边的比大于 $\sqrt{2}$.

于是，只要证明在平面上的四个点中，总可以找到这样三个点，它们是直角三角形，钝角三角形或蜕化的三角形的顶点就行了. 在平面上任意取四个点. 不失一般性，可以假设其中任何三点都不在一直线上. 我们研究所取四点的凸包，即在这四个点上插上针，将线缠在针上拉紧后所围成的多边形. 因为四个点中的任何三个点都不在一直线上，它们的凸包或者是三角形，或者是四边形.

如果凸包具有 $\triangle P_1P_2P_3$ 的形状（图 233),由于任何三点都不在一直线上，所以点 P_4 在这个三角形内. 线段 P_4P_1，P_4P_2，P_4P_3 把 $\triangle P_1P_2P_3$ 分成三个小的三角形. 这三个小三角形在顶点 P_4 的三个顶角之和等于360°. 因此这些小三角形中至少有一个是钝角三角形（不但如此，在这些小三角形中至少有两个是钝角三角形).

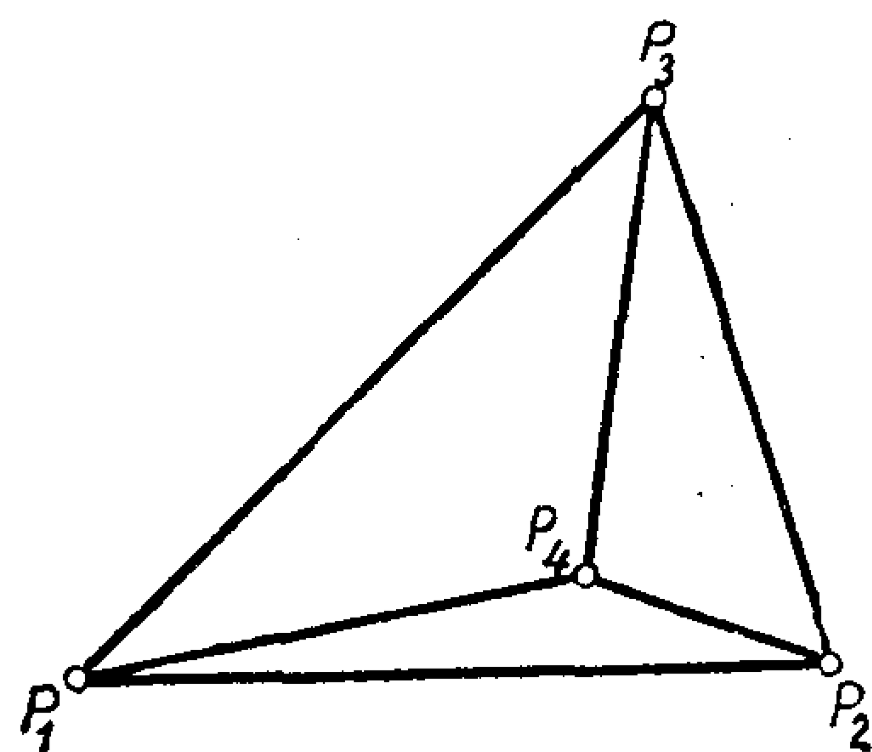


图 233

如果凸包具有四边形的形状，那么可以肯定它的四个内角不可能都是锐角，因为它们的和等于 360°. 因此，最大的角是直角或钝角，而夹这个角的两边是直角三角形或钝角三角形的两个边.

182. 证明：由正数 $a<1$，$b<1$，$c<1$ 构成的三个乘积

$$(1-a)b,\quad (1-b)c,\quad (1-c)a$$

不可能同时大于$\frac{1}{4}$.

【证法1】我们这样着手：如果 $0<a<1$，那么

$$a(1-a)\leqslant\frac{1}{4},$$

因为当把所有的项移到一边时，我们得到显然的不等式 $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$. 类似的不等式对数 b 和 c 也成立. 由此推出：数 $(1-a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$ 的乘积满足不等式

$$[(1-a)b][(1-b)c][(1-c)a]=a(1-a)\cdot b(1-b)\cdot c(1-c)\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

方括弧中的每一个因式不可能都大于$\frac{1}{4}$，因为不然的话，其乘积将大于 $(1/4)^3$.

【证法2】如果将数 a，b，c 循环排列（即取数 c，a，b 来代替数 a，b，c)，那么乘积 $(1-a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$ 所构成的三数组不变. 不失一般性，可以假设 a 是三个数中最大的数，即 $b\leqslant a$. 这时

$$(1-a)b\leqslant(1-a)a\leqslant\frac{1}{4}.$$

当过度到后一个不等式时我们利用了上一证法中所证明的不等式.

两个证法都可以证明本题断言的一种推广：**如果 a_1，a_2，…，a_n 是小于1的正数，而 b_1，b_2，…，b_n 是这些数的某一种排列，那么所有的数 $(1-a_1)b_1$，$(1-a_2)b_2$，…，$(1-a_n)b_n$ 不可能都大于** $1/4$.

183. 对两个外离的圆作一条外公切线和一条内公切线. 将属于每个圆的两个切点连成一条弦. 证明：两弦所在的直线的交点在两圆的连心线上.

【证法1】假设 C 是圆心为 O_1 和 O_2 的两圆的外公切线（A_1A_2）和内公切线（B_1B_2）的交点（图234). 四边形 $O_1A_1CB_1$ 和 $CA_2O_2B_2$（有时我们把它们叫做**三角洲**）在顶点 A_1，B_1 和 A_2，B_2 处的顶角为直角，它们是相似的，因为它们在顶点 C 处的两个顶角之和为 180°，因此两个四边形的非直角的顶角彼此相等. 四边形的对角线 CO_1 和 CO_2 彼此垂直，因为它们是顶点 C 处的两个和为 180°的顶角的平分线. 因为对角线 A_1B_1 垂直于对角线 CO_1，而对角线 A_2B_2 垂直于对角线 CO_2（作为三角洲的对角线），所以 $A_1B_1 /\!/ CO_2$，$A_2B_2 /\!/ CO_1$.

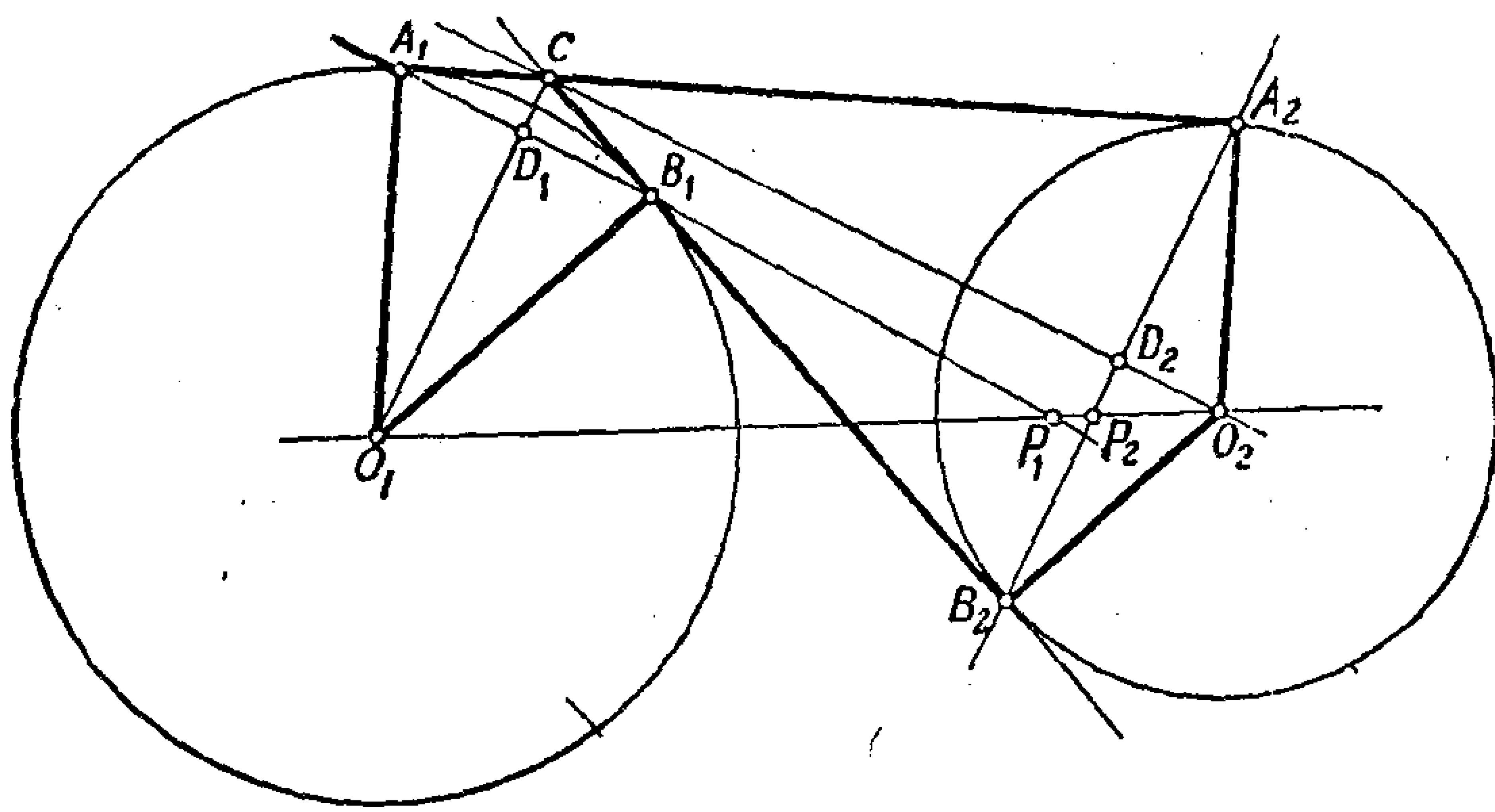


图 234

假设 P_1 和 P_2 是直线 A_1B_1 和 A_2B_2 与连心线 O_1O_2 的交点，我们来证明这两个点重合，即直线 A_1B_1 和 A_2B_2 的交点在连心线 O_1O_2 上. 图234是故意画得不正确的，为的是便于讨论. 以后不要忘记这一点.

由四边形 $O_1A_1CB_1$ 和 $CA_2O_2B_2$ 相似推出：对角线的交点 D_1 和 D_2 将对角线 O_1C 和 O_2C 所分成的部分的比相等，即

$$O_1D_1 : O_1C = CD_2 : CO_2.$$

根据线束被平行直线相截所得到的线段成比例的定理，平行的对角线 A_1B_1，CO_2 将 $\angle CO_1O_2$ 的边分成这样的：

$$O_1D_1 : O_1C = O_1P_1 : O_1O_2,$$

而平行的对角线 A_2B_2 和 CO_1 将 $\angle CO_2O_1$ 分成：

$$CD_2 : CO_2 = O_1P_2 : O_1O_2.$$

比较所得到的比例式，我们得到

$$O_1P_1 : O_1O_2 = O_1P_2 : O_1O_2,$$

于是 $O_1P_1 = O_1P_2$. 这样一来，点 P_1 和 P_2 重合.

【**证法2**】除了本题条件中所说的两条切线以外，我们再作一条内公切线 $B'_1B'_2$. 假设 D 是它和外公切线 A_1A_2 的交点，M 是由点 D 向连心线 O_1O_2 所作的垂线的垂足（图 235）. 我

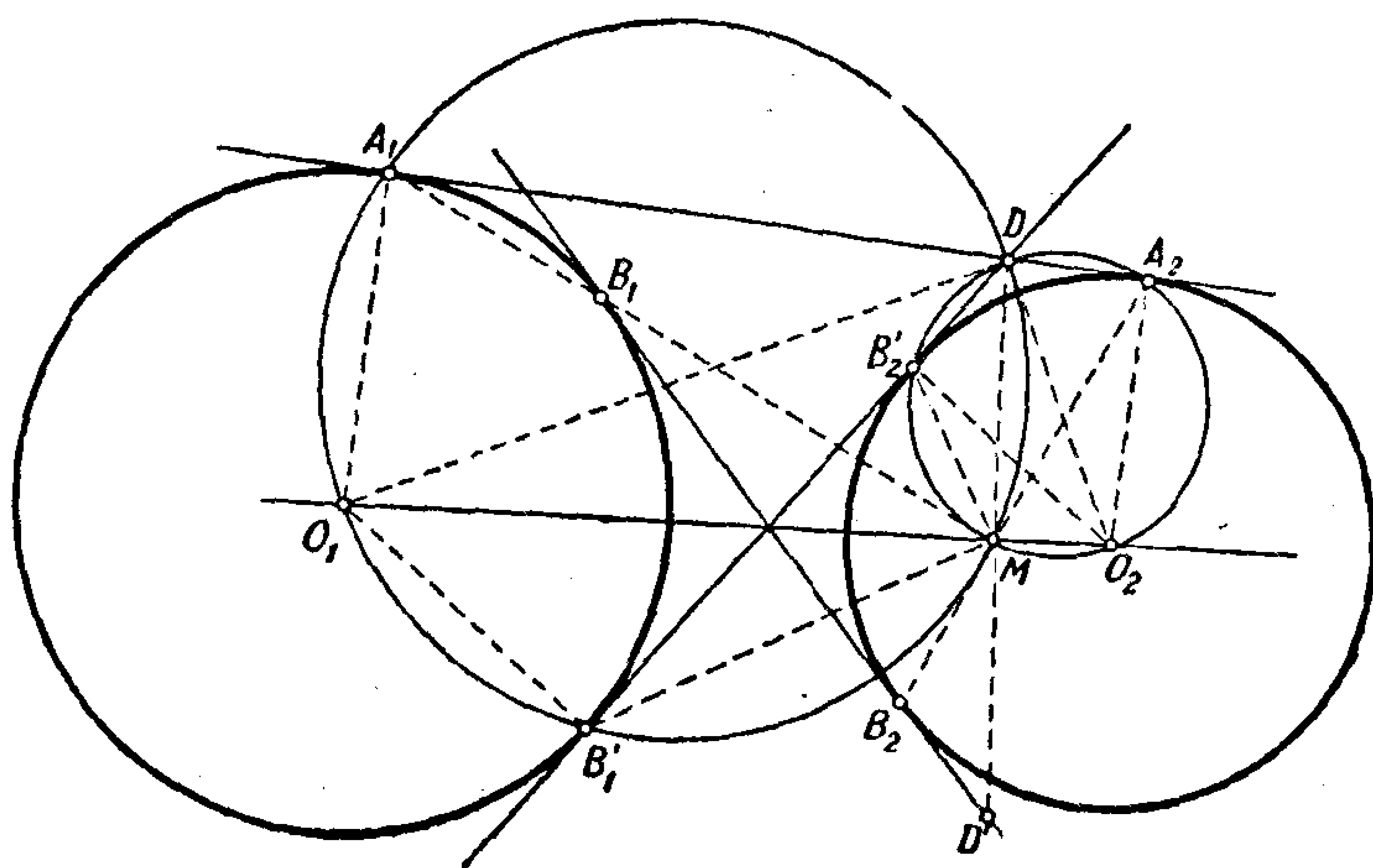


图 235

们来证明：点 M 既在直线 A_1B_1 上，也在直线 A_2B_2 上（从而本题断言得证）.

以 O_2D 为直径的圆通过点 A_2，B'_2，M，因为这些点对线段 O_2D 的张角为直角. 因为 $DA_2 = DB'_2$，所以 $\angle A_2O_2D = \angle DO_2B'_2$. 于是 $\angle A_2MD = \angle DMB'_2$（同一个弧上的圆周角相等，所以 $\angle A_2O_2D = \angle A_2MD$，$\angle DO_2B'_2 = \angle DMB'_2$），故由对称性推出：$\angle A_2MD =$ $= \angle D'MB_2$，即点 A_2，M，B_2 在一直线上.

对第二种情况也可类似地讨论. 以 O_1D 为直径的圆通过点 A_1，B'_1，M，因为这些点对线段 O_1D 的张角为直角. 因为 $\angle A_1DO_1 = \angle O_1DB'_1$，所以 $\angle A_1MO_1 = \angle O_1MB'_1$（因为同一弧上的圆周角相等，故 $\angle A_1DO_1 = \angle A_1MO_1$，$\angle O_1DB'_1 = \angle O_1MB'_1$）. 由此由对称性推出：$\angle A_1MO_1 = \angle B_1MO_1$，即点 A_1，B_1，M 在一直线上.

【**证法3**】利用下面关于两圆的根轴的性质：对两个相交的圆所作的两条切线相等的点在通过两圆交点的直线上（见§48）.

如像在证法 1 中那样，我们首先证明直线 A_1B_1 和 A_2B_2 在点 M 交成直角. 以 A_1A_2 和 B_1B_2 为直径的圆通过点 M，因为点 M 对线段 A_1A_2 和 B_1B_2 所张的角为直角（图 236）.

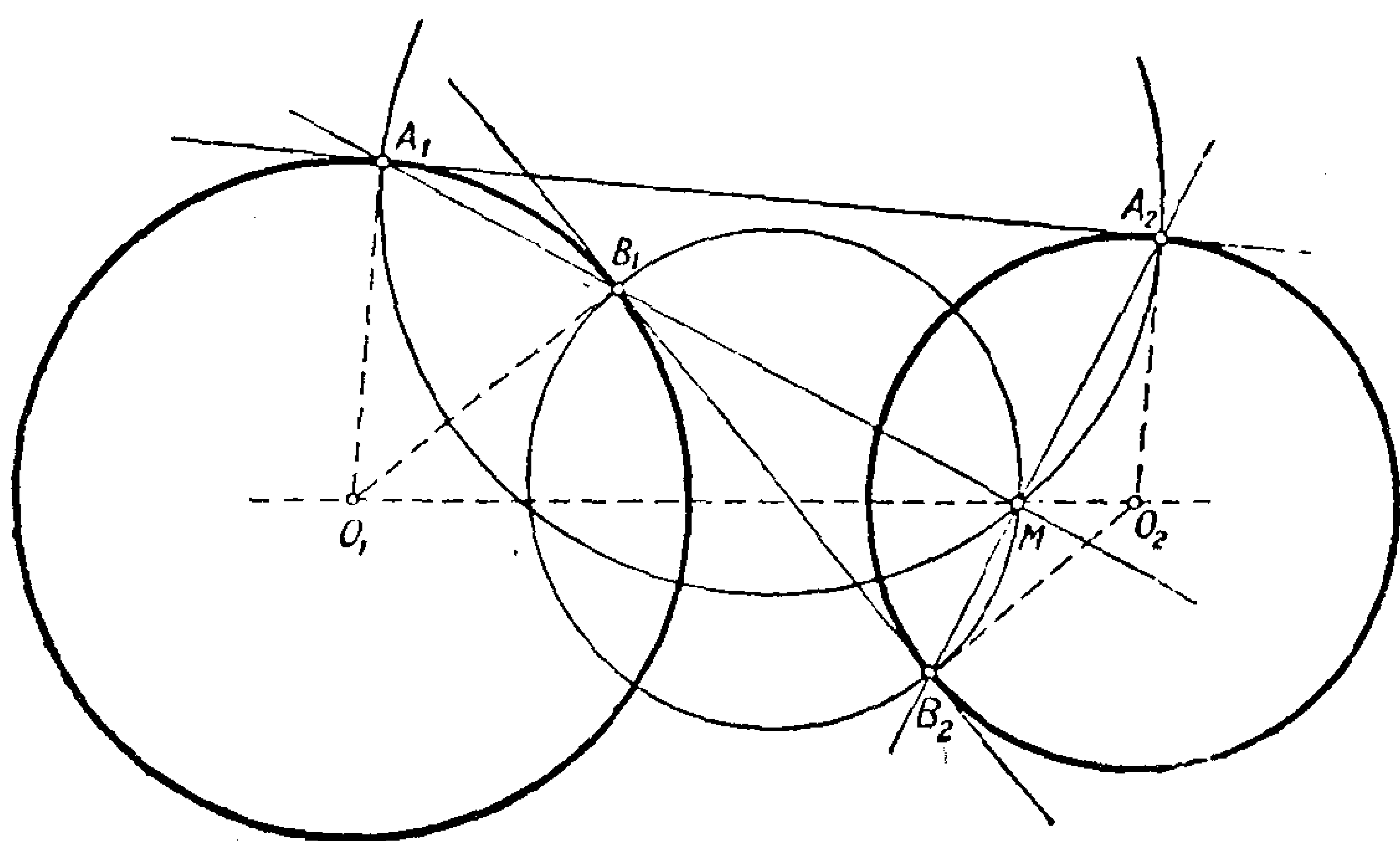


图 236

过点O_1所作的两圆的切线O_1A_1和O_1B_1彼此相等（都等于圆O_1的半径），同样地，切线O_2A_2和O_2B_2相等．由上面所说的性质推出：点O_1和O_2在通过以A_1A_2和B_1B_2为直径的两个圆的交点M的直线（根轴）上．这就证明了点O_1、O_2和M在一直线上．

184．设n是自然数．我们研究以n为最小公倍数的自然数对（u，v）（如果$u\neq v$，那么我们认为数对（u，v）和数对（v，u）是不同的）．证明：对给定的数值n，这种数对的个数等于数n^2的正约数的个数．

【证法1】我们把数n分解成标准分解式（见§7）：

$$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s},$$

其中p_1，p_2，…，p_s是不同的素数，而a_1，a_2，…，a_s是正整数．因为我们只研究$[u,v]=n$（记号$[u,v]$表示数u和v的最小公倍数；见§22）的自然数对（u，v），所以数u和v分解为标准分解式时只能包含素数p_1，p_2，…，p_s．

我们来确定在数u和v中含有这些素数中的任何一个素数的指数是多少，例如包含素数p_1的指数是多少．因为p_1在数$[u,v]=n$的分解式中的指数为a_1，所以在u和v的分解式中，p_1的指数都不大于a_1．在数u和v之中，素数p_1的所有可能的指数分配可分成三类：1）在u和v的分解式中，素数p_1的指数都为a_1（1种可能的情况）；2）在u的分解式中，素数p_1的指数为a_1，而在v的分解式中，p_1有较小的指数，即指数可为0，1，2，…，a_1-1（a_1种可能的情况）；3）在数v的分解式中，p_1的指数为a_1，而在数u的分解式中，p_1有较小的指数（又有a_1种可能的情况）．这样一来，在数u和v的分解式中，素数p_1的指数分配总共可能有$2a_1+1$种不同的情况．

对于包含在自然数u和v的分解式中的其它素数可进行类似的讨论．因为当一个素数的指数取定以后，可以将它和另一个素数所有可能的乘幂配合，所以在数u和v的分解式中，素数p_1、p_2，…p_s的指数可能取的方法的总数等于

$$(2a_1+1)(2a_2+1)\cdots(2a_s+1).$$

于是剩下的只要证明n^2也有同样多的约数就行了．我们利用数n^2分解成标准分解式时

有

$$n^2 = p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \cdots p_s^{2a_s}$$

的形式．因此，数n^2的约数可以包含素数p_i的指数为0，1，2，…，$2a_i$（见§21），即素数p_i总共有$2a_i+1$种方式包含在数n^2的不同的约数中．因为素数p_1，p_2，…，p_s中的每一个的选取与另外的素数无关，所以数n^2的约数的总个数等于

$$(2a_1+1)(2a_2+1)\cdots(2a_s+1),$$

这就是所要证明的．

【证法2】如果我们证明了在最小公倍数为n的有序数对u，v和n^2的约数之间有一个相互单值的对应，那么本题的断言就被证明了．

我们令每一个数对u，v同数d对应，d满足关系式

$$\frac{u}{v}=\frac{d}{n}. \quad (1)$$

数d是整数，因为它可以表示成$d=u\cdot\frac{n}{v}$，而$n=[u,v]$能被v整除.不但如此,而且数d是数n^2的约数，因为n^2被d除的商等于整数$\frac{n}{u}\cdot v$．

我们利用这一事实：如果$u_1:v_1=u_2\cdot v_2$，那么

$$u_1:u_2=v_1:v_2=[u_1,v_1]:[u_2,v_2]. \quad (2)$$

事实上，为了求得两个给定的数的最小公倍数，只需求出两个尽可能小的数，这两个数具有这样的性质，其中的一个数乘上给定的一个数的乘积等于另一个数乘上另一个给定的数的乘积．因此，这两个数的选取只与给定的两个数的比有关．这样一来，如果我们将一个数对u_1，v_1变到另一个具有相同比例的数对u_2，v_2（$u_1\cdot v_1=u_2:v_2$）时，最小公倍数成比例地变化．这就是我们写成关系式（2）的断言．

因为$[u,v]=n$，那么由关系式（1）和（2）得到一系列相等的比

$$u:d=v:n=n:[d,n]. \quad (3)$$

这样一来，知道了数d，数u和v可以由关系式

$$u=\frac{dn}{[d,n]}, \quad v=\frac{n^2}{[d,n]} \quad (4)$$

求出．

这样一来，数n^2的每一个约数d对应于不多于一个的数对u，v．

不仅如此，如果d是数n^2的约数，那么由关系式（4）所确定的数u和v是整数，因为无论是dn，或是n^2都是d，n的公倍数，因而能被这两个数的最小公倍数$[d,n]$整除．这样一来，选取数n^2的任何一个约数d后，我们由关系式（4）可得到整数u，v，它们满足关系式（3），于是由（2）推出$[u,v]=n$．于是，数n^2的每一个约数对应于一个且仅仅一个有序数对u,v，这就是所要证明的．

185．证明：在凸n边形中，不能挑选出多于n个具有下述性质的对角线：它们之中任意两个对角线都有公共点．

【证法1】我们从凸n边形中可挑选出d个对角线，使这d个对角线中的任何两个对角线都有公共点（图237）．我们约定：如果凸n边形的两个顶点用我们挑选出的d个对角线

中的一个对角线连接，我们把这两个顶点叫做相邻的（或简单地叫做邻点）．如果n边形的顶点有i个邻点，我们把它叫做i阶顶点．假设a_i是i阶顶点的个数，那么

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\leqslant n,$$

因为左边的和再加上a_0时便等于n了，其中a_0表示没有任何邻点的顶点的个数，也就是说，a_0表示n边形中那样的顶点的个数，从这些顶点没有引出我们所选取的对角线．

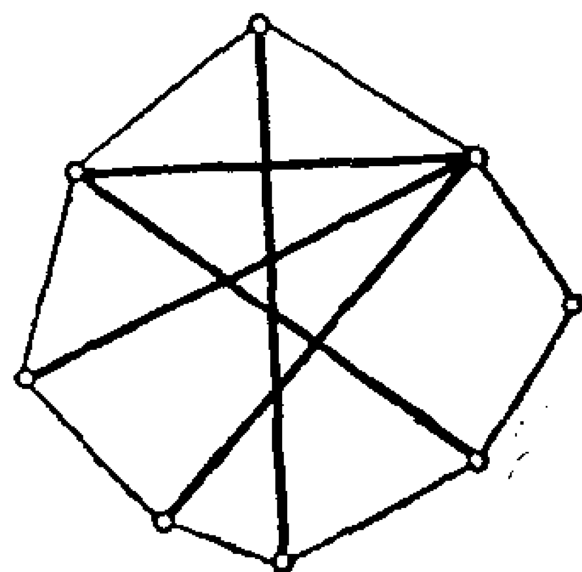


图 237

如果某一个顶点的阶数等于$i>2$，那么，在由它引出并被选取的对角线中，有两条"边缘的"对角线．在它们之间包含有一条或若干条"内部的"被选出的对角线．内部的对角线的另一个端点不能和其它任何一个顶点用一条被选出的对角线连接，因为这样的对角线和某一条边缘的对角线没有公共点．因此，当$i>2$时，每一个i阶顶点有不少于$i-2$个1阶邻点．当然，1阶顶点只能有不多于一个的高阶邻点．因此，1阶顶点的个数a_1满足不等式

$$a_1\geqslant a_3+2a_4+3a_5+\cdots$$

（3阶顶点有不少于一个的1阶邻点，4阶顶点有不少于两个的1阶顶点，等等）．

d条被挑选出的对角线共有$2d$个端点．这些端点分布在n边形的顶点上，且每一个i阶顶点用挑选出的对角线和i个邻点相连．因此

$$2d=a_1+2a_2+3a_3+4a_4+\cdots\cdots.$$

变换这个等式并利用关于a_1的不等式，我们得到

$$2d=(a_1+2a_2+2a_3+2a_4+\cdots)+(a_3+2a_4+3a_5+\cdots\cdots)\leqslant$$
$$\leqslant(a_1+2a_2+2a_3+2a_4+\cdots\cdots)+a_1=2(a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots)\leqslant 2n.$$

这就证明了$d\leqslant n$.

对于上面所引的证法我们注意下面几点．

1） 上面的证明，仅仅利用了对角线是连接顶点的直线段这一性质，所以如果我们研究的不仅仅是对角线，而且还有n边形的边，证明完全一样并仍然有效，即证明了下面的断言：**在连接凸n边形的顶点所得到的线段中，不能选取出多于n个的线段，使得它们之中的任何两个都有公共点**．

2） 在证明中，仅仅是在说到由$i>2$阶顶点引出的"内部的"对角线的另一个端点是1阶的时候利用了n边形的凸性．其它的地方都没有用到n边形的凸性．

可以证明下面的断言：**在平面上给定n个点，如果其中任何三点都不在一直线上，那么在这些点两两彼此相连的线段中，只能有不多于n个的线段，使它们之中的任意两个都有公共点**．

n个点中的任意三个点都不在一直线上这个条件是必需的．如果没有这个条件，那么命题不再成立．例如，对于在一直线上顺序分布的点A，B，C，D，线段AB，AC，AD，BC和BD便与断言相违．

【证法2】如果在n边形的顶点中有1阶顶点（由它仅引出一个挑选的线段），那么去掉从它引出的线段（图238）．假设起初选出的线段的个数等于d，选出的顶点——和选出的线段的端点重合——的个数等于$m\leqslant n$．在去掉一个线段后，只剩下$d_1=d-1$个选出的线段，而选出的顶点的个数至少减少1，即等于数$m_1\leqslant n-1$．

如果在n边形的顶点中，还有1阶顶点，那么又去掉由这个顶点引出的一个线段，我们

得到$d_2=d-2$个选出的线段和$m_2\leqslant n-2$个选取的顶点. 继续去掉由 1 阶顶点引出的线段，直到不能再去掉时为止. 在去掉最后一个线段以后，剩下$d_k=$ $=d-k$个所选取的线段和$m_k\leqslant n-k$个和它们的端点重合的不同的顶点.

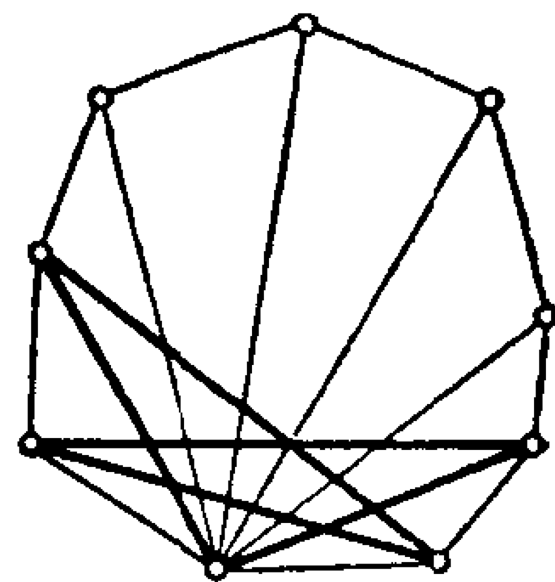


图 238

在我们的 n边形中，不仅没有 1 阶顶点了，而且大于 2 阶的顶点也没有了，因为如果从某顶点至少引出 3 个选取的线段，那么，如同在上面的证法中所表明的那样，包含在两个边上的线段之间的“内部的”线段把这个顶点和 1 阶顶点连起来了，因此，这些内部的线段被去掉了. 于是，在n 边形中剩下的仅仅是 2 阶顶点. 这意味着所剩下的线段的 $2d_k$个端点被d_k个线段一个接一个地连起来了，即$m_k=d_k$.

如果去掉由 1 阶顶点引出的线段后，没有剩下任何一个选取的线段，上面所得到的结果仍然成立，因为这时$d_k=0$，$m_k=0$，所以仍有$m_k=d_k$.

由等式$d_k=m_k$并考虑到上面所导出的不等式，我们得到$d-k\leqslant n-k$，即$d\leqslant n$，这就是所要证明的.

【证法3】当我们试图选取最多的两两有公共点的对角线时，所讨论的凸n 边形到底是什么形状是无关紧要的，因为两个对角线是否有公共点只与它们的端点在n 边形的周界上的位置有关：一条对角线的端点是否把另一条对角线的端点隔开以及在对角线的端点中是否有重合的. 所以，我们只要研究正凸n 边形就行了.

我们将正凸n 边形的对角线分成组：彼此平行的对角线属于同一组. 如果我们能够证明这种组的个数不超过 n，那么本题的断言就被证明了，因为那时不可能选取出多于n 个的不同组的对角线，而属于同一组的对角线是平行的，因而彼此没有公共点.

于是，我们来证明组数不超过n. 事实上，我们任取一条对角线并作它的中垂线. 所取的对角线将n 边形的周界分成两段折线，所作的中垂线是通过某一个顶点或是通过 n 边形的一个边的中点，取决于这两段折线所含有的顶点的个数是奇数或是偶数（图239）. 因为n边形有 n 个顶点和 n 个边的中点，而每一条中垂线只能从这$2n$个点中“选取”“自己的”一对点连接而成，所以不同的中垂线只能有 n 个. 由于属于同一组的所有的对角线垂直于同一条中垂线，所以组数不超过 n.

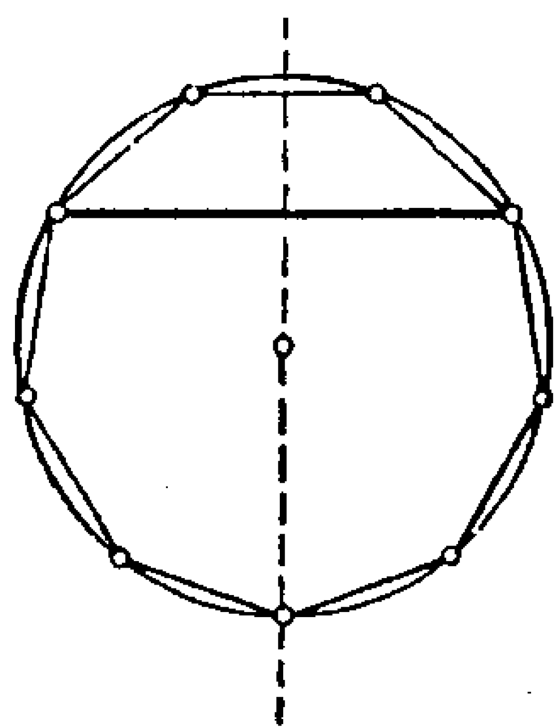


图 239

关于这个证明必须注意到下面的.

我们证明了本题的断言，根据这个断言，不能从凸n 边形中选取出多于n 个的对角线，使得这些对角线中的任何两个对角线都有公共点. 现在产生了一个问题：能否正好选取出n 个这样的对角线呢?

显然，如果$n=3$或$n=4$，那么正好选取出n 个对角线是不可能的，因为在三角形中，根本不能作任何一条对角线，而在正方形中，只有两条对角线. 如果$n\geqslant 5$，那么总可以选取出n 条彼此有公共点的对角线，其选取的方法的实质不难由图239来理解. 如果不仅允许选取对角线，而且也允许选取n 边形的边，那么上面所说的方法仍然可以用. 当然这时已没有必要从我们的研究中除去三角形和正方形了.

在一般的情况下，对于平面上的任意n个点，如果它们不是凸n边形的顶点，那么在这些点两两连成的线段中，不能选取出n个两两有公共点的线段，尽管我们把一个点和其余所有的点连接起来就可以得到$n-1$个这样的线段．这种线段的个数不能再增加了，例如，三个点在$\triangle ABC$的顶点上，其余的$n-3>0$个点在通过三角形内的弧BC上（图240）．我们可以用下面的方式来证明这一点．

从点A只能引出$n-1$个线段．对于弧BC上的$n-1$个点来说，由于它们构成一个凸（$n-1$）边形的顶点，所以在它们两两连成的线段中，可以选取出不多于$n-1$个所需要的线段．如果我们选取从点A引出的线段以及任一个由弧BC上的点两两连成的线段，那么它们的公共点只可能是由点A引出的线段的另一个端点．因此，如果由点A仅仅引出一个所选取的线段，那么它的另一个端点必须属于所有其它选出的线段，而且我们总共得到$n-1$个选取的线段．如果我们选取两个由点A引出的线段和弧BC的某一条弦，那么这个弦和两个线段必须构成三角形，这时再也不能选取任何一个线段而不破坏问题的条件了．

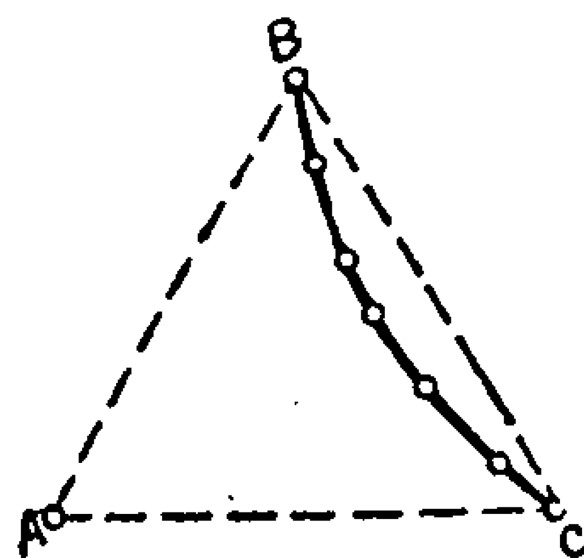


图 240

186．在棱锥$ABCD$内或它的面上给定一个不和顶点D重合的点P．证明:在线段PA，PB，PC中可以找到这样一个线段，它的长度小于线段DA，DB或DC中某一个线段的长．

【证法1】不失一般性，我们假设点P不属于棱锥的棱DA，DB和DC，因为如果点P属于其中某一棱，例如属于棱DA且不和顶点D重合，那么$PA<DA$，从而本题断言成立．

我们只须证明：对任意的点P，在$\triangle APD$，$\triangle BPD$，$\triangle CPD$中有一个三角形在顶点P的顶角或者为直角，或者为钝角．事实上，例如若$\triangle APD$是这样的三角形，那么DA是它的最大的边，因此$PA<DA$（图241）．

过点P作一平面垂直于线段PD，过点P引射线使和线段PD所夹的角为锐角．这些射线在同一个半空间（所作平面所划分的且包含顶点D的半空间）内．因此，如果所有的$\triangle APD$，$\triangle BPD$，$\triangle CPD$在顶点P的顶角都是锐角，那么棱锥$ABCD$所有的顶点（这意味着棱锥本身）分布在同一个半空间内，虽然根据作法，点P属于半空间的边界．所得到的矛盾证明了在$\triangle APD$，$\triangle BPD$，$\triangle CPD$中有一个三角形在顶点P的顶角不是锐角．

【证法2】由点P作平面ABC的垂线（图242）．假设点Q是棱锥$ABCD$的在这个垂线

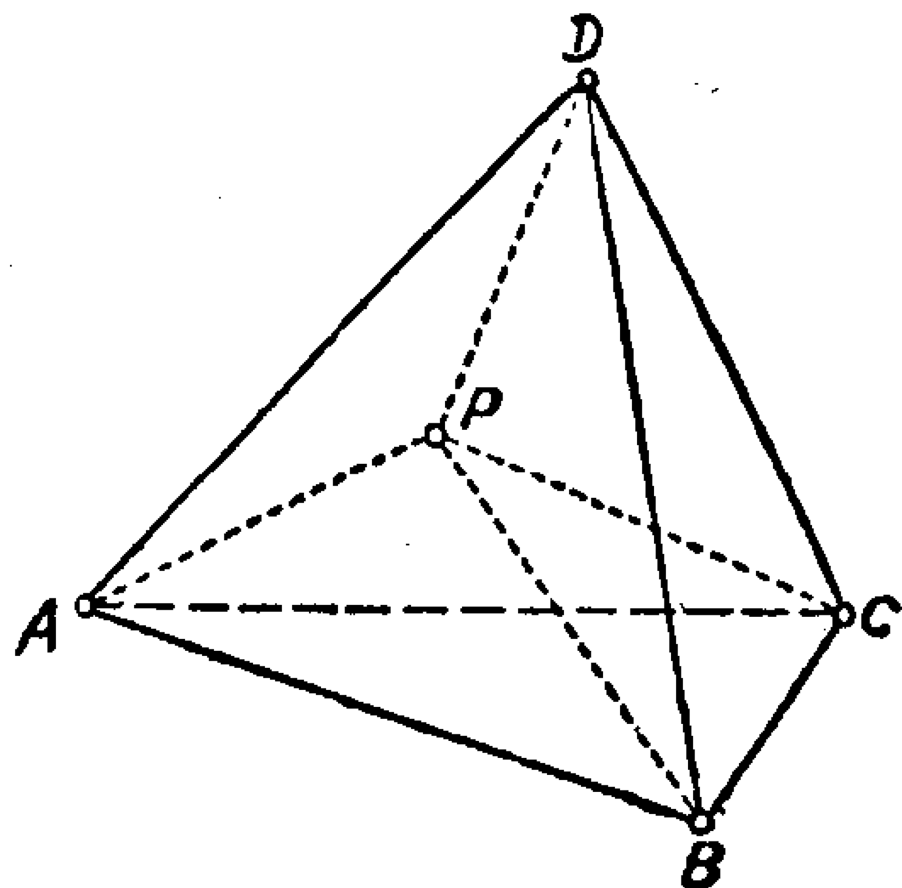


图 241

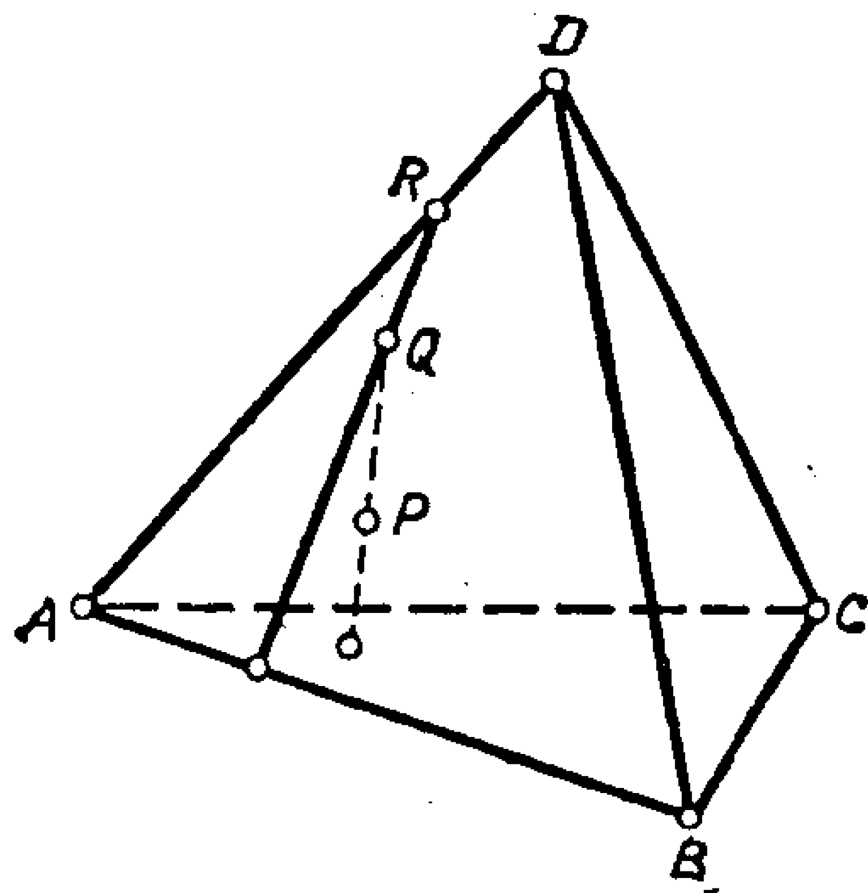


图 242

上离平面ABC最远的点. 显然，点Q属于界面ABD，ACD，BCD中的一个界面. 为了确定起见，我们假设Q属于界面ABD. 在平面ABD上，过点Q作直线和棱AB垂直. 假设R是这个垂线上离棱AB最远而又属于$\triangle ABD$的点. 点R属于一条棱AD或BD. 例如，假设点R属于棱AD.

如果点沿着平面或直线的垂线作背离平面或直线的移动，那么这个点和平面或直线的任一点的距离增加. 因此

$$PA \leqslant QA \leqslant RA \leqslant DA.$$

每一个不等式可以单个地变成严格的等式，因为允许点之间两两重合：$P \equiv Q$，$Q \equiv R$，$R \equiv D$. 但是所有的不等式不可能同时变成严格的等式，因为根据本题条件，点P不和顶点D重合. 因此，至少有一个不等式即使在所有其它的不等式都变成等式的情况下仍保持不等号，于是$PA < DA$.

【证法3】 垂直于线段PD且通过它的中点的平面把棱锥$ABCD$分成两部分，因为点P和D分布在这平面的两侧. 由此推出，在这个平面把整个空间分成的两个半空间中，都有棱锥的顶点.（假若不然，如果在一个半空间中没有棱锥的顶点，那么所有的顶点连同棱锥的本身都在另一个半空间内. 但是这时所作的平面不能把棱锥分成两部分.）例如，假设顶点A和点P在同一个半空间. 这时$PA < DA$，因为A是包含点P的半空间的内点，所以A到点P的距离比到另一个半空间的任一内点的距离要近. ❶

关于186题以及上面所做的三种证明可作若干注解：

1） 所有三个证明不仅证明了本题的断言，而且还证明了更广的断言：线段PA，PB，PC中的某个线段小于线段DA，DB，DC中和它有公共端点的线段.

2） 证法2可以毫不改变地运用到更一般的情况：棱不是有三个侧面而是有任意个侧面. 用这种方法可以证明下面的断言：**属于棱锥但不和棱锥顶点S重合的任意一点（或者是内点，或者属于侧面）到棱锥底面某个顶点的距离小于这个顶点到S的距离.**

3） 关于证法3可以作出更强的断言. 这个证明可以毫不改变地运用到那种情况：代替棱锥可取任意的多面体. 从而可以证明下面的定理：**多面体的任何一个不和顶点D重合的点到多面体的一个异于D的顶点的距离小于这个顶点到D的距离.** 如果利用证法1中所作的讨论，也不难证明这个定理.

4） 假设$d_1 \leqslant d_2 \leqslant d_3$是不在三棱锥的底面上的棱的长，而$p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3$是连接棱锥的任意一点（和不在底面上的顶点不重合）和棱锥底面上的顶点所得到的线段的长. 附标是这样取的，在每一组中，由小附标变到大附标时，线段的长不减小. 附标重合绝不意味着对应的线段有公共端点.

假设给定长为d_1，d_2，d_3，p_1，p_2，p_3的六个线段. 是否可以找到这样一个三棱锥和它的这样一个点，使得棱的长度以及连接这个点和棱锥底面的顶点所得的线段的长度等于所给线段的长度？

186题断定：如果这样的棱锥和点存在，那么

$$p_1 < d_3 .$$

从证法2不难引出一个必要条件：

$$p_1 + p_2 < d_2 + d_3$$

（因为$PA + PB \leqslant QA + QB \leqslant DA + DB$，且两个不等式不能同时变为等式）.

应该注意到：和上面的不等式不同的这种类型的不等式，例如$p_2 < d_3$或$p_1 + p_2 + p_3 < d_1 + d_2 + d_3$，是不一定成立的（图243所画的是一个被证实的例子，其中每一个线段旁边指出了它的长度）. 这使得我们必须小心地去选取必要条件.

---

❶ 这个说法是不对的. 正确的说法是："因为点P与D关于所作的平面是对称的，而A与P属于同一半空间，所以A到P的距离比到D的距离要近." 把D换成"任一内点"，结论是不成立的. ——校者注

虽然如此，但是需要补充必要的条件．因为上面所说的两个不等式不足以能够作出以d_1，d_2，d_3 为棱的三棱锥且在它里面或侧面上有一点到棱锥底面的顶点的距离为p_1，p_2，p_3．对此的必要充分条件现在还不知道．

187．剧院的坐位排成p排和q列（我们规定把纵行的坐位叫做列）．这样，整个剧院可容纳pq个观众（$p>1$，$q>1$）．

在每一个坐位上坐着一个小学生，它们都不一样高．老师在每一排中挑选个子最矮的学生，在这些最矮的学生中，个子最高的等于a．然后，老师在每一列中挑选最高的学生，他们之中最矮的等于b．

试说明：三个关系式

$$a<b,\ a=b,\ a>b$$

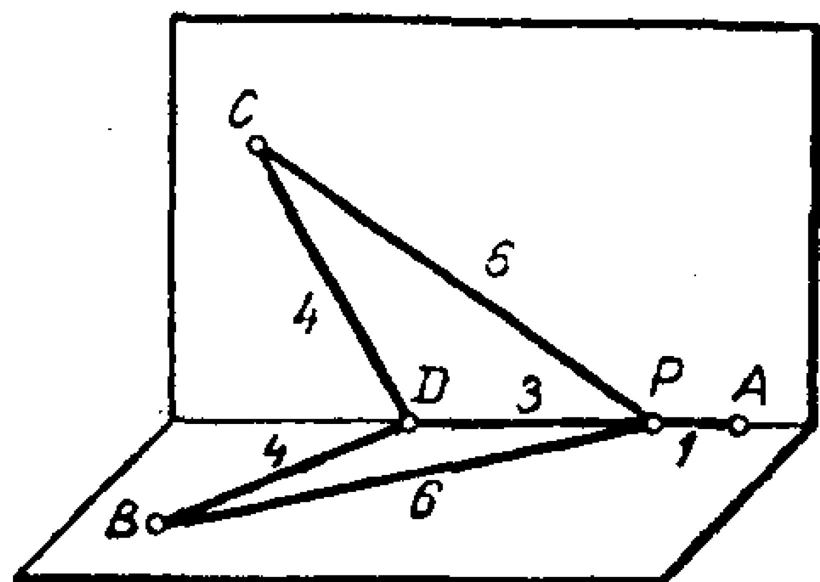


图 243

之中的哪一个可以表示数a与b的关系，并弄清：当剧院里的小学生调换坐位时，这个关系是否会改变．

【解】我们约定用同一个字母来表示学生本人和他的个高（即个高为a的学生用a来表示，个高为b的学生用b来表示，等等）．我们研究学生a所坐的一排（排a）和学生b所坐在的那一列（列b）．假设c是坐在排a和列b的交点的位子上的学生．

应该考虑到学生a，b和c不一定是三个不同的孩子．事实上，如果a和b坐在同一排，那么c和b是同一个学生的两种表示法．如果a和b坐在同一列，那么c和a表示同一个学生．如果a和b是同一个人，那么c也是这个人．

因为a和c坐在同一排，而a是坐在这一排的学生中最矮的，所以a不能比c高，即$a\leqslant c$．此外$c\leqslant b$（c和b坐在同一列，而b是坐在这一列的学生中最高的）．因此$a\leqslant c\leqslant b$，即不等式$a>b$被排除了．我们证明：只要给学生安排适当的坐法，$a=b$和$a<b$这两种情况都可以实现．

例如，如果在每一列中，最高的学生坐在最后一排，那么将得到$a=b$的情况．这时坐在最后一排的学生中最矮的学生，我们有权既可把他叫做a也可把他叫做b．因为一方面在最后一排中没有更矮的学生（可能有更矮的学生，但他坐在另一排），而另一方面，在他这一列中没有个子更高的学生（可能有更高的学生，但坐在另一列），因此除了最后一排以外，其他每一排中最矮的学生比他更矮了．除了最后一排以外，如果某排中最矮的学生不是坐在最后一排的学生a（他也是b）所坐在的那一列，那么，他可以在他所坐的那一排和其他人换位子，而不会破坏等式$a=b$．

$a<b$的情况我们也可得到，例如，如果孩子开始的时候就像刚才说的那样坐，然后把坐在最后一排的学生中最矮的学生（即b）和与他坐在同一列的某个学生对换坐位．往前坐了的学生b仍然保持这个“名字”：在他所坐的那一列中，没有学生比他高（尽管在其他列有这样的学生），而在其他的列中，最高的学生仍然坐在最后一排．另一方面，当老师在每一排挑选最矮学生时，除了最后一排外（可能还有b新到的一排），所挑出来的仍然是原来那些孩子，而最后一排最矮的是在b的坐位上的学生．这些孩子都比b矮，因而这时得到$a<b$．

在说到和我们所选取的学生坐在同一排或同一列的“其他的”学生时，我们用到了条件$p>1$，$q>1$．这个条件是必须的，因为如果剧院的坐位放成一排或一列，那么只可能有等

式$a=b$.

188. 证明：如果α是锐角，那么

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)>5.$$

【证法1】所要证明的三角不等式的左边可以表示为

$$1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{2}{\sin 2\alpha}, \qquad (*)$$

因为$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$. 如果$\alpha$是锐角，那么所有的分母都是正的. 因为任何角的正弦和余弦都不大于1，第二和第三项不小于1，最后一项不小于2. 因此整个的和不小于5. 但表达式（∗）不可能等于5，因为中间两项不可能同时等于1（等式$\sin\alpha=1$和$\cos\alpha=1$只对不同的角成立）. 因此，和（∗）严格大于5.

【证法2】我们作一个直角三角形，斜边上的高为1，一个锐角为α（图244）. 利用角α的三角函数可将这个三角形的直角边和斜边表示成下面的形式

$$a=\frac{1}{\cos\alpha},\quad b=\frac{1}{\sin\alpha},\quad c=\frac{1}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}.$$

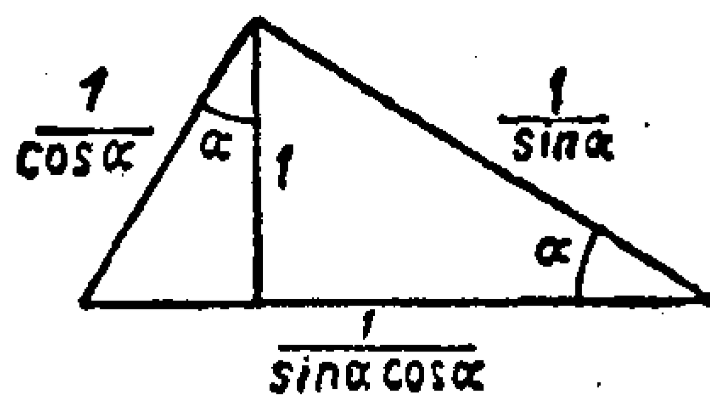


图 244

本题断言我们可从不等式$a+b+c>4$得到. 首先这个不等式可由$a+b>c$，而$c\geqslant2$得到，因为直角三角形斜边上的高不大于以这个斜边为直径所作的圆的半径.

【证法3】我们证明比较强的断言，即：如果α是锐角，那么

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\geqslant 3+2\sqrt{2}=5.828\cdots,$$

而且等式仅当$\alpha=45°$时成立. 由证法1知，为此只要证明

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\geqslant2\sqrt{2},$$

而且等式当$\alpha=45°$时成立（事实上，在表达式（∗）中，当$\alpha=45°$时，第四项达到最小值2）. 最后一个不等式可以用三种方法来证明：

1）在证法2的表示法中，所要证明的不等式可以表示成$a+b\geqslant2\sqrt{2}$的形式. 它可由不等式

$$(a+b)^2=(a^2+b^2)+2ab=c^2+2ch_c\geqslant8$$

推出.（当导出最后一个等式的时候我们利用了勾股定理（$a^2+b^2=c^2$），还利用了直角三角形的面积可以写成两种形式（$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch_C$），以及等式$h_c=1$和不等式$c\geqslant2$.）等式仅当$c=2h_c$，即如果直角三角形是等腰的时候成立.

2）在图244所画的三角形中，将高左边的三角形绕着原三角形的直角顶点沿时针方向旋转90°，我们得到图245所画的图形. 如果所要证明的断言是正确的，那么线段AB的长度大于过C点而和原三角形斜边成45°角的线段A_1B_1的长度，因为A_1B_1的长度等于$2\sqrt{2}$. 这样一来，只须证明：在通过点C而其端点在直角AOB的边上的所有线段中，关于点C对称

的线段 A_1B_1 是最短的.

因为直角三角形 AOB 的两个直角边 OA 和 OB 是"平等的"，所以不失一般性可以假设 $\alpha<45°$. 假设 D_1 是点 B 关于点 C 的对称点. 由于关于点 C 的对称性，所以线段 BB_1 和 A_1D_1 平行且相等. 作线段 AD 和它们平行且相等，于是我们得到平行四边形 $BADB_1$ 和矩形 A_1ADD_1.

由矩形 A_1ADD_1 我们求得 $\angle AA_1D=\angle A_1AD_1\doteq\alpha$,因此 $\angle B_1A_1D=135°-\alpha>90°$. 这样一来，$DB_1$ 是 $\triangle B_1A_1D$ 中最大的边，由此 $A_1B_1<DB_1=AB$.

3）我们利用下面的性质：对于任意的正数 x, y，它们的算术平均值 $a(x,y)$，几何平均值 $g(x,y)$ 和平方平均值 $q(x,y)$ 之间有不等式

$$g(x,\ y)\leqslant a(x,\ y)\leqslant q(x,\ y),$$

且两个不等式仅当 $x=y$ 时变成等式（见 §55,2)和4)）.

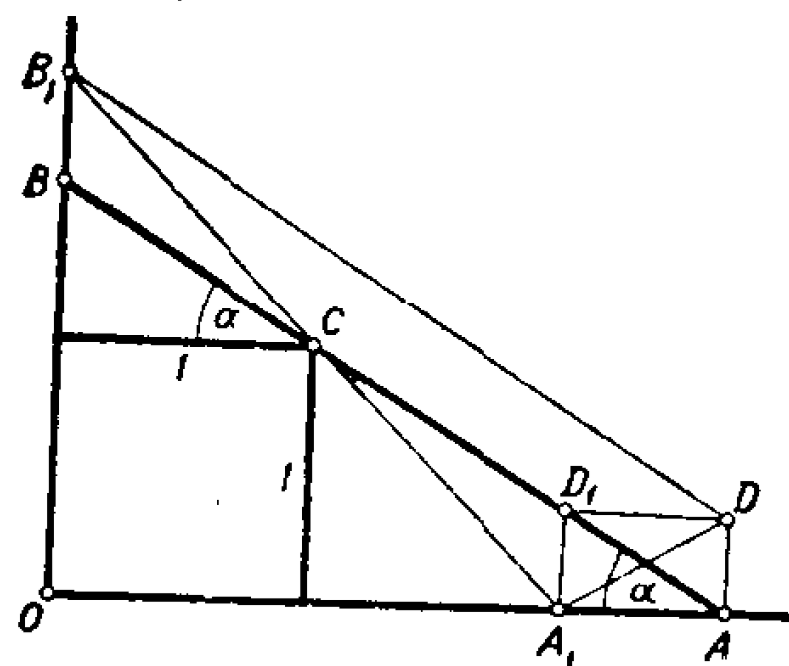


图 245

假设 $x=\dfrac{1}{\sin\alpha}$，$y=\dfrac{1}{\cos\alpha}$，我们得到

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}=2a\left(\frac{1}{\sin\alpha},\ \frac{1}{\cos\alpha}\right)\geqslant 2g\left(\frac{1}{\sin\alpha},\ \frac{1}{\cos\alpha}\right)=$$

$$=\frac{2}{g(\sin\alpha,\cos\alpha)}\geqslant\frac{2}{q(\sin\alpha,\cos\alpha)}=2\sqrt{2}.$$

等式仅当 $\sin\alpha=\cos\alpha$，即 $\alpha=45°$ 时成立.

189. 证明：如果三角形不是钝角三角形，那么它的中线之和不小于外接圆半径的四倍.

【证明】 如果 $\triangle ABC$ 不是钝角三角形，那么它的外心 O 或者在三角形内，或者在它的周界上，因此外心至少属于 $\triangle SAB$、$\triangle SBC$，$\triangle SCA$（S 是 $\triangle ABC$ 的重心）中的一个. 为了确定起见，假设外心 O 属于 $\triangle SAB$（图246）.

因为 $\triangle SAB$ 包含 $\triangle OAB$，所以

$$SA+SB\geqslant OA+OB,$$

而且等式仅当点 O 和 S 重合时成立. 因此 $\triangle ABC$ 的中线 $m_a=AA_1$ 和 $m_b=BB_1$ 以及外接圆半径 R 满足不等式

$$\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_b\geqslant 2R,$$

或

$$m_a+m_b\geqslant 3R.$$

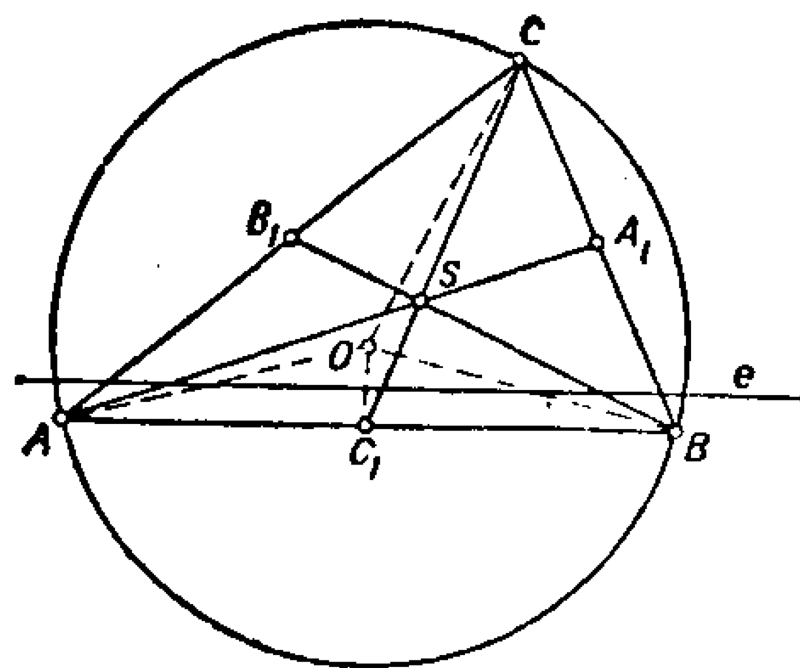


图 246

如果点 O 和点 C_1 重合，那么显然有 $CO=CC_1$. 如果外心 O 不和点 C_1 重合，那么线段 OC_1 的中垂线 e 和 $\triangle ABC$ 相交且把与 e 平行的边 AB 和顶点 C 隔开. 点 C 和 O 属于直线 e 所限定的同一个半平面，因此点 C 到点 O 的距离比点 C 到点 O 关于 e 的对称点 C_1 的距离近. 因为 $CC_1=m_c$，$CO=R$，所以

$$m_c\geqslant R,$$

而且等式仅当点 O 和 C_1 重合时成立.

将所得到的不等式相加便可得到

$$m_a+m_b+m_c\geqslant 4R.$$

实际上等式是不可能成立的，因为外心不可能和两个不同的点 S 以及 C_1 都重合，所以不可能

使两个被加的不等式同时变为等式.

关于本题的条件、断言以及证法我们指出下面几点:

1) 本题中所说的"三角形不是钝角三角形"这个条件是不能去掉的. 如果其中的一个角那怕是稍微超过了90°, 问题的断言就不再成立了. 我们来证明这一点.

我们从任意给定的钝角$\angle ABC>90°$着手. 假设O_1是过线段AB的中点C_1所作的垂直于AB的直线和过点B所作的垂直于边BC的直线的交点(图247). 在边BC上选取一点C, 使线段$BC=a$的长度满足不等式

$$a+c<2\cdot BO_1.$$

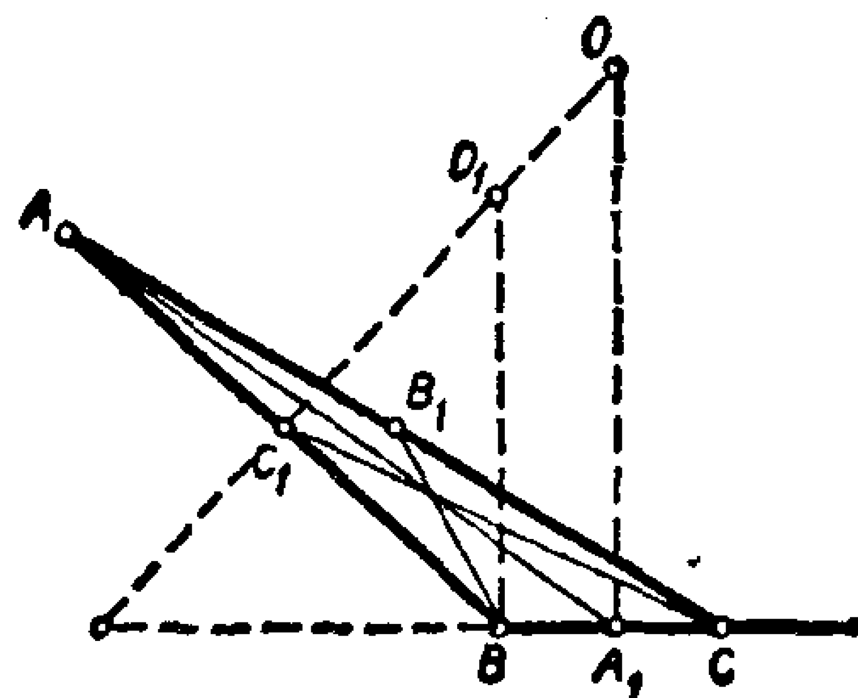


图 247

如果R是$\triangle ABC$的外接圆半径, 那么

$$R=BO>A_1O>BO_1,$$

因为BO_1和A_1O是包含在同一个角的两个边之间的平行线段, 而且线段BO_1离角的顶点比线段A_1O近(根据假设, $\triangle ABC$是钝角三角形).

对$\triangle ABC$被中线分成的$\triangle ABA_1$, $\triangle BC_1B_1$, $\triangle CBC_1$有三角不等式

$$m_a<\frac{a}{2}+c\ ,\ m_b<\frac{a}{2}+\frac{c}{2},\ m_c<a+\frac{c}{2},$$

我们得到

$$m_a+m_b+m_c<2(a+c)<4BO_1<4R.$$

2) 我们证明: 在不等式$m_a+m_b+m_c\geqslant 4R$中, 只要将系数4稍微放大一点点, 那么这个不等式不再成立.

假设$2d$是等腰$\triangle ACB$的底边AB的长, h是底边上的高(图248). 由$\triangle AA_1D$(AA_1是$\triangle ABC$的中线, D是由A_1向AB所作垂线的垂足)求得

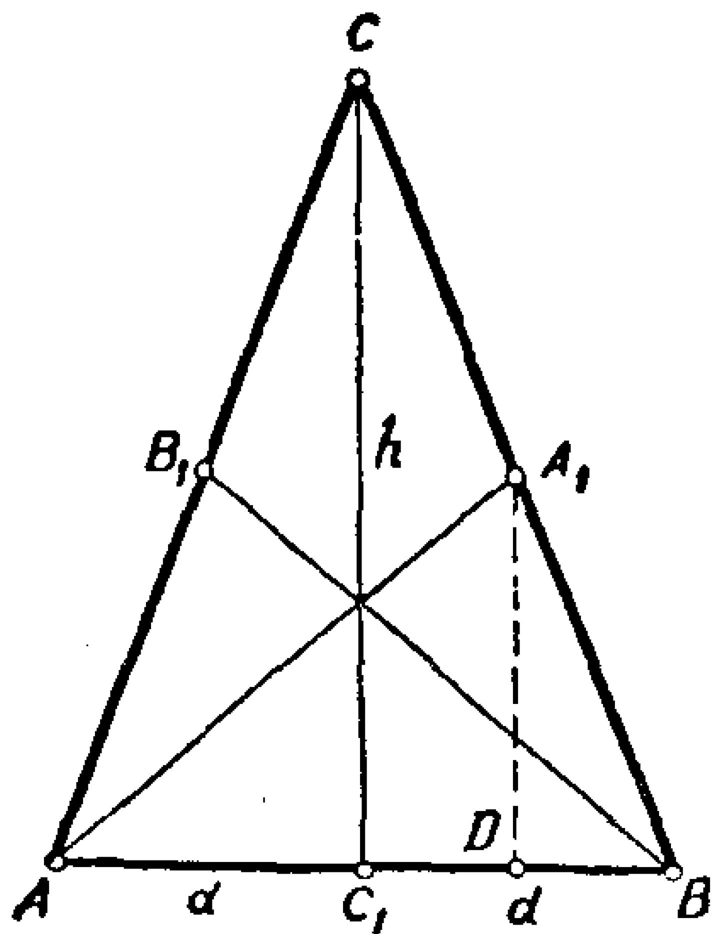


图 248

$$m_a=m_b<\frac{h}{2}+\frac{3}{2}d,\ m_c=h,$$

$$m_a+m_b+m_c<2h+3d.$$

$\triangle ABC$的外接圆半径R满足不等式

$$R>\frac{h}{2},$$

因为高h小于外接圆的直径. 这样一来,

$$m_a+m_b+m_c<\left(4+6\frac{d}{h}\right)R.$$

假设λ是任意大于4的正整数. 将高h固定, 并选取d使

$$4+6\frac{d}{h}<\lambda.❶$$

将这个不等式代入到上面所得到的不等式中, 对于$\triangle ABC$的中线之和我们得到

$$m_a+m_b+m_c<\lambda R.$$

3) 189题说到中线之和不小于外接圆半径的4倍. 现在证明: 三角形的中线和不大于

❶ 显然, 我们总可以选取这样的d, 使得满足这个不等式, 而$\triangle ABC$是锐角三角形. ——中译者注.

外接圆半径的4.5倍，而且不管三角形是什么形状都成立．在等边三角形的情况，不等式变成严格的等式：它的中线之和等于外接圆半径的4.5倍．令人惊奇的是，对于非钝角三角形，中线之和包含在非常窄的范围内：

$$4R \leqslant m_a + m_b + m_c \leqslant 4.5R .$$

假设P是$\triangle ABC$的平面上的任意一点．我们来研究点P和$\triangle ABC$的顶点所连成的线段的长．我们用$a(P)$来表示它们的算术平均值，用$q(P)$来表示它们的平方平均值．我们知道，$a(P) \leqslant q(P)$（见§55，3)）．

我们希望有不等式$q(P) \geqslant q(S)$（S是$\triangle ABC$的重心）．如果在$\triangle ABC$的顶点处放上单位质量，那么量$3[q(P)]^2$将等于这个质点系关于通过点P和$\triangle ABC$的平面垂直的轴的惯性矩．不等式$q(P) \geqslant q(S)$可如下导出：对于通过三角形的重心S的平行轴，惯性矩最小．

不利用函数$q(P)$的物理意义，也可以证明不等式$q(P) \geqslant q(S)$．

我们引入矢量（见§51）

$$\overrightarrow{SA} = \mathbf{a},\ \overrightarrow{SB} = \mathbf{b},\ \overrightarrow{SC} = \mathbf{c},\ \overrightarrow{SP} = \mathbf{p},$$

并利用

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} .$$

量$q(S)$和$q(P)$可用矢量来表示

$$3[q(S)]^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 ,$$

$$\begin{aligned} 3[q(P)]^2 &= (\mathbf{a} - \mathbf{p})^2 + (\mathbf{b} - \mathbf{p})^2 + (\mathbf{c} - \mathbf{p})^2 = \\ &= (\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) - 2\mathbf{p}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + 3\mathbf{p}^2 = \\ &= 3[q(S)]^2 + 3\mathbf{p}^2 \geqslant 3[q(S)]^2. \end{aligned}$$

由所得到的不等式$q(P) \geqslant q(S)$得到所要求的不等式

$$m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2}a(S) \leqslant \frac{9}{2}q(S) \leqslant \frac{9}{2}q(O) = \frac{9}{2}R .$$

4） 我们简略地说一下：四面体的中线之和不大于它的外接球面的半径的16/3倍．可用刚才对平面情形相应的断言的证明方法来证明这个断言．

在研究平面问题时我们知道：中线之和不小于外接圆半径的4倍仅仅对非钝角三角形成立．和非钝角三角形相应的四面体的中线之和可以超过外接球面的半径多少倍呢？

非钝角三角形包含外接圆心（在三角形内或在它的周界上）．因此，空间的类比应该认为四面体包含外接球面的球心（在四面体内或在它的表面上）．我们不加证明地引述：这样的四面体的中线之和大于外接球面的半径的四倍，并且若将倍数4稍微加大一点，断言便不再成立了．

190．把两个全等的正三棱锥的底面粘在一起，在所得到的六面体中，所有的二面角都相等，而顶点可以分成两类：在第一类顶点中，每一个顶点发出三条棱，而在第二类的顶点中，每一个顶点发出四条棱．

试求：连接两个第一类顶点的线段长和连接两个第二类顶点的线段长的比．

【解法1】设$ABCD$和$ABCE$是全等的正三棱锥，它们的底面是等边三角形ABC，如果将它们的底面粘在一起（图249）．那么所得到的六面体的顶点D和E应该在通过$\triangle ABC$的重心S且和$\triangle ABC$的平面垂直的直线上．这样一来，所得到的六面体不仅关于平面ABC对称，而且关于平面ADE也对称．由对称性推出：由顶点D，E作棱AB的垂线相等，同样

地，由顶点B，C作棱AD的垂线也相等．假设F是前两个垂线的垂足，G是后两个垂线的垂足．这时$\angle DFE$是界面ADB和ABE（交线为AB）的二面角的平面角，$\angle BGC$是界面ADB和ACD（交线为AD）的二面角的平面角．因为根据本题条件，这些角相等，所以$\triangle DFE$和$\triangle BGC$相似，因为它们是顶角相等的等腰三角形．

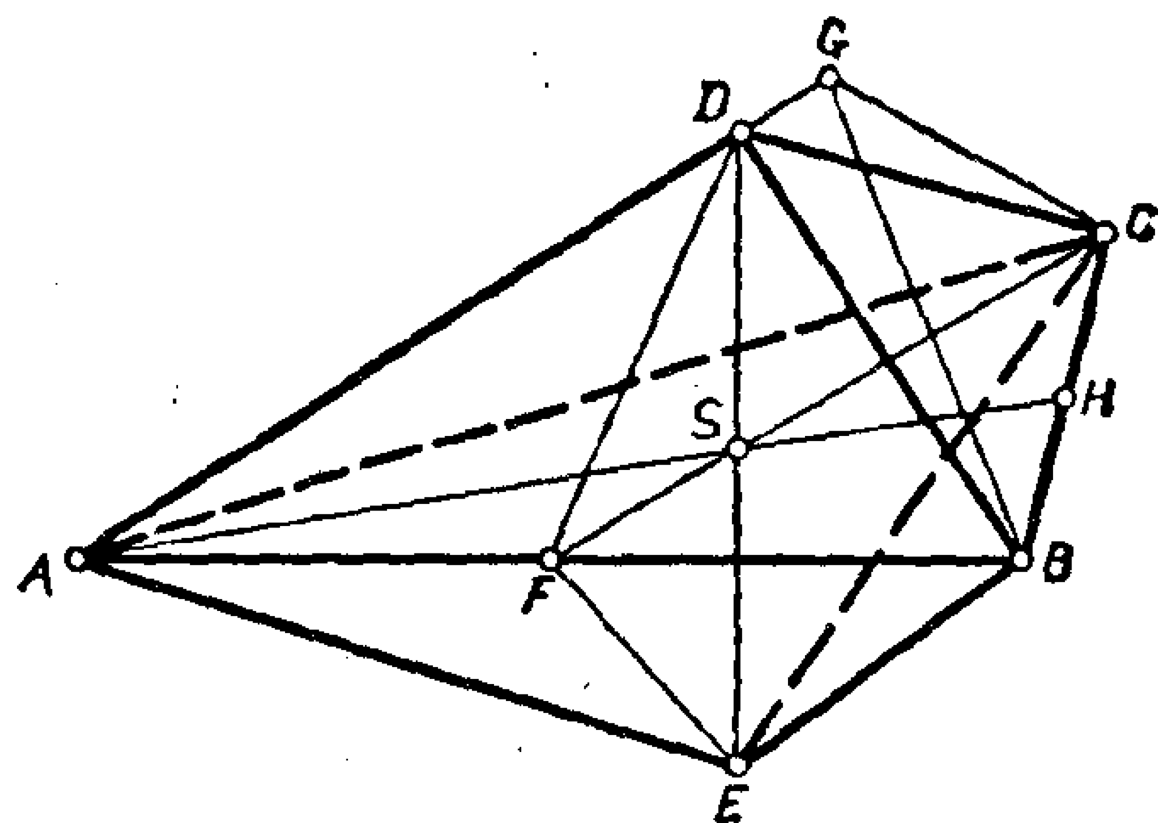


图 249

由相似三角形的对应边成比例，我们得到

$$DE: BC = DF: BG.$$

上式右端的线段是$\triangle ABD$的顶点D和B到边AB和AD上的高，因此它们它们的比等于这两个边的反比，即

$$DF . BG = AD: AB.$$

因为$BC = AB$，所以由比例等式推出$DE = AD$，即$\triangle ADE$和$\triangle ABC$一样，也是等边的．它们的边的比等于它们的高的比：

$$D \quad : BC = AS : AH.$$

因为$\triangle ABC$的重心S将中线分成$2:1$，所以$AS : AH = 2:3$．因此，所要求的DE和BC的比也等于$2/3$．

在上面的解法中，我们假定满足本题条件，即具有相等的二面角的六面体是存在的．现在我们来证明这一点．我们取比$DE: BC$等于$2/3$（在解答中所得到的值），即我们研究这样的六面体，它可这样得到：从等边三角形ABC的重心S作一直线和三角形所在的平面垂直，在这直线上取线段SD和SE，使它们都等于$\triangle ABC$的边长的$1/3$．只要将前面的论证步骤反过来重复一遍就可证明所有的二面角都相等的六面体是存在的．

根据六面体$DABCE$的作法

$$DE: BC = AS: AH.$$

因此，$\triangle ADE$和$\triangle ABC$相似，又因为$\triangle ABC$是等边的，所以和它相似的$\triangle ADE$也是等边的，且$AD = DE$．但这时等式

$$DF: BG = AD: AB$$

的右边等于$2/3$，因而左边也等于$2/3$，同样地，等式

$$DE: BC = DF: BG$$

两边都等于$2/3$，所以等式成立．由此我们得出：等腰三角形DFE和BGC相似，因而它们的对应角相等，所以所作的六面体所有的二面角都相等．

构作二面角都相等的六面体的最简单的方法之一如下．取等边三角形ADE，先将它绕边DE朝一边旋转$120°$，然后再向另一边旋转$120°$，并研究所有三个三角形所张成的立体．由上易知作法的正确性．

【解法2】我们利用图249中所用的表示法．首先我们注意到，六面体$DABCE$关于平面ABC和ADE是对称的，因此，这两个平面把以AB和AD为棱的二面角二等分，根据本题条件，所有的二面角都相等，所以对称平面ABC和ADE中的每一个和平面ABD构成相

同的角.

过$\angle BAD$的平分线作一平面和界面BAD垂直. 当对这个平面作反射的时候，$\angle BAD$的边AB和AD从一个变到另一个，又因为以AB和AD为棱的二面角仍然保持相等，所以平面ABC变到平面ADE，反之亦然. 因此，直线AS作为它们的交线仍然在原来的位置上，且对称的角$\angle BAS$和$\angle DAS$相等. 如果线段DE绕轴AS旋转$90°$，那么点D落到棱AB上，点E落到棱AC上. 这样一来，六面体$DABCE$的对角线DE等于和AS垂直的直线被$\triangle ABC$所截得的线段B_1SC_1的长（图250）. 因为S是$\triangle ABC$的重心，所以线段AS是顶点A到边BC的中点的距离的2/3. 因此，所要求的比

$$DE : BC = B_1C_1 : BC = 2/3.$$

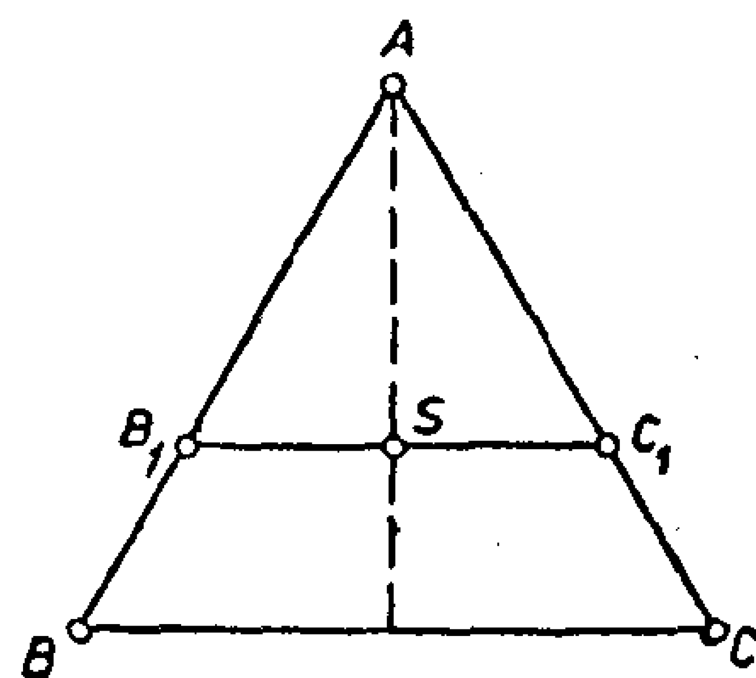


图 250

【解法3】我们研究两个三棱锥$DABC$和$EABC$粘合时所得到的立体在顶点A处的四面角. 它由四个相等的面角组成，这些面角一个和一个相邻，且构成（根据本题条件）相等的二面角. 因此，六面体$DABCE$在顶点A处的四面角是正四面角，即是正四棱锥的顶点的空间角，它绕垂直轴旋转$90°$时，又变到自身.

因此，如果六面体的对角线DE绕顶点A的四面角的轴AS旋转$90°$时，那么DE和上一解法中所研究过的线段B_1C_1重合. 这样一来，所要求的比$DE : BC$等于2/3.

191. 在毕业舞会上，每一个小伙子至少和一个姑娘跳舞，但任何一个小伙子都没有和所有的姑娘跳舞，而每一个姑娘至少和一个小伙子跳舞，但任何一个姑娘都没有和所有的小伙子跳舞.

证明：在所有参加舞会的人中，可以找到这样两个小伙子和两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只和这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个只和这两个小伙子中的一个跳过舞.

【证法1】我们将所有的小伙子按每一个小伙子在毕业舞会上和多少个姑娘跳舞来分成组（分在一组的所有小伙子和同样多个姑娘跳过舞）. 假设F_1是和最多个数的姑娘跳过舞的小伙子之一. 因为F_1不和所有的姑娘跳舞，那么至少可以找到一个未和F_1跳过舞的姑娘L_1. 但因为每一个姑娘至少和一个小伙子跳舞，所以一定可以找到一个和L_1跳过舞的小伙子F_2.

小伙子F_1是这样选取的，未和F_2跳过舞的姑娘数不小于未和F_1跳过舞的姑娘数. 由此推出：F_2未和所有与F_1跳过舞的姑娘跳过舞，不然的话，和F_2跳过舞的姑娘数大于和F_1跳过舞的姑娘数，因为F_2和L_1跳过舞，而F_1未与她跳过舞. 于是，有这样一个姑娘L_2，她和F_1跳过舞但未和F_2跳过舞.

小伙子F_1，F_2和姑娘L_1，L_2满足本题所有的要求，因为F_1，L_1以及F_2，L_2都没有相互跳过舞，而F_1和L_2跳过舞，F_2和L_1跳过舞.

在上面所作的证明中，我们只利用了一部分条件：任何一个小伙子不和所有的姑娘跳舞以及每一个姑娘至少和一个小伙子跳过舞. 由此立即推出另一个证法，它只要用到另一部分条件：任何一个姑娘不和所有的小伙子跳舞以及每一个小伙子至少和一个姑娘跳过舞，因为在本题条件中，小伙子和姑娘是对称的（他们可以"相互替换"）. 这样一来，每一个这样的证明仅用到本题条件的一半.

虽然全部用到本题条件的证法并不比上面的证法简短，但是我们还是给出三个这样的证法，因为它们可以表明191题的推广以及它和其它问题的联系. 在§74中叙述了一个这样的推广.

【**证法2**】我们在毕业舞会的参加者当中，选取某一个小伙子 F_1 以及未和 F_1 跳过舞的姑娘 L_1. 假设 F_2 是和 L_1 跳过舞的小伙子，L_2 是未和 F_2 跳过舞的姑娘. 我们约定照此进行下去：挑出小伙子 F_i ($i=2, 3, \cdots$) 后，再找出未和 F_i 跳过舞的姑娘 L_i，然后找出和 L_i 跳过舞的小伙子 F_{i+1}. 这个过程一直进行到挑出来的是前面已挑过的人之前为止. 因为参加毕业晚会的人数是有限的，所以这种时刻或早或迟一定会到来.

于是，从出席舞会的人中，总可以挑选出 k 个小伙子和 k 个姑娘并将他们排成这样一圈，使每一个小伙子在两个姑娘中间，他和左边的姑娘跳过舞而没有和右边的姑娘跳过舞. 剩下的还要证明：这样的圆圈可以仅由两个小伙子和两个姑娘排成.

假设 k 个小伙子和 k 个姑娘按下面的次序排成一个圆圈：

$$F_1,\ L_1,\ F_2,\ L_2,\ \cdots,\ F_k,\ L_k$$

（因为在这种写法中，圆圈被"断开"了，所以应该指出，L_k 在 F_1 的左边，即 F_1 和 L_k 跳过舞）. 我们证明：如果 $k>2$，那么这样的圆圈可以由更少个数的小伙子和姑娘组成.

事实上，如果 F_1 和 L_2 跳过舞，那么只要取

$$F_1,\ L_1,\ F_2,\ L_2$$

就行了. 如果 F_1 未和 L_2 跳过舞，那么

$$F_1,\ L_2,\ \cdots,\ F_k,\ L_k$$

满足所要求的条件. 这样一来，排成一圈的小伙子和姑娘的人数总可以减少，一直到圆圈上只剩下两个小伙子和两个姑娘时为止. ★

【**证法3**】我们假设在出席毕业舞会的小伙子和姑娘中，不能挑出满足本题条件的4个人. 我们将证明这样的假设将会导致矛盾，即参加毕业舞会的人有无限多个. 本题断言的正确性将由所得到的矛盾推出.

假设 L_1 是一个姑娘，F_1 是和 L_1 跳过舞的小伙子，L_2 是没有和 F_1 跳过舞的姑娘，F_2 是和 L_2 跳过舞的小伙子. 可以断定 F_2 和 L_1 跳过舞，因为要不然的话，和本证法的假设相反，L_1，F_1，L_2，F_2 四个人将满足本题证明中的全部要求. 于是，在挑选出来的两个小伙子和两个姑娘中，仅只有 L_2 和 F_1 没有相互跳过舞.

假设在参加毕业舞会的人中我们已挑出了一组人

$$L_1,\ F_1,\ L_2,\ F_2,\ \cdots,\ L_k,\ F_k,$$

其中小伙子 F_i 和姑娘 L_j 跳过（或未跳过）舞，如果 $j\leqslant i$（或者 $j>i$）. 当 $k=2$ 时，这样的组的存在性已经证明过了. 现在来证明：对挑出的一组人总可以再增加一对人 L_{k+1}，F_{k+1}，使扩大的组仍具有原来的组的性质. 因为这样的过程可以无限重复，所以由此可推出参加舞会的人数是无穷的.

因为 F_k 和姑娘 L_1，$\cdots$，L_k 中的每一个跳过舞，那么至少有一个姑娘 L_{k+1}，F_k 未和她跳过舞. 姑娘 L_{k+1} 没有和小伙子 F_1，$\cdots$，F_{k-1} 中任何一个跳过舞，因为假如她和小伙子 F_i 跳过舞，那么与假设相反，L_k，F_k，L_{k+1}，F_i 四个人具有全部所要的性质. 既然 L_{k+1} 没有和小伙子 F_1，$\cdots$，F_k 中任何一个人跳过舞，所以在舞会的参加者中至少可以找到一个和 L_{k+1} 跳过舞的小伙子 F_{k+1}. 不难看出，F_{k+1} 和 L_1，$\cdots$，L_k 跳过舞，因为譬如说他没有和 L_i 跳过舞，那么 L_i，F_i，L_{k+1}，F_{k+1} 四个人与假设相反而满足本题全部要求。

于是，我们作出了一个扩大了的序列

$$L_1,\ F_1,\ L_2;\ F_2,\ \cdots,\ L_k,\ F_k,\ L_{k+1},\ F_{k+1},$$

它具有同样的性质：小伙子中的任何一个 F_i 和任何一个姑娘 L_j （$1\leqslant i\leqslant k+1$，$1\leqslant j\leqslant k+1$）当 $j>i$ 时没有跳过舞，而当 $j\leqslant i$ 时跳过舞.

所得到的矛盾证明了本题断言的正确性.

由所引的证法推出：如果参加舞会的人有无穷多个（精确地说，如果小伙子和姑娘各有无穷多个），那么本题的断言不再正确了.

【证法4】由本题条件可知，对于每一个小伙子，可以指出一个没和他跳过舞的姑娘.对于任何两个小伙子，也可能找到一个姑娘，她没有和这两个小伙子跳过舞.也许可能对任意三个甚至更多个数的小伙子指出一个姑娘，她没有和他们任何一个人跳过舞.无论如何，存在这样一个最大的数 k，使得对任意 k 个小伙子可以找到一个姑娘，她和他们之中任何一个人都没跳过舞.因为每一个姑娘至少和一个小伙子跳过舞，所以 k 必定小于出席毕业舞会的小伙子的人数.

因为数 $k+1$ 已经不具有数 k 的性质，所以可以挑出 $k+1$ 个小伙子

$$F_1,\ F_2,\ \cdots,\ F_{k+1},$$

所有的姑娘和他们跳舞（每一个姑娘和 F_1，F_2，$\cdots$，F_{k+1} 中的某些人跳过舞，当然，不是和全体小伙子跳舞）.如果除去某一个小伙子不算，例如除去 F_1，那么对于剩下的 k 个小伙子（根据数 k 的定义）可以找到一个姑娘 L_1 未和这些人跳过舞.因此在所挑选出的 $k+1$ 个小伙子中，和 L_1 跳过舞的只有 F_1.依次除去，F_2，F_3，$\cdots$，F_{k+1} 中的一个，进行类似的讨论，我们得到一个有序的姑娘组

$$L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_{k+1}.$$

她们之中的每一个人只和所挑选出来的 $k+1$ 个小伙子中和她具有同样编号的小伙子跳过舞.

因为 $k\geqslant 1$，所以总可以挑选出小伙子 F_1，F_2 和姑娘 L_1，L_2，对于他们，这个断言是正确的，这就是所要证明的.

若仅作一些最必要的论证，即证明 L_1 和 L_2 的存在性，则本题的证明可稍微化简.上面所引的证明实质上证明了更广的断言：如果在毕业舞会上，每一个姑娘至少和一个小伙子跳舞，而对任何 $k-1$ 个（但不大于 $k-1$）小伙子可以找到一个姑娘未和他们之中任何一个跳过舞，那么在舞会的参加者中，可以找到 k 个小伙子和 k 个姑娘使这些小伙子中的每一个人和这些姑娘中的一个且刚好一个跳过舞.

§74. 关于完全偶图

我们用点来表示毕业舞会的每一个参加者，并且约定，若两个点所对应的小伙子和姑娘彼此跳过舞，就将这两个点用线连起来.

191题的条件所对应的图叫做**偶图**，因为它的所有顶点可以分成这样两组（即分成对应于姑娘和小伙子的顶点），使得所有的边仅仅是连接属于不同组的顶点.可以将图作些补充，使得任何一对属于不同组的点有边连接.这样一来，图的边也可以分成两组：属于原来的图的边以及后来补加的边.为了使我们方便地区分这两种类型的边，我们将它们涂成两种颜色.

于是可以说，191题化为研究**完全偶图**，它的边被涂成两种颜色，而且由本题条件推出，

不管由哪一个顶点发出的边不能都涂成同一种颜色．本题的断言化为：在补充以后的图中一定可以找到构成封闭的“四边形”的边，而且边的颜色是相间错开的（换句话说，这个四边形的任何两个相邻的边所涂的是不同的颜色）．

不但如此，对应于本题条件的完全偶图可以用来直观地证明它的断言．我们建议读者详细作出这种证明．应该注意到，如果将“和…跳舞”这句话换成“不和…跳舞”，再将“不和…跳舞”这句话换成“和…跳舞”，则本题条件不变．如果我们仍然用边来连接那些在毕业舞会上相互跳过舞的小伙子和姑娘所对应的顶点，那么那些在第一种情况下没有用边连接的顶点将在第二种情况下用边连起来，反之亦然．与第一个图对偶的新图也满足本题的所有条件．

在证明本题时所用的论证方法也适用于所说的图不是完全偶图而只是完全图的情况（我们提醒一下，任何两个顶点都有边连接的图叫做完全图）．我们建议读者独自去证明这个断言的正确性，而我们自己仅限于（为了更直观）把它叙述成下面的样子．

我们假设，有一群人聚会，其中一部分人彼此相识；而有一部分人是第一次相见．谁也不和所有的参加者相识，但与会的每一个人至少和一个人相识．

这时由这一群中可以分出四个人而且可以把他们排成一个圆圈，使得每一个人只和自己两个相邻的人中的一个人相识．如果利用191题的证法 1 的方法，不难证明这个断言．在 191 题的证法 4 中所进行的论证仍然有用．

读者可以独自证明下面断言的正确性：如果在某一群人中，其中每一个人至少有一个熟人，而对于这一群人中的任何 k（不是很大的数）个人，总有一个人不认识他们之中的任何一个人，那么在这一群人中，可以挑选出 $2k$ 个人，并可将他们排成这样两排，使得仅仅只是互相对面站着的一对人才是彼此相识的．

现在我们来解释一下，在无限的完全图的理论中，对应的问题将是怎样一种情况．我们可用下面的方式来叙述它．

将具有无穷多个顶点的完全图的边涂成两种颜色，使得没有任何一个顶点发出的边都是一种颜色的．下面的断言是否正确：在这样的图中，总可以找到一个四边形，它的任何两个相邻的边被涂成了不同的颜色吗？我们举出一个例子，这个例子表明，这样的四边形并不总是存在的．假设图的顶点可以用全体自然数来编号．从编号为 a 的顶点到编号为 b 的顶点的边被涂成红色，如果数 a 和 b 中最大的数是偶数，如果最大的数是奇数，就将这个边涂成兰色．不难证实，所得到的红—兰图不包含任何两个相邻的边被涂成不同的颜色的四边形．

192．证明：对任意正数 a，b，c，d，都有不等式

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}.$$

【证明】我们证明：右边立方根下的表达式不大于左边表达式的立方．我们利用两个数的算术平均值和几何平均值之间的众所周知的关系式（两数之积不大于它们的算术平均值的平方）．两次利用这个关系式，我们得到

$$\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}=\frac{1}{2}\left(ab\frac{c+d}{2}+cd\frac{a+b}{2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\frac{c+d}{2}+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2\frac{a+b}{2}\right]=$$

$$=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\times\frac{a+b+c+d}{4}\leqslant\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2\cdot\frac{a+b+c+d}{4}=$$

$$=\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3.$$

剩下的还要验证

$$\frac{a+b+c+d}{4}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}.$$

为了证明这个不等式，我们来计算右边和左边的平方差（可见§55，4））：

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}-\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{16}[3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)]=$$

$$=\frac{1}{16}[(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2]\geqslant0.$$

于是，本题得证.

在本题的条件中说到了a，b，c，d是正数，而在上面的证明中没有明显地用到这一点，也许会觉得，这个条件简直是多余的．事实上，正是由于数a，b，c，d是正的，我们才能利用算术平均值和几何平均值之间的关系式，如果不假设数是正的，那么关于两数之积不大于它们的算术平均值的平方这一断言不再成立．❶

❶ 虽然“两个实数的几何平均值不大于它们的算术平均值”这个定理只对正数才有意义，可是“两实数之积不大于它们的算术平均值的平方”这一定理却是对任何实数都成立的．不难证明这一点．但是我们并不能由此断定本题的成立不需假设a,b,c,d是正数．由于从$ab\leqslant\left(\frac{c+b}{2}\right)^2$推出$ab\frac{c+d}{2}\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{c+d}{2}$，需设$c+d\geqslant0$．同样$a+b\geqslant0$．所以为了使本题不等式成立，可设$a+b\geqslant0$，$c+d\geqslant0$，或$a+c\geqslant0$，$b+d\geqslant0$，或$a+d\geqslant0$，$b+c\geqslant0$．——中译者注．

二十三、1965年—1974年试题及解答

193．怎样的整数 a,b,c 满足不等式

$$a^2+b^2+c^2+3<ab+3b+2c?$$

【**解**】因为不等式的两边是整数，所以它在而且仅在下面的情况下成立：如果

$$a^2+b^2+c^2+4\leqslant ab+3b+2c.$$

这个不等式可以变成

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2\leqslant 0.$$

由此看出，它当而且仅当左边的每一个平方等于0时成立（不然的话，平方和是正的）．因此

$$a-\frac{b}{2}=0,\quad \frac{b}{2}-1=0,\quad c-1=0.$$

这样一来，原不等式只可能有唯一的一组解

$$a=1,\quad b=2,\quad c=1.$$

194．在圆内或圆上任取8个点．证明：在这8个点中，必有两个点的距离小于圆的半径．

【**证法1**】在所取的8个点中至少有7个点不和圆心重合．这7个点中的每一个点确定一个圆的半径．如果不是所有的半径都不同，那么不和圆心重合的某两个点在同一个半径上．因此，它们之间的距离小于圆的半径．

我们假设所有7个不和圆心重合的点在7个不同的半径上．这些半径至少构成7个圆心角，因此，在它们之中可以找到这样两个半径，它们之间的夹角小于$\frac{1}{6}360°$，即小于60°．我们用 A 和 B 来表示8个给定点中的那样两个点，它们所确定的半径之间的夹角小于60°（图251）．

因为$\angle AOB<60°$，所以在$\triangle AOB$中有更大的角．但在每一个三角形中，大角所对的边大．因此，在$\triangle AOB$中，有一个边大于边 AB．这样一来，边 AB 小于边 AO，OB 中的某一个，但由于 AO 和 OB 中最大的不超过圆的半径，所以 AB 小于圆的半径．

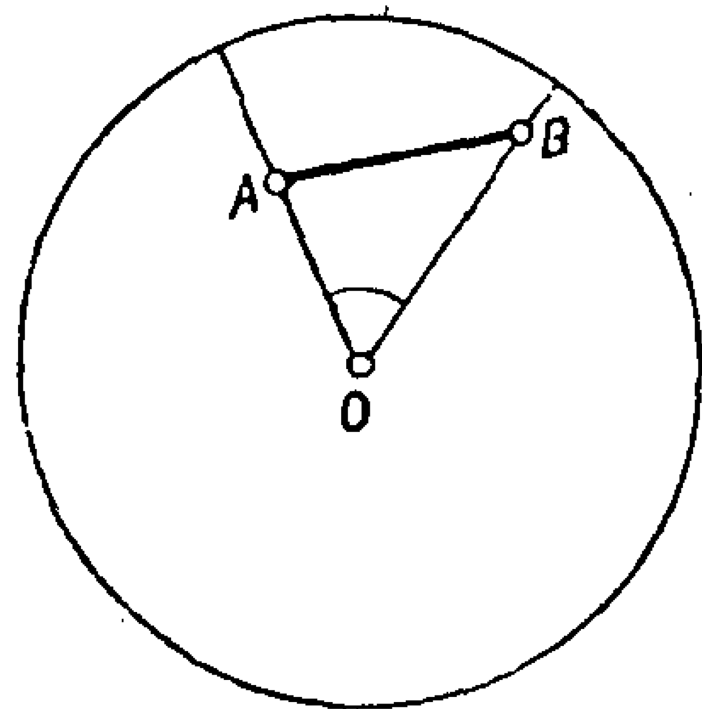


图 251

于是，在8个任意取的点中总可以找到两个点，它们之间的距离小于圆的半径．

【**证法2**】作这个圆的内接正六边形．通过它的顶点的半径和连接两个相邻半径的中点所得的线段把圆分成7个区域（图252）．每一个区域内接于一个其直径等于原来的圆的半径的圆．事实上，正中的区域内接于和原来的圆同心而半径小一倍的圆，而其余区域的顶点在以原来的圆的内接正六边形的边为直径的圆上．

现在我们来研究 8 个给定的点. 在圆被分成的 7 个区域中，必有这样一个区域，这个区域至少有 2 个给定点，而且其中有一个点在包含它们的区域的外接圆内，或者这两个点同在大圆的一条半径上，因为假若所有在同一区域的两个点都不满足上述条件，那么给定点最多只有 7 个. 这样一来，这两个点之间的距离小于通过区域顶点的圆的直径，即小于原来的圆的半径.

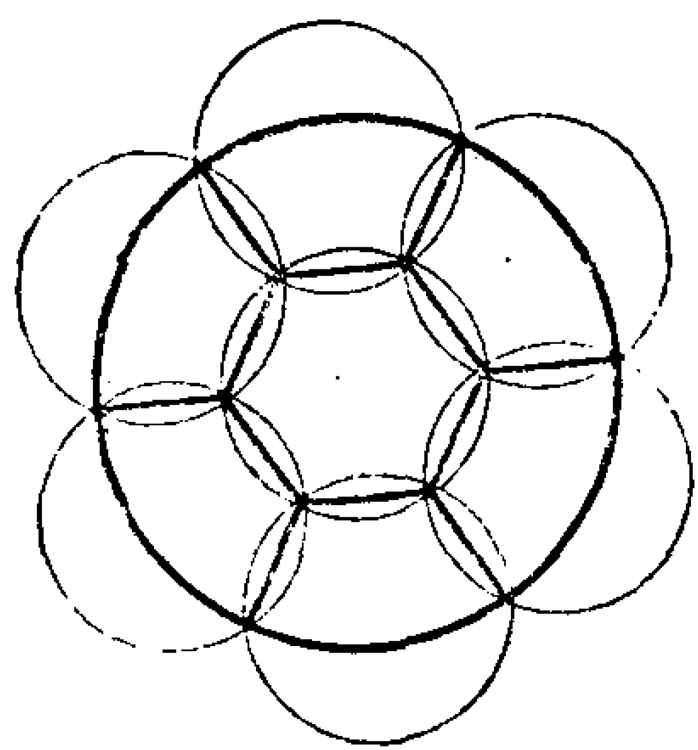


图 252

关于194题和它的两个证法可以作两点注解.

1） 不难看出，不能用给定 7 个点来代替 8 个点，因为圆心和圆内接正六边形的顶点便可构成 7 个点的例子，它们具有这样的性质：在这 7 个点中，任意两点之间的距离不小于圆的半径. 由证法 1 看出，和本题断言相矛盾的其它分布（当给定点的个数等于 7 时）是不存在的.

2） 假设 a_n 表示这个圆的内接正 n 边形的边长. 根据本题所证明的断言，在圆内给定的 8 个点中，总可以找到这样两个点，它们之间的距离小于 a_6. 我们来证明：从 8 个给定的点中，总可以挑选出这样两个点，它们之间的距离不大于 a_7. 本题断言在这方面不能再作进一步的改进了，因为“一个点在圆心，其余 7 个点在圆内接正七边形的顶点上所构成的 8 个点”这个例子便表明了这一点.

论证的步骤在很多方面类似于证法 2 中的论证，但在某些方面正好和它相反.

我们用下面的方法把圆分成 8 个区域. 先作一圆内接正七边形，它的最大的对角线交成一个小的七边形. 再将大的正七边形的顶点和与它在同一半径上的小七边形的顶点连成线段. 于是我们将圆分成了 8 个区域：正中间的是小七边形，其它 7 个区域是由小七边形的边，我们所作的两个相邻的线段以及它们之间的圆弧所围成的（图253）.

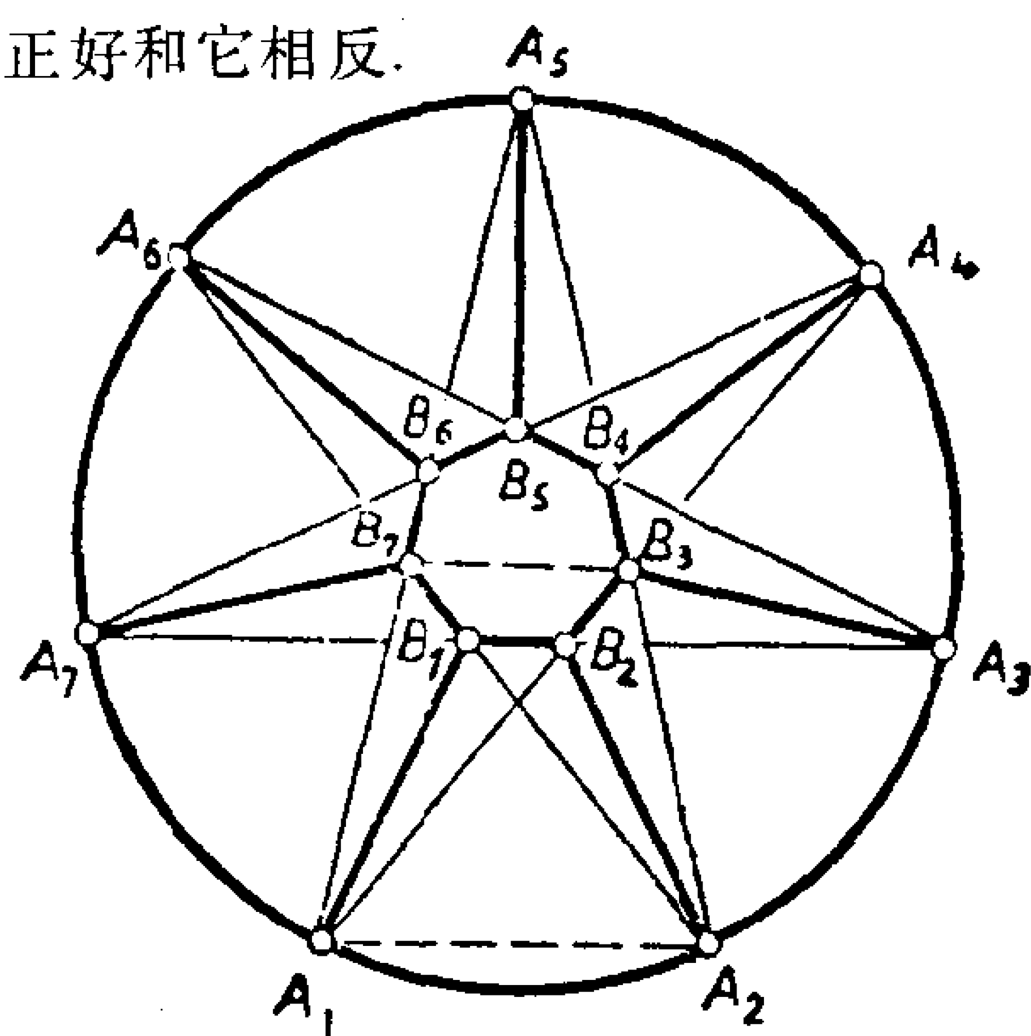


图 253

我们断言：若在 8 个区域中，某一个区域包含有 8 个给定点中的 2 个点（这两个点可以在区域的边界上），那么，这两个点之间的距离不大于 a_7. 若点属于小七边形，断言显然是对的，因为小七边形的最大的对角线的两个端点是相距最远的两个点，然而这个对角线小于大七边形的边长（为了证实这一点，只要研究图253中的 $\triangle A_1A_2A_5$ 就行了，在 $\triangle A_1A_2A_5$ 中，B_7B_3 是小七边形的最大对角线，$A_1A_2 = a_7$ 是大七边形的边）.

现在我们来研究属于“被截的扇形” $A_1A_2B_2B_1$ 的点. 首先我们注意到，$A_1A_2 = A_2B_1$（和 $A_1A_2 = A_1B_2$）. 这可如下导出：四边形 $A_1A_2B_1A_7$ 是菱形，因为它的对边平行且 $A_7A_1 = A_1A_2 = a_7$. 对角线 A_1B_1 把菱形 $A_1A_2B_1A_7$ 分成两个等腰三角形 $A_1A_2B_1$ 和 $A_1A_7B_1$. $\angle A_1A_2B_1$ 和 $\angle A_1A_7B_1$ 所对的圆弧小于圆周的 $\frac{1}{3}$（等于圆周的 $\frac{2}{7}$），于是 $\angle A_1A_2B_1$ 和 $\angle A_1A_7B_1$ 都小于60°. 因此，等腰三角形 $A_1A_2B_1$ 和 $A_1A_7B_1$ 的底边 A_1B_1 小于它们的腰 $A_1A_2 = a_7$.

显然，“被截的扇形”的两个相距最远的点应该在它的边界上（为了确定起见，我们所有的讨论都是对曲线四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 来进行的）. 最长的线段的端点不能和曲线四边形边界上直线部分的内点（即线段 A_2B_2，B_2B_1，B_1A_1 的内点）重合，因为边界上直线部分的任一内点到另一个给定点的距离总是小于这个边界线段的某一个端点到这个给定点的距离. 在连接“被截的扇形”的两个点的线段中，最大的线段的端点不能和弧 A_1A_2 的内点重合，因为圆的任意一点（不同于圆心）到弧上的点的距离当这点是弧的某一端点时达到最大. 于是连接“被截的扇形” $A_1A_2B_2B_1$ 的点所得到的最大线段的端点只可能是四个点 A_1，A_2，B_2，B_1 中的某两个点. 然而正象我们所看到的，这些点所连成的最大线段的长等于 a_7.

现在我们来研究分布在圆内的 8 个给定点. 如果它们属于小七边形，那么它们任何两点之间的距离都小于 a_7. 如果不是所有的 8 个点都属于小七边形，我们绕着圆心来转动 8 个区域的边界所构成的“网”，使得 8 个给定点中的某一个点落在两个相邻区域的分界线上. 这时，在每一个区域的内部和边界上可能有 8 个给定点中的若干个点（也可能没有任何一个点）. 对所有 8 个区域来说，属于各个区域（内部和边界上）

的点的个数之和不小于 9，因为在边界上的点我们至少算了两次．因此，在 8 个区域中，一定有这样一个区域，它至少包含 8 个给定点中的 2 个点．根据上面的证明，这两个点之间的距离不大于a_7．于是问题的断言被证明了．

195．设正四棱台的下底面的外接圆半径小于侧面的外接圆半径．

证明：沿棱台表面连接棱台的空间对角线的两个端点的路径中，最短的路径只通过棱台的侧面而不经过底面．

【证明】我们研究具有下底面 $ABCD$ 和上底面 $EFGH$ 的正四棱台（图254）．因为这样的棱台关于通过两底中心的轴是对称的（当旋转的角度为90°的倍数时，棱台 $ABCDEFGH$ 变到自身），所以我们无论研究哪一条空间对角线都是一样的．如果选取空间对角线 AG，那么可以断定，由顶点 A 沿棱台表面走到顶点 G 的每一条路径应该和空间六边形 $BCDHEF$ 相交．因为六边形 $BCDHEF$ 的任意一点可以用位于棱台表面的直线段和顶点 A 与 G 连接起来，且连接任意两点的直线段比以这两点为端点的折线要短，所以从顶点 A 沿棱台表面走到顶点 G 的最短路径只可能是由两个直线段组成的折线．这两个线段可以或者通过侧面和上底，或者通过下底和侧面，或者通过两个侧面．因为正四棱台关于平面 $AEGC$ 是对称的，所以说到侧面时，可以不必确切地说明是哪一个侧面．

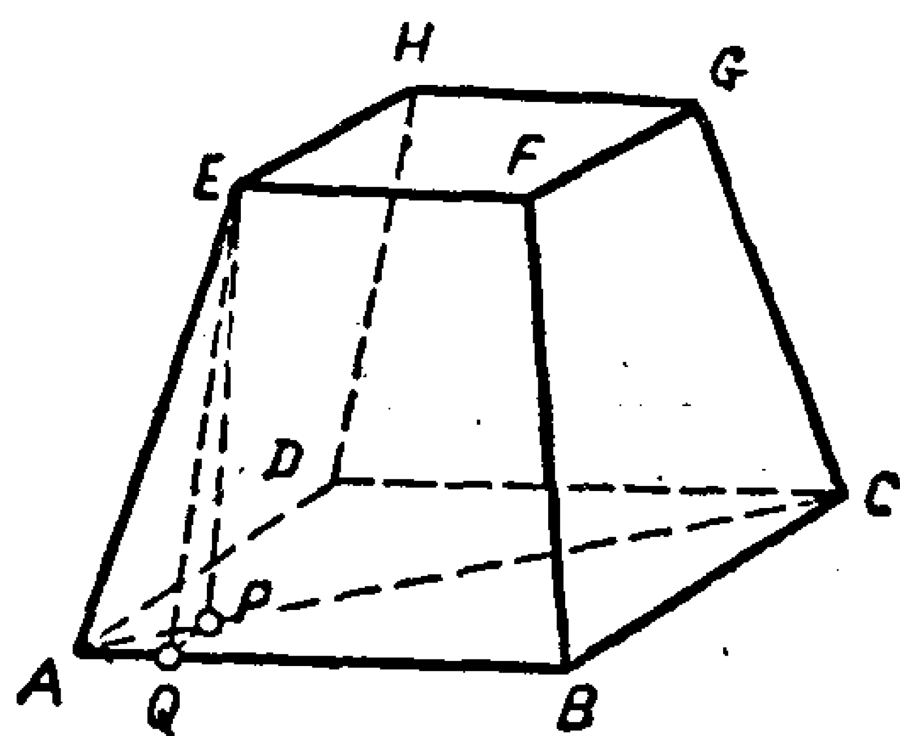


图 254

在所有三种情形，最短的路径通过棱台的两个相邻的面：或者通过一个侧面和一个底面，或者通过两个相邻的侧面．如果把两个相邻的面绕它们的公共棱摊成一个平面，那么从顶点 A 到 G 的路径变成一平面折线，而最短的路径在摊开的平面上变成连接点 A 和 G 的直线段．我们来查明，在上面所列举的三种情形中，在哪一种情况下，在摊开的平面上连接顶点 A 和 G 的直线段是最短的．

棱台的侧面 $ABFE$ 是一等腰梯形，其下底 AB 的两个底角大于45°(上底 EF 的两个底角小于135°)．事实上，如果 P 和 Q 是顶点 E 在下底面和棱 AB 上的投影，那么$\triangle APQ$ 是等腰直角三角形，又因为 $EQ > PQ = AQ$，所以在$\triangle AEQ$ 中，大直角边所对的$\angle EAQ$ 大于45°．

由本题条件推出，$\alpha = \angle AFB < 45°$．事实上，在下底面的外接圆中，弦 AB 所系的弧为90°．因此，它所对的圆周角为45°(和135°)．因为根据本题条件，棱台 $ABCDEFGH$ 的侧面的外接圆半径大于下底面的外接圆的半径，所以在梯形 $ABFE$ 的外接圆中，弦 AB 所对的圆周角小于45°．因此$\angle AFB < 45°$．

我们对于上面所列举的所有三种情形，画出相应的棱台的两个相邻面的摊开图(图255)．在所有三种情形中，连接空间对角线的端点的直线段都和两个相邻面的公共棱相交(在图255中，这个线段用粗黑线表示)．事实上，对于所有三种情形，在摊开图中可以找到一个凸四边形，而这个凸四边形的一个对角线是两个相邻面的公共棱，另一个对角线是连接空间对角线的端点的直线段．这个四边形的一组对边用虚线表示．四边形的凸性只需对情形 a)和 c）论证就行了．事实上，在图255.a)所画的四边形 $AFG'E$ 中，$\angle AEF < 135°$，而$\angle FEG' = 45°$．在图255 c)中，$\angle AFB < 45°$，而$\angle BFG'' < 135°$．

剩下的只需证明：连接空间对角线的端点且在棱台表面上的所有路径中最短的是图255．c)

所画的路径 AG''. 事实上，图255. b)所画的线段 $A'G$比图255. a)所画的线段 AG'长，因

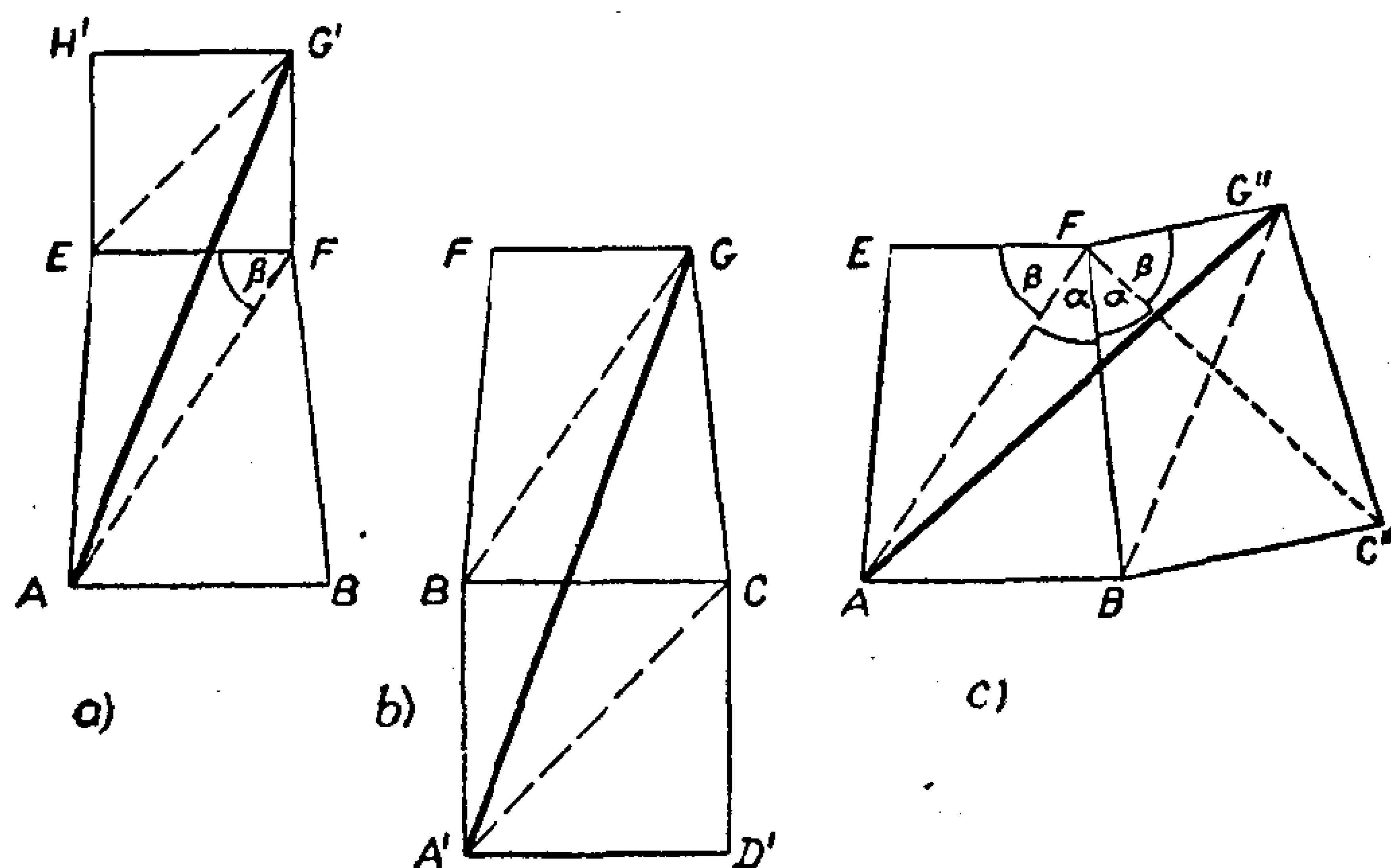


图 255

为两个线段在水平直线（两个相邻面的公共棱在这直线上）上的投影相等，而线段 $A'G$ 在竖直线上的投影大（下底大于上底）. 于是，剩下还要证明 $AG'>AG''$(图255. a)和 c）. $\triangle AFG'$ 和$\triangle AFG''$有两条边对应相等，AG' 和 AG''分别是它们的第三边. 因此，大边是大角对的边. 这样一来，只需证明

$$\angle AFG'>\angle AFG''.$$

假设 $\beta=\angle AFE$. 这时所要证明的不等式具有形式

$$90°+\beta>2\alpha+\beta.$$

它实际上是成立的，因为根据早先所证明的，$\alpha<45°$.

196. 是否存在这样的空间五边形，它所有的边都相等，而且任意两个相邻的边的夹角都是直角？

【解】满足本题条件的空间五边形 $ABCDE$ 是否存在与它的边等于多长是没有关系的，因此从单位正方形 $ABCO$ 入手总是方便的，我们来探究五边形的顶点 D和 E 可能分布在什么位置上（图256）.

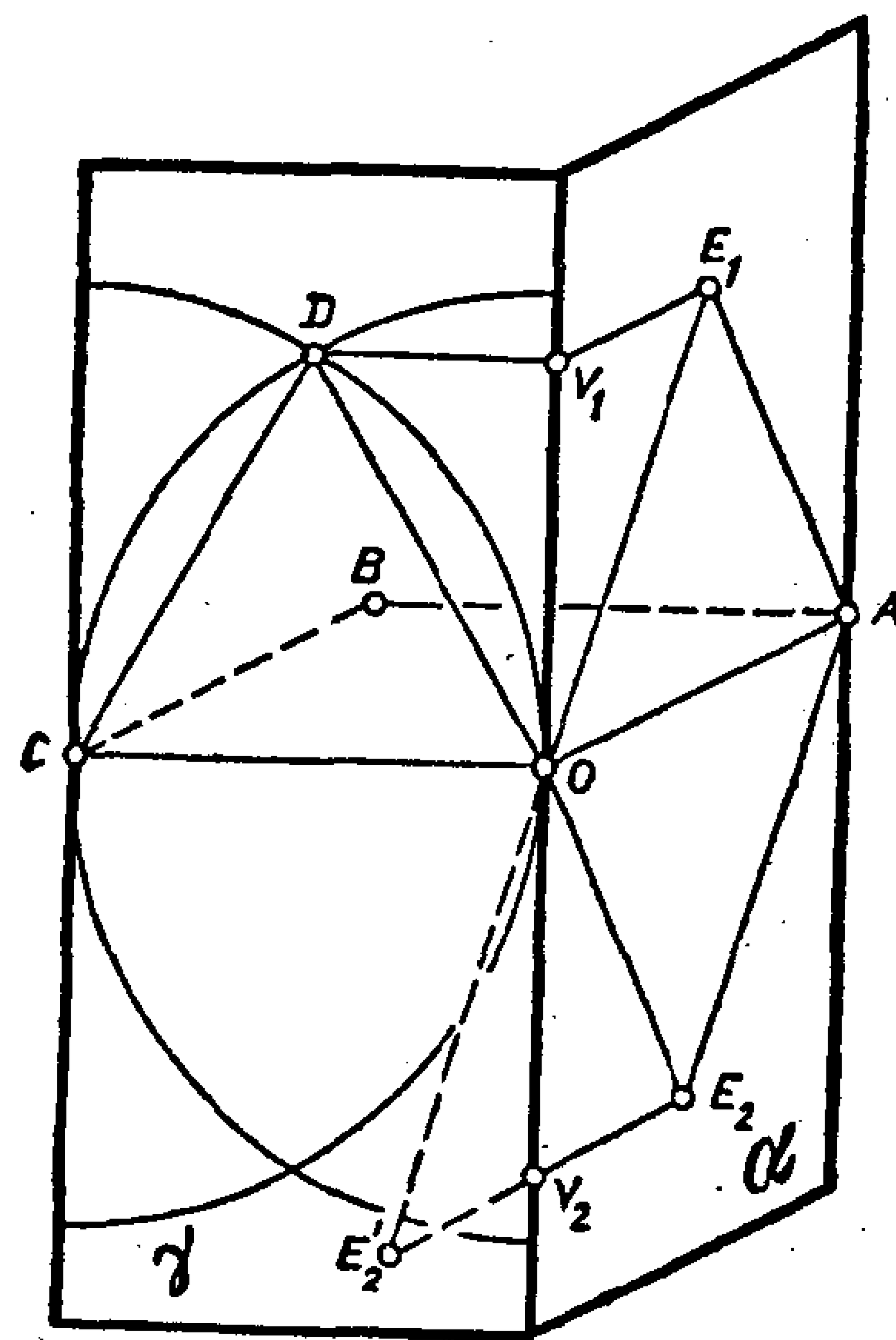


图 256

因为$\angle BCD=90°$, $CD=1$，所以顶点 D 属于通过点 C 且和线段 BC垂直的平面 γ，而且分布在这个平面上的以点 C 为圆心的单位圆上. 五边形 $ABCDE$（如果它存在的话）的所有的对角线都相等，因为每一个对角线都是直角边为 1 的等腰直角三角形的斜边（这样一来，每一个对角线的长等于$\sqrt{2}$）. 这样一来，$AD=AC$，在平面 γ 上以点 O 为圆心作的单位圆通过点 C，因为这

个圆是平面 γ 上到点 A 的距离等于线段 AC 的长的点的轨迹. 因此，点 D 只可能是两个单位圆（圆心在点 C 和 O）的两个交点之一. 假设点 D 是这两个交点中的任一个（这两个交点关于平面 ABC 是对称的，如果空间五边形存在的话，那么在作图的这一阶段，空间五边形可以选取关于平面 ABC 对称的两种形式中的一种）. 为了更简单地确定点 D 的位置，可以在平面 γ 上以线段 CO 为边长向任意一侧作等边三角形，点 D 和异于顶点 C 和 O 的第三个顶点重合.

用类似的方法可以确定点 E 的位置. 过点 A 作平面 α 和线段 BA 垂直，在线段 AO 的两侧作等边三角形 OE_1A 和 OE_2A. 点 E 只可能是顶点 E_1 和 E_2 中的某一个. 在这里我们不得不考虑到两种可能性，因为点 D 的位置选定以后，空间五边形关于平面 ABC 已经不是对称的了.

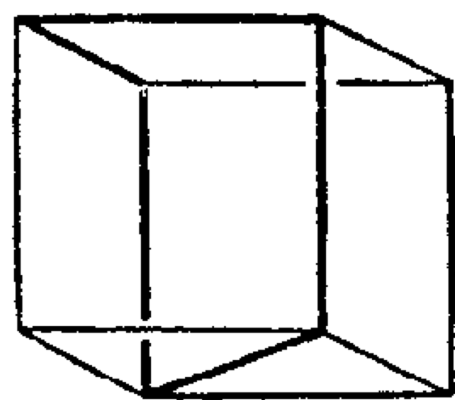
我们证明：所作的空间五边形不具有所要求的性质，因为线段 DE_1 和 DE_2 中的任何一个都不具有单位长. 借助不太复杂的计算不难证实这一点. 假设 V_1 是由点 E_1 到平面 γ 的垂线的垂足. 直角三角形 DV_1E_1 和 DE_1E_2 的直角边 DV_1 和 V_1E_1 等于 $\frac{1}{2}$，而 $E_1E_2=\sqrt{3}$. 因此由勾股定理有

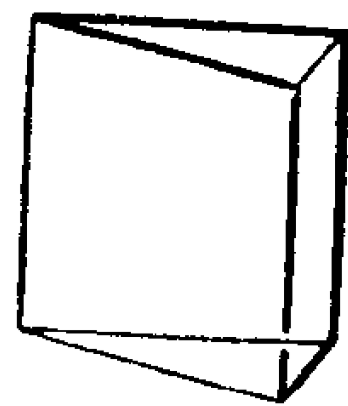
$$DE_1=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1,$$

$$DE_2=\sqrt{\frac{1}{2}+3}=\sqrt{\frac{7}{2}}>1.$$

这样一来，不能作出一个空间五边形，它所有的边相等，而任意两个相邻边之间的夹角为直角.

如果修改某些条件，例如，不要求五边形所有的边都相等，而改为要求四个边相等（任意两个相邻的边之间的夹角仍要求是直角），这样的空间五边形是可以作出来的. 图257表明，这样的五边形的顶点应该在立方体的顶点中选取.


图 257


图258

如果只要求邻边之间的夹角中四个角是直角，空间五边形也可以作出. 在图258中画出了由正三棱柱的棱构成的这样的五边形.

如果在原题的条件中说的不是空间五边形，而是更多边数的空间多边形，那么对原题可以给出肯定的回答. 由立方体的棱不难作出边相等且任意两邻边之间的夹角为直角的空间六边形和八边形. 具有所要求的性质的空间七边形可用下面的方法作出. 取一等腰梯形，其上底和两腰等于 1，下底等于 $\sqrt{2}$. 以上底为一边作一单位正方形，以下底为斜边作等腰直角三角形，再去掉梯形的两底，将正方形的平面和梯形的平面配置成直角，将直角三角形的平面对梯形的平面倾斜一个角度，使直角边和与它相邻的梯形的腰之间的夹角为直角. 不难验证，所得到的七边形满足问题的所有条件. 在作边数大于 8 的类似的空间多边形时不会遇到任何困难.

和196题有直接关系的是另一个问题：是否存在这样一个空间五边形，它的所有的边都相等，而且任意两个邻边之间的夹角也相等（不一定是90°）？不难证明，这样的多边形只有两个（两个都是平面的）：正凸五边形和由它的对角线构成的星形五边形. 邻边之间的夹角允许取值108°和36°.

197. 证明：如果 n 是任意自然数，那么将数

$$(5+\sqrt{26})^n$$

写成十进制小数时，小数部分开头的 n 个数字是相同的.

【证明】我们证明，将数 $(5+\sqrt{26})^n$ 写成十进制小数时，小数点以后的前 n 个数字或者都是 0，或者都是 9，也就是说，我们所研究的数和整数的差异小于 10^{-n}. 为此只要证明

$$(5+\sqrt{26})^n+(5-\sqrt{26})^n$$

是整数以及

$$|5-\sqrt{26}|<\frac{1}{10}$$

就行了. 后一个不等式不难用直接计算来验证：$5.1^2=26.01>26$，因此

$$5<\sqrt{26}<5.1.$$

假设 $p(x)=(5+x)^n$. 这时所要证明的断言可叙述成：$p(\sqrt{26})+p(-\sqrt{26})$ 是整数. 它是正确的，因为在和 $p(x)+p(-x)$ 中，x 的奇次幂的项相互消掉了而只剩下 x 的偶次幂的项. 因此，当 $x=\sqrt{26}$ 时，带有整系数的多项式 $p(x)+p(-x)$ 的值是整数.

因为数 $5-\sqrt{26}$ 是负的，所以从前面的证明推出，当 n 是奇数时，小数点以后的前 n 个数字是 0，而当 n 是偶数时，小数点以后的前 n 个数字是 9.

从所引的证明不难引出下面的断言：如果 n 充分大，那么在数 $(5+\sqrt{26})^n$ 的十进制展开式中，小数点后相同的数字不少于 $n+1$ 个. 我们指出，发生这种情况的第一个 n 是 $n=234$.

198. 是否存在这样两个无穷的非负整数集合 A 和 B，使得任一非负整数可以用唯一的方法表示成两项之和的形式，其中一项属于集合 A，而另一项属于集合 B？

【解】我们证明具有所要求的性质的非负整数集合 A 和 B 是存在的. 为此只需作出一个这种集合的例子就够了.

我们约定所有非负整数的数位由个位开始从低位到高位进行编号. 我们认为偶数位的数字为零的所有非负整数属于集合 A，奇数位的数字为零的所有非负整数属于集合 B. 根据定义，数 0 同时属于集合 A 和 B，因为在 0 中没有任何一位数字不为 0.

一个属于集合 A，另一个属于集合 B 的两个数之和表示一个整数，它的所有的数字或者与属于 A 的被加项的数字重合，或者与属于集合 B 的被加项的数字重合，因为奇数位的数字与属于 A 的被加项的数字重合，而偶数位的数字与属于 B 的被加项的数字重合. 因此，对任一非负整数，若将它所有偶数位的数字改为零，我们得到它的属于集合 A 的"组成部分"，再将这个数所有奇数位的数字改为零，我们又得到它的属于集合 B 的"组成部分". 两个组成部分之和等于原来的数. 集合 A 与 B 的其它两个元素之和不可能等于这个数，因为这两个元素与所研究的数的组成部分至少有一个数字不同，因此它们的和等于另一个数.

例如，如果取数 1967，那么它的属于集合 A 的组成部分等于907，属于集合 B 的组成部分等于1060. 两个组成部分之和等于原数：$907+1060=1967$.

集合 A 和 B 是无穷的，因为有无穷多个偶数位和无穷多个奇数位.

199. 某整数集合既含有正整数，也含有负整数，而且如果 a 和 b 是它的元素，那么 $2a$ 和 $a+b$ 也是它的元素. 证明：这个集合包含它的任意两个元素之差.

【证明】首先我们应该证明，如果数 c 是所研究的集合的元素，而 n 是自然数，那么 nc

也属于这个集合．为了证明这一点，我们对 n 利用完全数学归纳法．数 c 的本身是属于这个集合的，根据本题条件，数 $2c$ 也属于这个集合，因此，只需证明：如果 $n>1$，nc 属于这个集合，那么 $(n+1)c$ 也属于这个集合．但是 $(n+1)=nc+c$，根据本题条件，集合的两元素之和属于这个集合．因此，对于集合的任一元素 c 和任意的自然数 n，乘积 nc 属于所研究的集合．

假设 $a>0$ 是这个集合的最小正数，$b<0$ 是这个集合的最小负数，即绝对值最小的负数（关于这样的数的存在性见 § 3）．因为一方面，它们的和 $a+b$ 属于这个集合，且满足不等式

$$b<a+b<a,$$

而另一方面，这个集合不含有小于 a 的正数和大于 b 的负数，所以和 $a+b$ 只能等于 0．因此，数 0 属于所研究的集合，且 $b=-a$．由此推出，集合包含元素 a 的所有整数倍，因为对任意的自然数 n，数 na，0，nb 属于这个集合．

我们断定：除了元素 a 的整数倍以外，所研究的集合不包含其它的元素．我们假设这个断言不对．假设包含在数 a 的两个连续的整数倍 qa 和 $(q+1)a$ 之间的元素 x 属于这个集合．这样的元素可以表示成下面的形式

$$x=qa+r \qquad (0<r<a).$$

但这时数

$$r=x+(-q)a$$

也应该属于集合，因为它等于集合的两个元素之和．这个数满足不等式 $0<r<a$，这和元素 a 的取法矛盾（注意，a 是这个集合的最小正数）．

本题断言可如下推出：集合的所有元素是元素 a 的整数倍，因此这个集合的任意两个元素之差也是元素 a 的整数倍，因而属于所研究的集合．

200．某凸多边形被它的不相交的对角线划分成三角形．多边形所有的顶点都是奇数个这样的三角形的顶点．证明：多边形的边数能被 3 整除．

【注】在本题条件中，要求多边形是凸的．其实这个条件并不是本质的，在下面的证明中并没有用到这一点．我们在本题条件中加上多边形的凸性这个条件，主要是为了使奥林匹克的参加者不必去寻求下面那个十分复杂的问题的答案：每一个多边形可以用不相交的对角线划分成三角形吗？答案是肯定的，但要证明这一点并不简单．

如果代替“用不相交的对角线来划分 n 边形”而研究“将 n 边形划分为互不复盖的三角形，这些三角形的顶点和 n 边形的顶点重合”，问题的实质并没有改变．唯一的变化是在这样叙述本题的时候，增加了 $n=3$ 的情况，而且当 $n=3$ 时，复盖给定的 n 边形的三角形的集合由一个元素——三角形本身——组成．显然，当 $n=3$ 时，本题断言成立．

现在我们着手来证明200题．

【证明】在不相交的对角线中，每一条对角线把原来的多边形分成两个多边形．我们来确定这样的“子多边形”的边的最少边数等于多少．我们断定最少边数等于 3，这就是说，在我们所引的对角线中，有这样一条对角线，它从多边形中切去一个三角形．事实上，如果“子多边形”的最少边数等于 $k>3$，并且是由对角线 A_1A_k 切得的子多边形 $A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k$，那么，由于在本题条件中说到将 n 边形划分成三角形，所以可以找到这样的对角线 A_iA_j，它是连接 k 边形 $A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k$ 的某两个顶点而成的，并且从这个 k 边形中切得了一个边数更少

的多边形．因此，$k>3$ 不可能是“子多边形”的最少边数．

在我们所研究的子多边形中，还有边数大于3的多边形，因为不然的话，对角线把多边形分成两个三角形，而对角线的端点是偶数个三角形的顶点，这和本题条件相违．

在原多边形被所引的对角线切得的子多边形中，没有四边形，因为它的一条对角线应该把它分成两个三角形，而且对角线的端点是两个三角形的顶点，这又与本题条件相违．

这样一来，在子多边形中，有边数大于3但不小于5的多边形．例如，假设在所有异于三角形的子多边形中，由对角线 A_1A_k 切得的子多边形 $A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k$ 具有最少的边数．由上面的讨论可知 $k\geqslant5$．

因为在将原多边形划分成三角形时，子多边形 $A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k$ 也被划分成三角形，在这些三角形中包含有三角形 $A_1A_iA_k$，并且因为 k 是异于三角形的子多边形的最少边数，所以无论是对角线 A_1A_i 或是对角线 A_iA_k 都不可能切得边数大于3（但小于 k）的子多边形．因此 $i\leqslant3$ 和 $k-i+1\leqslant3$．考虑到 $k\geqslant5$，所以后一个不等式可变为

$$0\leqslant k-5\leqslant i-3\leqslant0,$$

由此得到 $k=5$，$i=3$．

于是，在将原多边形划分成三角形时，总可以找到一条对角线，它从多边形中切去一个五边形，这个五边形被另外两条对角线划分成这样的三个三角形，它们之中的任意两个三角形和对角线——五边形和原多边形的剩下部分的边界——有公共顶点（图259）．当从原多边形切去五边形的时候，边数减少了3．多边形的剩下部分被原先引的对角线所作的划分满足本题的所有条件．事实上，原多边形的所有顶点是奇数个三角形的顶点．切去五边形后，属于给定顶点的三角形的个数发生变化（减小2个）的，只有两个顶点，这两个顶点是和切口重合的对角线的端点．因此，对多边形的剩下部分来说，所有的顶点仍然是奇数个三角形的顶点．

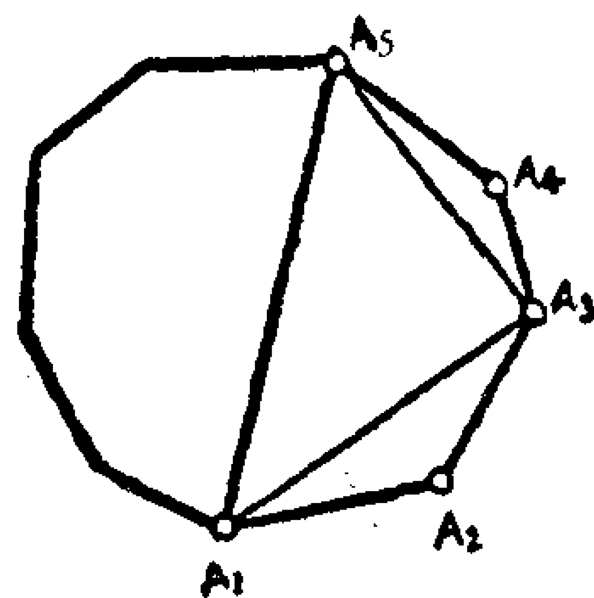


图 259

继续从剩下的多边形中切去五边形，每一次都使边数减少3．这个过程一直进行到剩下的部分不能再引任何对角线，即为三角形时为止．

因此，原来的多边形的边数能被3整除，这就是所要证明的．

从证明中可以看出，如果 n 能被3整除，那么凸 n 边形确实能用不相交的对角线将它划分成这样的三角形，使原多边形的每一个顶点是奇数个三角形的顶点．

201．证明：在所有的凸四边形中，仅仅只有平行四边形具有这样的性质：对所有顶点来说，每个顶点到不通过它的两边的距离之和相等．

【证法1】首先我们证明下面的引理：

假设在不大于平角的角内给定两个点．每一个点到角的两边距离之和当且仅当这两点所确定的直线和这个角的平分线垂直时相等．

假设 P 是不大于平角的 $\angle AOB$ 内的点，A 和 B 是过点 P 和 $\angle AOB$ 的平分线垂直的直线和 $\angle AOB$ 的边的交点（图260）．我们用 t 表示线段 OA 和 OB 的长，用 a 和 b 表示点 P 到直线 OA 和 OB 的距离．因为 $\triangle AOB$ 的面积等于 $\triangle AOP$ 和 $\triangle BOP$ 的面积之和，所以 $\triangle AOB$ 的面积的两倍可表示成 $at+bt=(a+b)t$．这时线段 AB 上的任意一点 P到

$\angle AOB$ 的边的距离之和

$$(P,\ \angle AOB)=a+b$$

都等于点 A 到边 OB 的距离．但射线 OA 上所有的点到角的边 OB 的距离各不相同．因此，点 P 到 $\angle AOB$ 的两边距离之和等于点 Q 到 $\angle AOB$ 的两边距离之和当而且仅当通过点 P 和 Q 所作的 $\angle AOB$ 的平分线的垂线和射线 OA 相交于同一点，即线段 PQ 和 $\angle AOB$ 的平分线垂直．于是，引理得证．

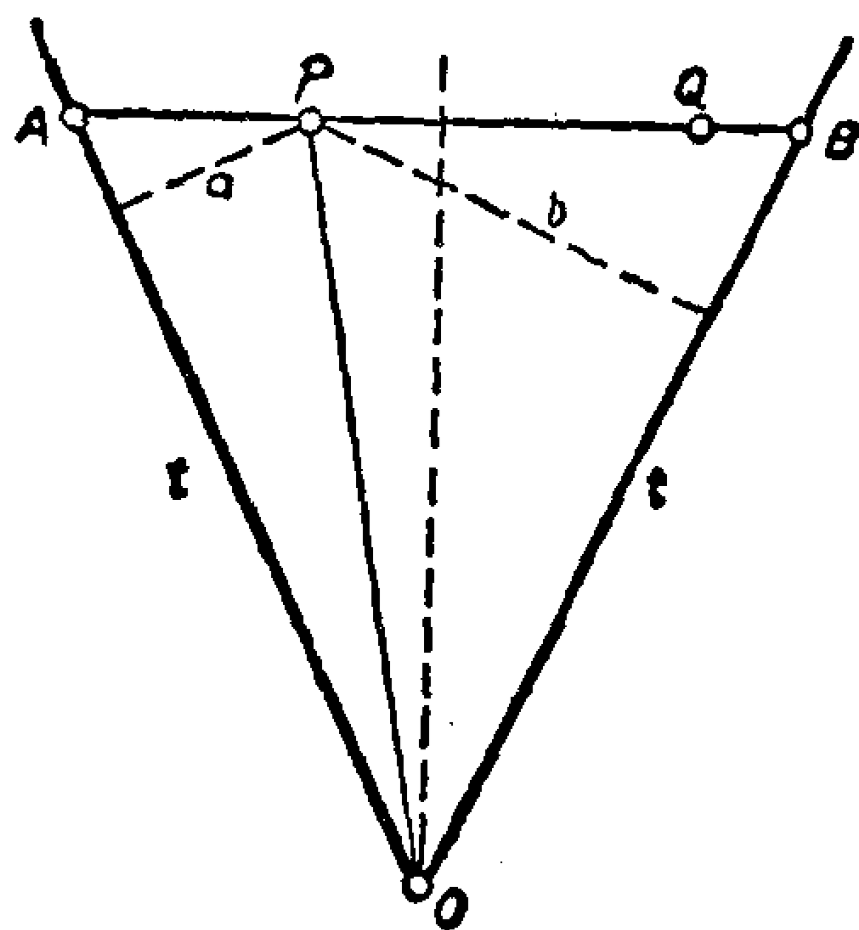


图　260

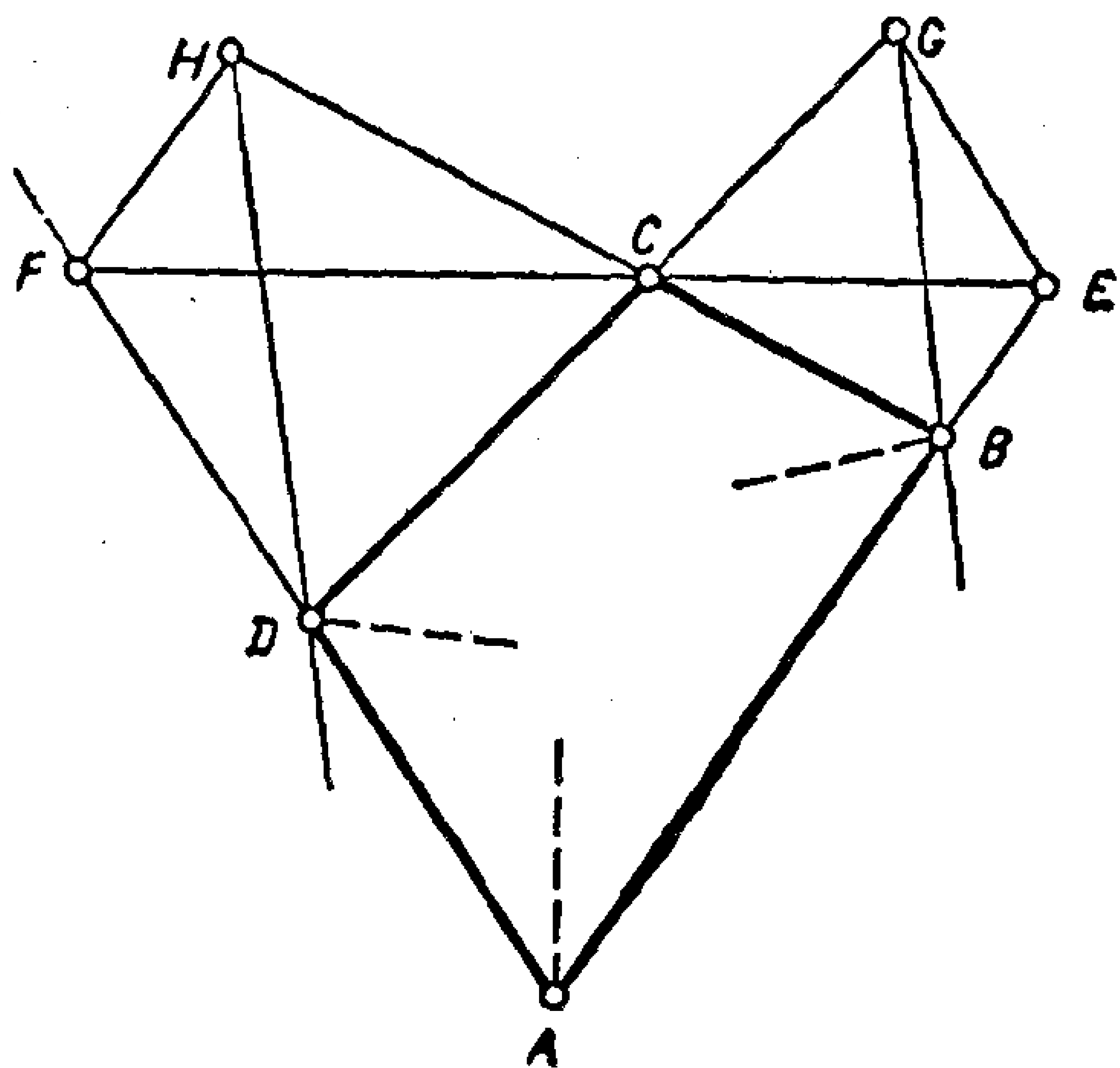


图　261

现在回到本题断言的证明．设 $ABCD$ 是满足本题条件的凸四边形（即这样的四边形，它的每一个顶点到不通过它的两边的距离之和对于所有四个顶点都相等）．在图 261 中，我们故意把 $ABCD$ 画成不是平行四边形，因为只有当本题断言被证明了以后，我们才能说 $ABCD$ 是平行四边形．

过点 C 作一直线和 $\angle BAD$ 的平分线垂直．设这条直线与直线 AB 和 AD 分别相交于点 E 和 F．过点 E 作一直线平行于 AD，它和直线 DC 相交于点 G．过点 F 作一直线平行于 AB，它和直线 BC 相交于点 H．$\triangle CBE$ 和 $\triangle CHF$ 相似（同样地，$\triangle CGE$ 和 $\triangle CDF$ 相似），因为边 CB 和 CH 在一直线上，边 CE 和 CF 也在一直线上，而 $BE \parallel FH$（边 CG 和 CD 以及边 CE 和 CF 在一直线上，而 $EG \parallel FD$）．由此推出，四边形 $CBEG$ 和 $CHFD$ 相似，于是 $\angle CBG=\angle CHD$，从而直线 BG 和 DH 平行．

根据上面所证明的引理，$(C,\ \angle DAB)=(E,\ \angle DAB)$；因为 $EG \parallel AD$，所以 $(E,\ \angle DAB)=(G,\ \angle ADC)$，而根据本题条件，$(C,\ \angle DAB)=(B,\ \angle ADC)$，因此，$(G,\ \angle ADC)=(B,\ \angle ADC)$．根据引理，这意味着线段 BG 垂直于 $\angle ADC$ 的平分线．类似地可以证明，线段 HD 垂直于 $\angle ABC$ 的平分线．但因为 $GB \parallel HD$，所以 $\angle ABC$ 的平分线和 $\angle ADC$ 的平分线平行．因此，如取一直线平行于 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 的平分线，则 $\angle DCB$ 关于此直线对称的角之二夹边分别与 $\angle DAB$ 之二夹边平行，于是 $\angle DCB=\angle DAB$．这样一来，在四边形 $ABCD$ 中，顶角 $\angle A$ 和 $\angle C$ 相等．类似地可以证明其它两个顶角相等．因此，四边形 $ABCD$ 是平行四边形．

不难看出，在平行四边形中，任一顶点到不通过它的两边距离之和等于其它任何一个顶

点的类似的和.

【证法 2】如果代替“四边形的顶点到不通过它的两边距离之和”，我们来研究顶点到四边形的所有四个边的距离之和，本题断言不变，因为顶点到通过它的两边距离之和等于零.

假设 $\mathbf{n}$ 是垂直于半平面的边界直线的单位矢量（矢量 $\mathbf{n}$ 的方向指向半平面的内部），A 和 B 是属于半平面的点，a 和 b 是点 A 和 B 到边界直线的距离（图 262）. 线段 a 和 b 的长度之差可以表示成数量积

$$b-a=\mathbf{v}\mathbf{n}$$

的形式，其中 $\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}$.

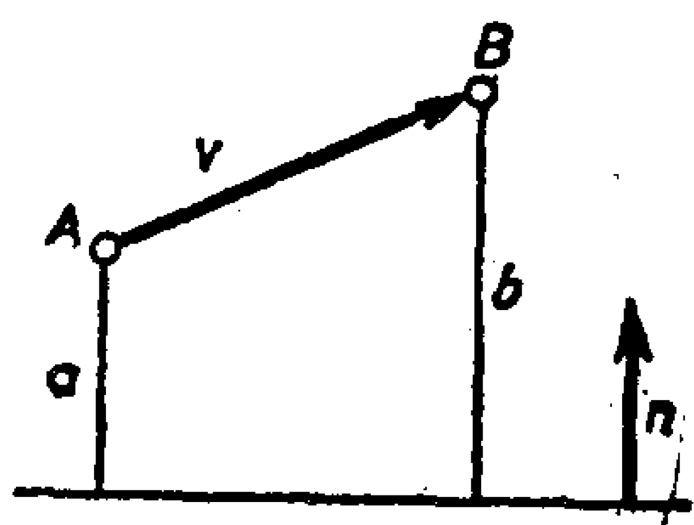


图 262

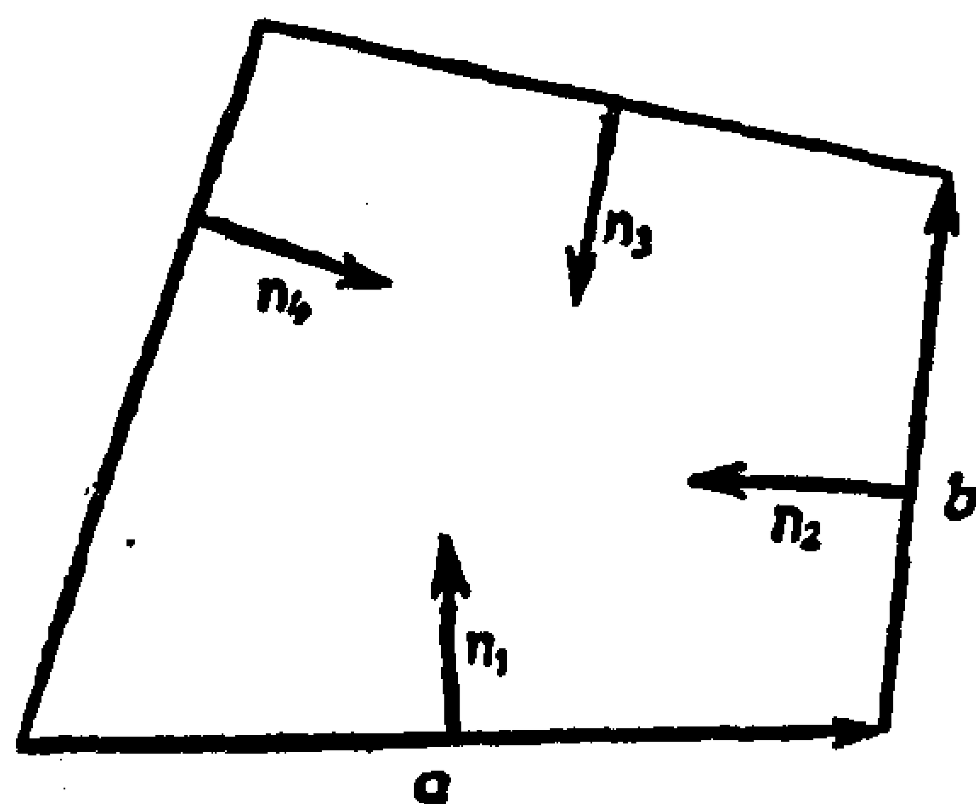


图 263

假设 $\mathbf{n}_1$，$\mathbf{n}_2$，$\mathbf{n}_3$，$\mathbf{n}_4$ 是分别垂直于满足本题条件的四边形各边的单位矢量（所有的矢量指向四边形的内部），而 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是与四边形的两个相邻边重合的矢量（图 263）. 因为矢量 $\mathbf{a}$ 的始点到四边形各边的距离之和等于矢量 $\mathbf{a}$ 的终点到四边形各边的距离之和，所以这两个和数之差，即矢量 $\mathbf{a}$ 的始点与终点到四边形各边的距离之差的和，等于 0. 正像上面所说的，在矢量表示法中，这可以写成下面的形式

$$\mathbf{a}\mathbf{n}_1+\mathbf{a}\mathbf{n}_2+\mathbf{a}\mathbf{n}_3+\mathbf{a}\mathbf{n}_4=\mathbf{a}(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3+\mathbf{n}_4)=0.$$

对于矢量 $\mathbf{b}$ 也有类似的等式

$$\mathbf{b}(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3+\mathbf{n}_4)=0.$$

于是矢量 $\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3+\mathbf{n}_4$ 和两个不平行的矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 垂直，这只有当

$$\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\mathbf{n}_3+\mathbf{n}_4=\mathbf{0}$$

时才有可能.

后一个等式意味着把矢量 $\mathbf{n}_1$，$\mathbf{n}_2$，$\mathbf{n}_3$，$\mathbf{n}_4$ 一个接一个地放时，我们得到一个封闭的四边形. 因为它的所有边的长都等于1，所以，所得到的四边形是菱形且对边平行. 因此，由于原来四边形的边和矢量 $\mathbf{n}_1$，$\mathbf{n}_2$，$\mathbf{n}_3$，$\mathbf{n}_4$ 垂直，所以也两两平行.

这样一来，原来的四边形是平行四边形，这就是所要证明的.

在 201 题中，说到四边形的凸性. 我们证明：凸性的要求是多余的，因为对于非凸的四边形，本题条件是不可能实现的. 假设 $ABCD$ 是四边形，其顶角 $\angle C$ 大于平角. 过点 C 作一直线和 $\angle DAB$ 的平分线垂直. 这个直线至少将四边形的一个顶点（例如顶点 B，如图 264 所示）和顶点 A 隔开，因为 $\angle DCB$ 不是凸的，因而四边形的所有顶点不可能在所作的直线的同一侧. 利用证法 1 的引理中所用的记号，可以写出不等式 $(C, \angle DAB)<(B, \angle DAB)$. 因为不等式的右边是顶点 B 到 $\angle DAB$ 的边 AD 的距离（点 B 到边 AB 的距离

等于0），它小于点 B 到边 AD，CD 的距离之和，所以顶点 B 和 C 不满足201题的条件.

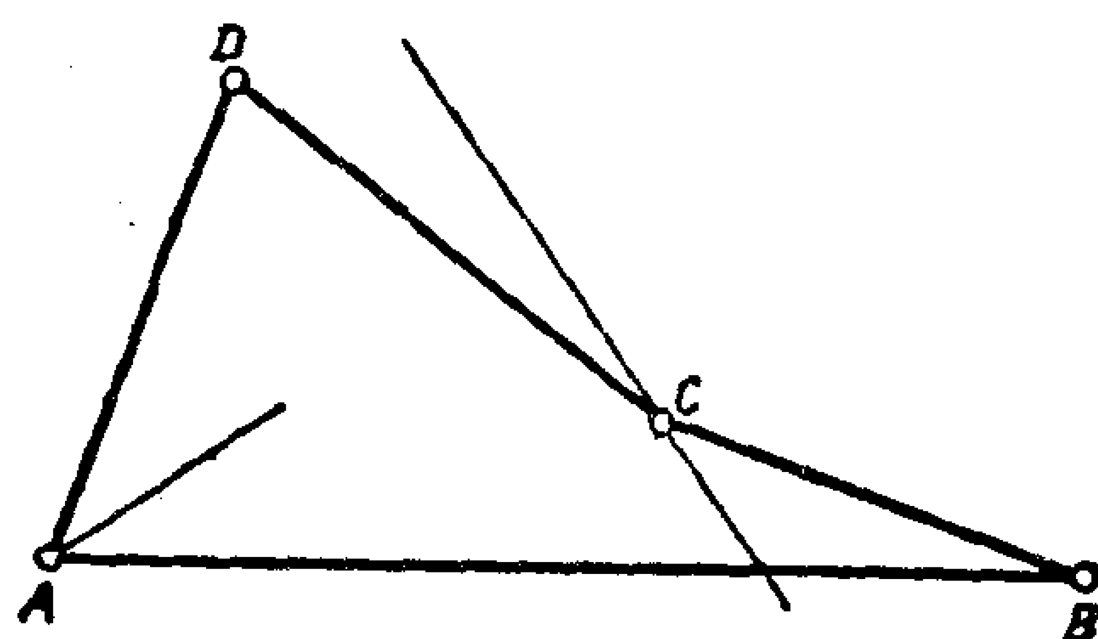


图　264

202．证明：不存在这样的自然数列，它的项不都相等，而且从第二项开始，每一项都等于它的前一项和后一项的调和平均值（数 $\frac{2ab}{a+b}$ 叫做数 a 和 b 的调和平均值）.

【证明】 首先我们注意到，如果 h 是数 a，b 的调和平均值，那么 $1/h$ 是 $1/a$，$1/b$ 的算术平均值．事实上，因为 $h=2ab/(a+b)$，所以 $1/h=(1/a+1/b)/2$．这使得我们可以把原题的断言叙述成下面的形式：证明：不存在这样的形如 $1/n$ 的无穷数列，其中 n 是自然数，在这个数列中，不是所有的项都相等，而且从第二项开始，每一项都等于它的前一项和后一项的算术平均值．

换句话说，我们断定，从自然数的倒数中不能构造一个无穷的等差数列，如果它的所有的项不彼此相等的话．这一断言的正确性可如下推出：所有的自然数的倒数包含在区间〔0，1〕内，且不可能是具有非零的公差的无穷等差数列的项，因为这个数列的项的绝对值应该无限地上升.

本题中所说的条件"在无穷数列中，不是所有的项都相等"是重要的．只要去掉这个条件，例如无穷序列1，1，…，1，…便可作为与本题断言相反的例子.

如果用整数来代替本题所说的自然数，那么本题断言仍然成立．这时，在上面所作的证明中唯一不同的仅仅是将区间〔0，1〕换成区间〔－1，1〕.

如果说的是无穷的有理数列或者有限的（随便多长）自然数列，本题断言不再成立。在第一种情形中，无穷的有理数列 $1，\frac{1}{2}，\frac{1}{3}，\cdots，\frac{1}{n}，\cdots$ 可以作为一个反例，在第二种情形中，有限的自然数列

$$n!，\frac{n!}{2}，\frac{n!}{3}，\cdots，\frac{n!}{n}$$

可以作为一个反例.

203．在平面上给定一直线，半径为 n 厘米（n 是整数）的圆以及在圆内的 $4n$ 个长为1厘米的线段．证明：在给定的圆内可以作一条和给定直线平行或垂直的弦，它至少和两个给定的线段相交.

【证明】 将 $4n$ 个线段中的每一个线段投影到给定的直线（以后我们规定把它叫做水平线）上和与它垂直的直线（竖直线）上．假设 a_1，a_2，…，a_{4n} 是 $4n$ 个线段在水平线上的投影的长度，b_1，b_2，…，b_{4n} 是这些线段在竖直线上的投影的长度．本题原来的断言与下

面的命题等价：**在给定的线段或者对水平线的投影，或者对竖直线的投影中，至少有两个投影有公共点.**

我们研究第 i 个线段. 它可以表示为具有水平直角边 a_i 和竖直直角边 b_i 的直角三角形的斜边（图265）（在特殊情况下，一个直角边可以变成一点）. 因为在非蜕化的三角形中，两边之和大于第三边，所以 $a_i + b_i > 1$. 此外，必须考虑到当被投影的线段的本身是水平的或竖直的，那么或者 $a_i = 1$，或者 $b_i = 1$. 因此，对任何一个线段有不等式

$$a_i + b_i \geqslant 1.$$

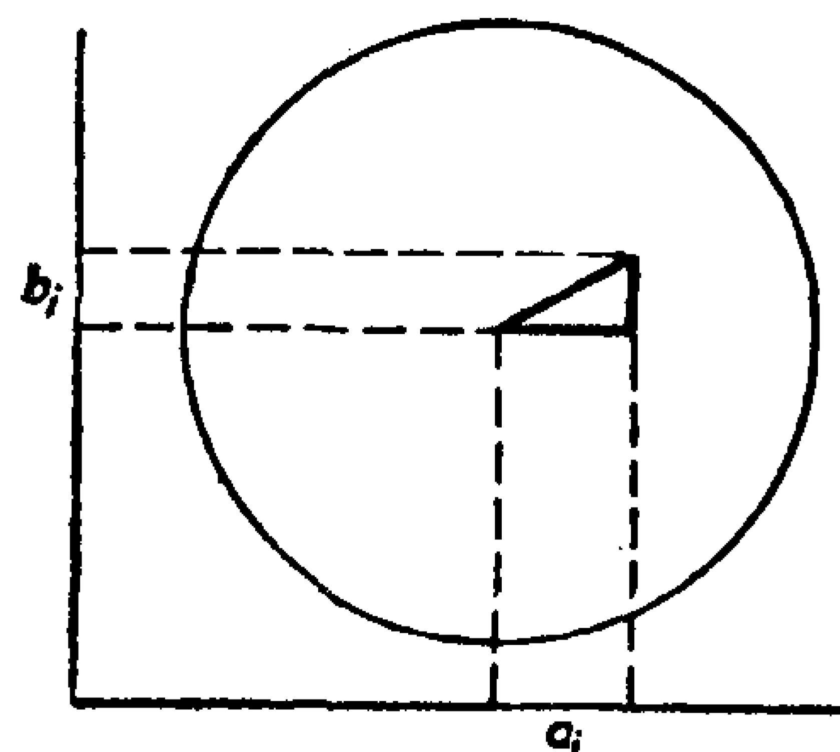


图 265

将这些不等式对所有的线段（从1到 $4n$）求和，我们得到

$$\sum a_i + \sum b_i \geqslant 4n.$$

如果任何两个线段在水平线上的投影都没有公共点，那么所有的线段的水平投影不能把半径为 n 的给定圆在水平线上的投影（这个投影的长度为 $2n$）盖住. 因此，我们所作的这个假设将导致不等式

$$\sum a_i < 2n.$$

如果任何两个线段在竖直线上的投影也没有公共点，那么所有的线段的竖直投影不能把半径为 n 的给定圆在竖直线上的投影（这个投影的长度也为 $2n$）盖住. 因此

$$\sum b_i < 2n.$$

这样一来，如果本题断言不成立，那么

$$\sum a_i + \sum b_i < 4n,$$

但这是不可能的，因为如象上面所证明的，所得到的不等式与本题条件相违.

204. 我们用任意的方法将 n 个黑球和 n 个白球排成一排. 计算在每一个这样的排列中，球的颜色改变的次数. 证明：颜色改变的次数为 $n-k$ 的排法和颜色改变的次数为 $n+k$ 的排法是一样多的（$0<k<n$）.

【证明】❶我们来计算，有多少种方法可以将 n 个白球和 n 个黑球排成一排，使颜色改变的次数等于 v. 必须区分两种情况：v 是奇数的情况和 v 是偶数的情况.

第一种情况. 假设在排成的一排中，颜色改变的次数等于奇数 $v=2a+1$. 我们在两个相邻的不同颜色的球之间划一小线（称之为边界线），并把两根相邻的边界线之间的同色球叫做线段（这一排左右两端最边上的边界线的左边和右边的同色球也叫线段）. 由白球组成的线段叫做白线段，由黑球组成的叫做黑线段. 由于球的颜色改变的次数等于 $2a+1$，所以边界线的个数也等于 $2a+1$，于是线段的个数等于 $2a+2$。而且这整个一排是由 $a+1$ 个白线段和 $a+1$ 个黑线段组成的，因为这些线段是黑白相间的. 如果把所有的白线段挪到一起（线段右边的边界线随同一块挪动. 如果所得到的一排的最右端有边界线，则把它去掉），于是便得到由 n 个白球组成的且被 a 个边界线隔开的一排. 为了得到这一排，只要将这 n 个白球排成一排，在 $n-1$ 个可划边界线的位置上划上 a 个边界线就行了. 类似的断言对于黑球也是成立的，即：把 $a+1$ 个黑线段挪到一起（边界线按上面的办法处理），我们得到由 n 个黑球组成的且被 a 个边界线隔开的一排. 为了得到它，只要将 n 个黑球排成一排后，在 $n-1$ 个

❶ 本解答系由中译者据原文改写的.

位置上划上 a 个边界线就行了(在图266 a 中,上面两排对应于 $n=6$、$v=7$,因此 $a=3$).

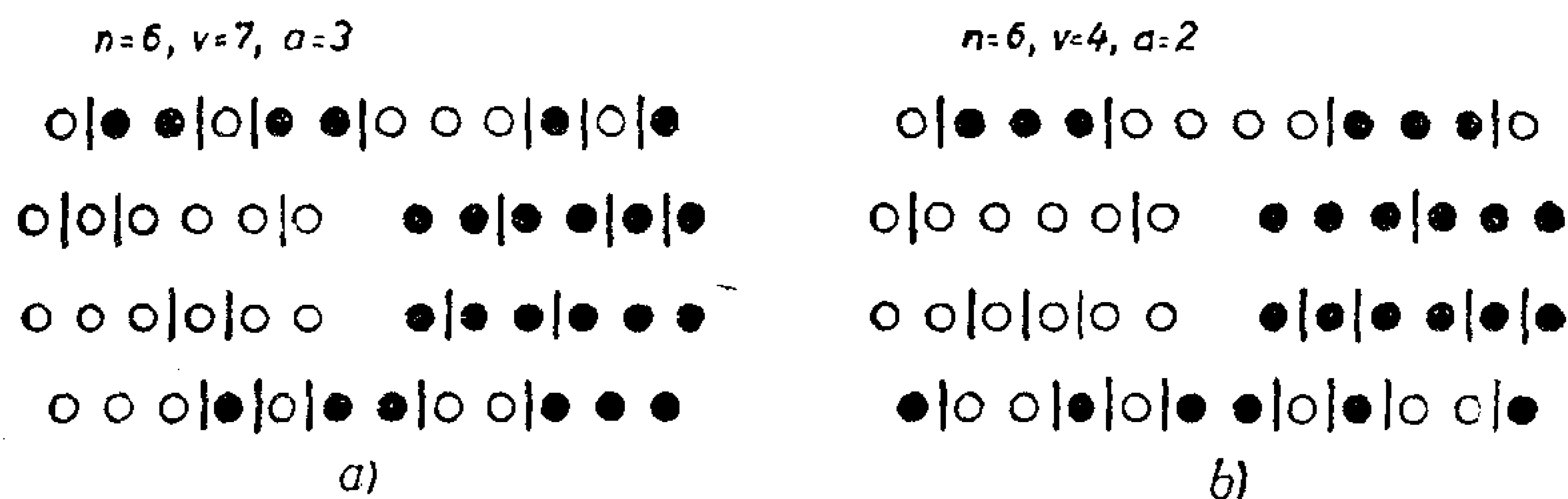


图 266

因此,由 n 个白球和 n 个黑球所排成的一排得到两个由 $n-1$ 个元素中取出 a 个元素的组合(即在 $n-1$ 个位置上划上 a 个边界线).但是由不同的排法所得到的所有组合对并不是都不相同的:在两个排法中,若白线段和黑线段的长度都分别相同,不过一种排法是以白线段开始,而另一种排法是以黑线段开始,那么由这两种排法得到同样的一对组合.

反之,对于任何一对由 $n-1$ 个元素中取出 a 个元素的组合,可以得到把 n 个白球和 n 个黑球分成 $a+1$ 个线段的一种分法.把它们相间地排成一排,我们便得到 n 个白球和 n 个黑球排成的一排,且球的颜色改变的次数等于 $v=2a+1$.对于同一对组合,我们可以得到两种排法,一种以黑线段开始,另一种以白线段开始.

这样一来,球的颜色改变次数为 $v=2a+1$ 的排法的个数是从 $n-1$ 个元素中取出 a 个元素的一对组合的个数的两倍,即等于

$$2(C_{n-1}^{a})^{2}.$$

如果本题条件中所说的数 $n-k$ 是奇数,那么 $n+k$ 也是奇数,因为 $n+k=(n-k)+2k$.将上面的讨论用到由 n 个白球和 n 个黑球排成的且颜色改变的次数为 $n-k$ 的排法和由 n 个白球和 n 个黑球排成的但颜色改变的次数为 $n+k$ 的排法.于是前一种排法的个数等于

$$2(C_{n-1}^{a})^{2},$$

这里的 a 满足关系式 $n-k=2a+1$,而后一种排法的个数等于

$$2(C_{n-1}^{b})^{2},$$

这里的 b 满足关系式 $n+k=2b+1$.由于 $a+b=n-1$ 以及二项式系数的性质 $C_m^k=C_m^{m-k}$(见§5),所以

$$C_{n-1}^{a}=C_{n-1}^{b}$$

由此推出所要证明的断言.

于是,当 $n-k$ 是奇数时,本题断言成立.

第二种情况.假设 v 是偶数($v=2a$).如同前一种情况那样,我们来研究边界线把 n 个白球和 n 个黑球的一排分成的同色线段.这一次,线段的个数等于 $2a+1$.如果这一排是以白线段开始,那么它由 $a+1$ 个白线段和 a 个黑线段组成.以黑线段开始的排法可以不研究,因为它总可以化到前一种情形(以白线段开始的排法),只要把所有的白球涂成黑球,把黑球涂成白球就行了.把所有 $a+1$ 个白线段挪到一起,所有 a 个黑线段也挪到一起,我们得到两个"半截"的排队.n 个白球的一排被 a 个边界线隔开,这 a 个边界线可以划在 $n-1$ 个位置上.n 个黑球的一排被 $a-1$ 个边界线隔开,这 $a-1$ 个边界线可以划在 $n-1$ 个位置上(在图266 b 中,上面两排对应于 $n=6$,$v=4$,因此 $a=2$).

对于v是偶数的情况也同样可以断定：由n个白球和n个黑球排成的一排，其颜色改变次数为$v=2a$的排法个数等于组合对——其中一个是由$n-1$个元素中取a个元素的组合，一个是由$n-1$个元素中取$a-1$个元素的组合——的个数．在这一次，把n个白球和n个黑球组成的一排分成线段时，其分法和组合对的个数是一一对应的，因为第一个线段的颜色不能用两种办法来选取，例如，如果白线段的个数比黑线段的个数多1个，那么这一排应该从白线段开始．

于是，由n个白球和n个黑球排成的队，其颜色改变的次数等于$v=2a$的排法的个数等于

$$2C_{n-1}^{a}C_{n-1}^{a-1},$$

其中的系数2是这样得来的，因为白球的集合和黑球的集合是“平等的”（到底是由哪一个集合的元素构成$a+1$个线段和由哪一个集合的元素构成a个线段是一样的）．

如果$n-k=2a$，那么$n+k$也是偶数，设$n+k=2b$．因此，颜色改变的次数为$n+k$的排法的个数等于

$$2C_{n-1}^{b}C_{n-1}^{b-1}$$

因为$a+b=n$，所以由上面提到的二项式系数的性质有

$$C_{n-1}^{a}=C_{n-1}^{b-1},\quad C_{n-1}^{a-1}=C_{n-1}^{b}.$$

这就证明了本题断言对于v是偶数的情况也成立．

205．假设n是整数．证明：如果

$$2+2\sqrt{28n^2+1}$$

是整数，那么它是完全平方．

【证明】假设$m=2+2\sqrt{28n^2+1}$是整数．这时

$$4(28n^2+1)=(m-2)^2=m^2-4m+4,$$

由此看出，m^2是偶数，因而m也是偶数．设$m=2m_1$，我们得到

$$28n^2=m_1^2-2m_1,$$

又因为m_1也是偶数，设$m=2m_1=4k$，那么

$$7n^2=k^2-k. \qquad (1)$$

我们将k和$k-1$分解成标准分解式（§7）

$$k=7^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\cdots\cdots p_r^{\alpha_r},$$
$$k-1=7^{\beta_0}q_1^{\beta_1}\cdots\cdots q_s^{\beta_s}. \qquad (2)$$

因为k和$k-1$是互素的（§23），所以或者α_0为0，或者β_0为0，且p_i中的任何一个都不和q_i中的任一个相同．由(1)推出，数n除7以外的素因子只能是p_j或q_i：

$$n=7^{\gamma_0}p_1^{\gamma_1}\cdots p_r^{\gamma_r}q_1^{\delta_1}\cdots q_s^{\delta_s}. \qquad (3)$$

将(2)，(3)代入(1)，我们得到

$$7^{2\gamma_0+1}p_1^{2\gamma_1}\cdots p_r^{2\gamma_r}q_1^{2\delta_1}\cdots q_s^{2\delta_s}=7^{\alpha_0+\beta_0}p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}q_1^{\beta_1}\cdots q_s^{\beta_s},$$

根据标准分解式的唯一性（§7），有

$$\alpha_0+\beta_0=2\gamma_0+1;\quad \alpha_i=2\gamma_i,\ i\geqslant 1;\quad \beta_j=2\delta_j,\ j\geqslant 1.$$

这样一来，除7以外，包含在数k和$k-1$的分解式中的素数的指数都是偶数，且或者$\alpha_0=2\gamma_0+1$，$\beta_0=0$，或者$\alpha_0=0$，$\beta_0=2\gamma_0+1$．在第一种情况，$k-1$是完全平方，而k等于7乘以一个完全平方，在第二种情况，正好相反：

$$a)\quad k=7A^2,\qquad b)\quad k=A^2,$$
$$k-1=B^2,\qquad k-1=7B^2,$$
其中 A 和 B 是某个整数.

由情况 b) 可得到 $m=4k=(2A)^2$，因此本题断言成立. 我们来证明情况 a) 是不可能的. 设 $B=7B_1+r$，其中 $r=0,1,\cdots,6$. 这时
$$7A^2-1=k-1=(7B_1+r)^2=49B_1^2+14B_1r+r^2,$$
由此推出 $r^2=7c-1$，这里 c 是整数，但这是不可能的，因为$r^2=0,1,4,9,16,25,36$，所以 r^2 的每一个数都不具有上面所说的形式.

自然产生一个问题：是否存在 $n\neq 0$ 使 $m=2+2\sqrt{28n^2+1}$ 为整数？回答是肯定的. 把二项式 $(127+24\sqrt{28})^k$ 的展开式中的偶数项和奇数项放在一起：
$$(127+24\sqrt{28})^k=a_k+n_k\sqrt{28}.$$
不难看出
$$(127-24\sqrt{28})^k=a_k-n_k\sqrt{28}.$$
将上二式左右两边相乘，得到
$$a_k^2-28n_k^2=(127^2-24^2\cdot 28)^k=(16129-16128)^k=1.$$
由此得出
$$m=2+2\sqrt{28n_k^2+1}=2+2a_k$$
是整数. 这样一来，我们得到无穷多个满足本题条件的数.

还可指出，方程
$$x^2-28y^2=1$$
叫做**贝尔**($Pell$)**方程**. 这个方程的正整数解正好就是按上面所说的办法求出的数对 (a_k, n_k). 解决这个问题的关键是等式 $127+24\sqrt{28}=(8+3\sqrt{7})^2$. (在数论的教本中可以找到详细的叙述.)

206；证明：如果 a,b,c 是三角形的边长，α,β,γ 是它们所对的角，且
$$a(1-2\cos\alpha)+b(1-2\cos\beta)+c(1-2\cos\gamma)=0,$$
那么三角形是等边三角形.

【证明】假设 R 是外接圆半径. 根据正弦定理 $a=2R\sin\alpha, b=2R\sin\beta, c=2R\sin\gamma$,那么本题条件中所说的等式可以变为
$$\sin\alpha(1-2\cos\alpha)+\sin\beta(1-2\cos\beta)+\sin\gamma(1-2\cos\gamma)=0,$$
或者
$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma. \tag{1}$$
因为 α,β,γ 是三角形的角，所以 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ 和 $2\alpha+2\beta+2\gamma=2\pi$. 利用这个关系式，将等式(1)的左右两边分别变换
$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=(\sin\alpha+\sin\beta)+\sin\left[\pi-(\alpha+\beta)\right]$$
$$=(\sin\alpha+\sin\beta)+\sin(\alpha+\beta)=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=(\sin2\alpha+\sin2\beta)+\sin2\gamma=$$
$$=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin2\gamma=$$
$$=2\sin\gamma\cos(\alpha-\beta)+2\sin\gamma\cos\gamma=$$
$$=2\sin\gamma\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma\right]=$$
$$=2\sin\gamma\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]=$$
$$=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

将角 α,β,γ 中的每一个表示成半角的二倍的形式，得到

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=4\times8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

因为$\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\beta}{2}$，$\frac{\gamma}{2}$是锐角，所以$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\neq0$ 且等式（1）变成

$$\frac{1}{8}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \tag{2}$$

我们把关系式（2）看作是任一个半角的正弦的方程，例如，看作是关于 $\sin\frac{\gamma}{2}$ 的方程．为此，将关系式（2）的右边用下面的方式变换：

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}.$$

我们看到，我们所选取的半角的正弦满足二次方程

$$\sin^2\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{4}=0. \tag{3}$$

这个方程的根应该是实数，因此它的判别式

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-1$$

为非负的，但余弦的绝对值不得超过 1，所以方程（3）的判别式只能等于 0：

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=1,$$

由此得出 $\alpha=\beta$．这意味着方程（3）有重根

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2},$$

它对应着 $\gamma=\pi/3$，于是 $\alpha=\beta=\pi/3$. 这样一来，所研究的三角形是等角的，从而是等边的，这就是所要证明的.

不难看出，对任意的三角形，半角正弦的乘积满足不等式

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

事实上，如果

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=p,$$

那么$\sin\frac{\gamma}{2}$满足二次方程

$$\sin^2\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+2p=0,$$

它的判别式

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-8p$$

应该是非负的．因此

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\geqslant 8p,$$

由此推出$p\leqslant\frac{1}{8}$（比较11题证法 3 和 §43.2)).

这样一来，半角的正弦的乘积当三角形是等边的时候达到最大值．

207．在象棋盘的所有方格上放上小立方体．小立方体的界面和象棋盘的方格全等．将所有的立方体的一面涂成黑色．要求转动这些立方体使得所有的黑色面都朝上．证明：这个要求可以这样做到，如果不许个别转动单个的立方体，而只许将一行或一列的所有立方体一起转动．

【证明】 我们利用通常的象棋记号并用a, b, c, …, h来表示竖直的列，用1，2，…，8来表示水平的行．例如立方体$a1$放在第一行最左边的位置上，等等．

任何一个立方体的黑面可以朝向六个方向中的一个："左"，"右"，"上"，"下"，"前"，"后"．例如，对于立方体$b2$来说，它的黑面向"左"，那么它的黑面和立方体$a2$相邻，若向"右"，则和$c2$相邻，若向"前"，则和$b3$相邻，若向"后"，则和$b1$相邻．

我们的目的是要把所有的立方体的黑面都转到向"上"．

首先我们来看立方体$a1$．转动a列和1行，可使$a1$的黑面向"前"．**这时任意转动a列，a列的立方体朝"前"的面总是不变的．** 因此，转动a列和2行，可以使$a2$的黑面向"前"．然后转动a列（立方体$a1$和$a2$的黑面这时将仍然保持向"前"！）和3行，使立方体$a3$的黑面向"前"，等等．

当立方体$a1$—$a8$的黑面都向"前"时，我们转动1—8行，使它们都向"上"，然后再转动a列，使它们都向"左"．此后a列不再转动了，当转动其它的列和行时，a列所有立方体的黑面的位置将不改变．

对列b, c, …, h的立方体同样处理．

当所有的立方体的黑面都向"左"时，我们再将a到h所有的列转动90°，从而使所有的黑面都向"上"．

208. 在平面上的（自不相交的）n边形中，锐角最多有多少个？

【解】假设 k 是 n边形中锐角的个数．因为任何一个锐角都小于90°，所以 n 边形的锐角之和小于 $k\times 90°$．对于 n 边形其它的角，我们只知道它们之中的每一个都小于360°．这样一来，n 边形的所有内角之和小于

$$k\times 90°+(n-k)\times 360°=n\times 360°-k\times 270°.$$

另一方面，我们知道 n 边形的内角之和等于 $(n-2)\times 180°$，因此

$$(n-2)\times 180°<n\times 360°-k\times 270°,$$

由此得出

$$3k<2n+4.$$

因为这个不等式的左右两边都是整数，所以

$$3k\leqslant 2n+3,$$

由此得出

$$k\leqslant \frac{2n}{3}+1.$$

于是，我们得到：平面 n 边形可以包含有不多于

$$\left[\frac{2n}{3}\right]+1$$

个锐内角（记号 [ ] 表示整数部分，即不超过给定数的最大整数）．

我们来证明，所得到的对于锐角个数的估计式是精确的：可以作出一个平面 n 边形，它的锐内角的个数等于 $\left[\frac{2n}{3}\right]+1$．

首先我们研究 n 能被 3 整除的情况 $(n=3r)$．这时 $\left[\frac{2n}{3}\right]+1=2r+1$．

我们来研究圆的一个扇形，其张开的角度为60°．假设 P 是它的顶点，A 和 B 是圆弧的两个端点．将弧 AB 用点 $C_1, C_2, \cdots, C_{2r-2}$ 分成 $2r-1$ 等分．我们用 S_i 来表示 $\triangle C_{2i-1}PC_{2i}$ 的重心 $(i=1, 2, \cdots, r-1)$．通过点 S_i 作一直线和线段 PC_{2i-1} 平行（图267）．假设 D_{2i-1} 是所

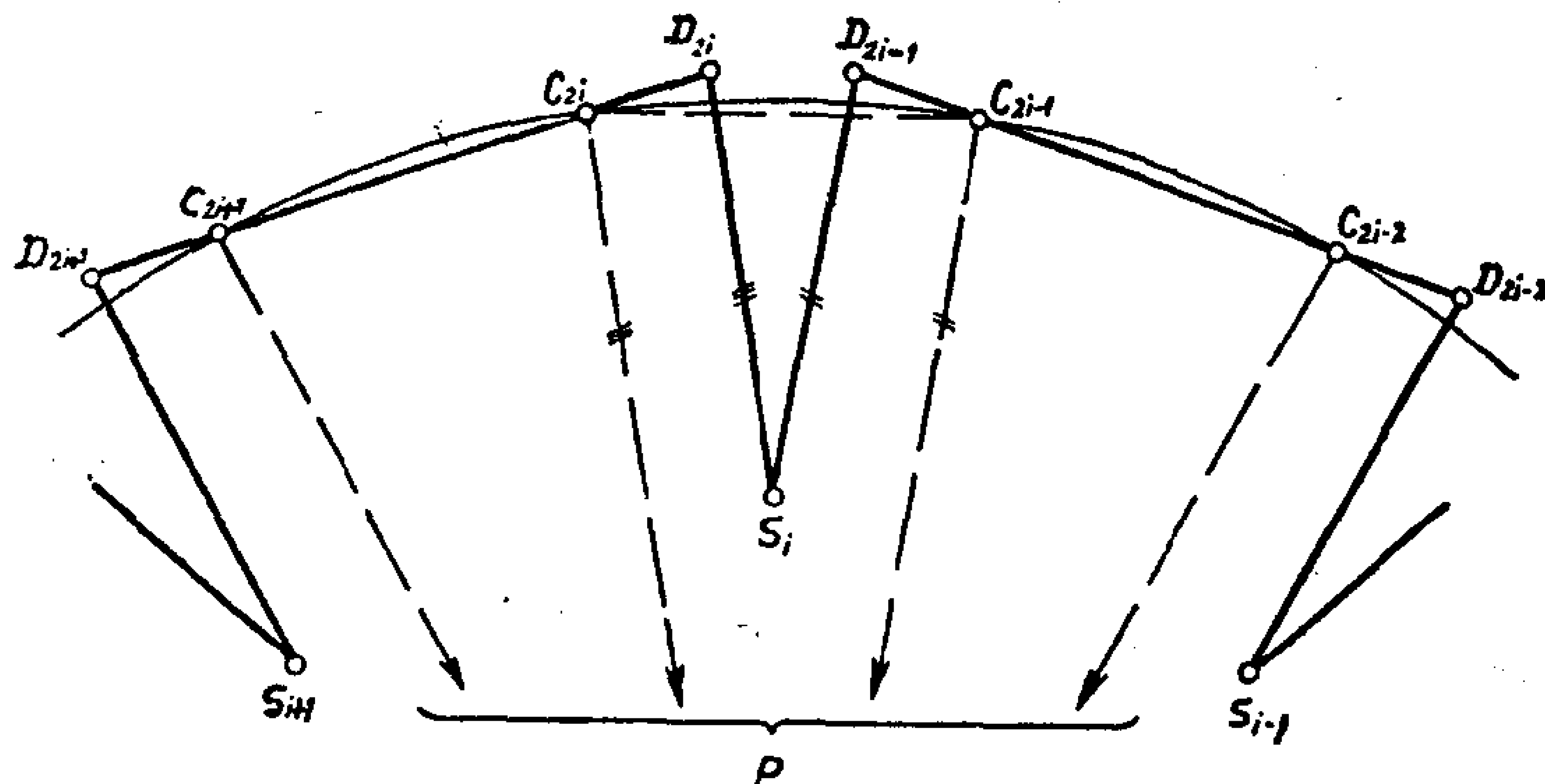


图 267

作的直线和线段 $C_{2i-2}C_{2i-1}$（点 C_0 和 A 重合）的延长线的交点．用 D_{2i} 表示过点 S_i 且和线段 PC_{2i} 平行的直线和线段 $C_{2i}C_{2i+1}$（点 C_{2r-1} 和 B 重合）的延长线的交点．现在我们研究下面的

多边形$\Sigma = PAD_1S_1D_2D_3S_2D_4\cdots D_{2i-1}S_iD_{2i}D_{2i+1}S_{i+1}\cdots D_{2r-3}S_{r-1}D_{2r-2}B$（图268）．在这个多边

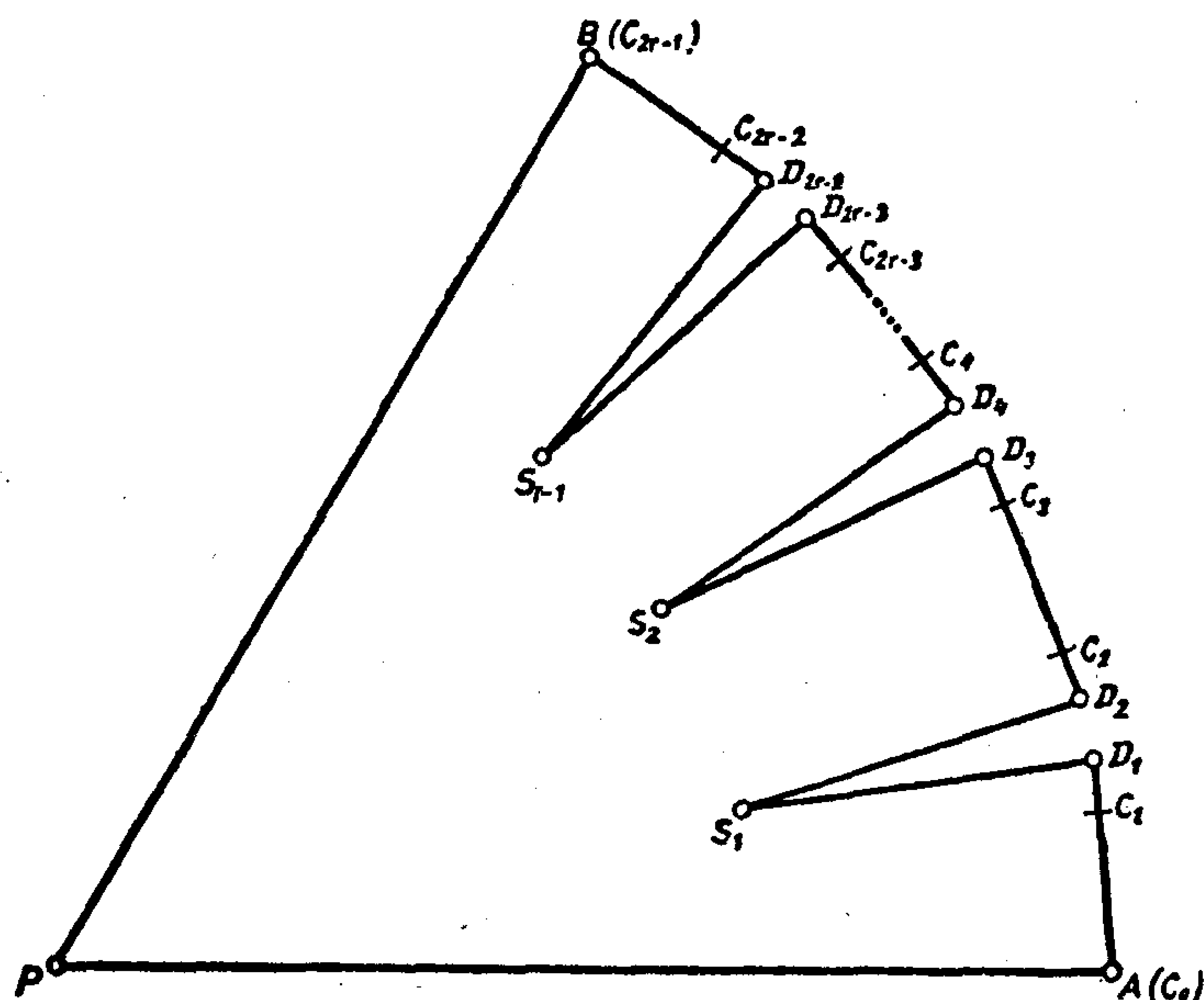


图　268

形中，有$3r$个顶点和$2r+1$个锐角，这些锐角的顶点是P，A，D_1，D_2，$\cdots$，D_{2r-2}，B．事实上，$\angle APB=60°$，$\angle PAD_1$作为等腰三角形的底角是锐角，$\angle AD_1S_1=\angle PC_1A=\angle PAD_1$，因为$\angle AD_1S_1$和$\angle PC_1A$的两组边分别平行．同理可证多边形$\Sigma$其它的那些顶角也是锐角．

现在我们研究当n被3除余1的情况，即$n=3r+1$．这时$\left[\frac{2n}{3}\right]+1=2r+1$．由上可知，我们可以作出一个$3r$边形，它的锐内角有$2r+1$个．我们研究原来所作的多边形$\Sigma$．我们在边$AP$的中垂线上取一点Q，使点Q在$\triangle PAC_1$内．这时$\angle QAC_1<\angle PAC_1$，$\angle QPB<\angle APB$．因为$\angle PAC_1$和$\angle APB$是锐角，所以$\angle QAC_1$和$\angle QPB$是锐角．因此，当用折线$AQP$代替多边形$\Sigma$的边$AP$时，所得到的多边形$\Sigma'$有$3r+1$个顶点和$2r+1$个锐内角（图269）．

最后，我们研究当n被3除余2的情况，即$n=3r+2$．我们又来研究$3r$边形Σ．将边PA和PB分成三等分．设Q_1和Q_2是靠近顶点P的分点，且分别在边AP和PB上，而P_1是顶点P关于直线Q_1Q_2的对称点．这时用折线$AQ_1P_1Q_2B$来代替多边形Σ的边AP，PB，所得到的多边形Σ''有$3r+2$个顶点和$2r+2=\left[\frac{2n}{3}\right]+1$个锐内角，因为$\angle BQ_2P_1=\angle P_1Q_1A=60°$，所以是锐角（图270）．

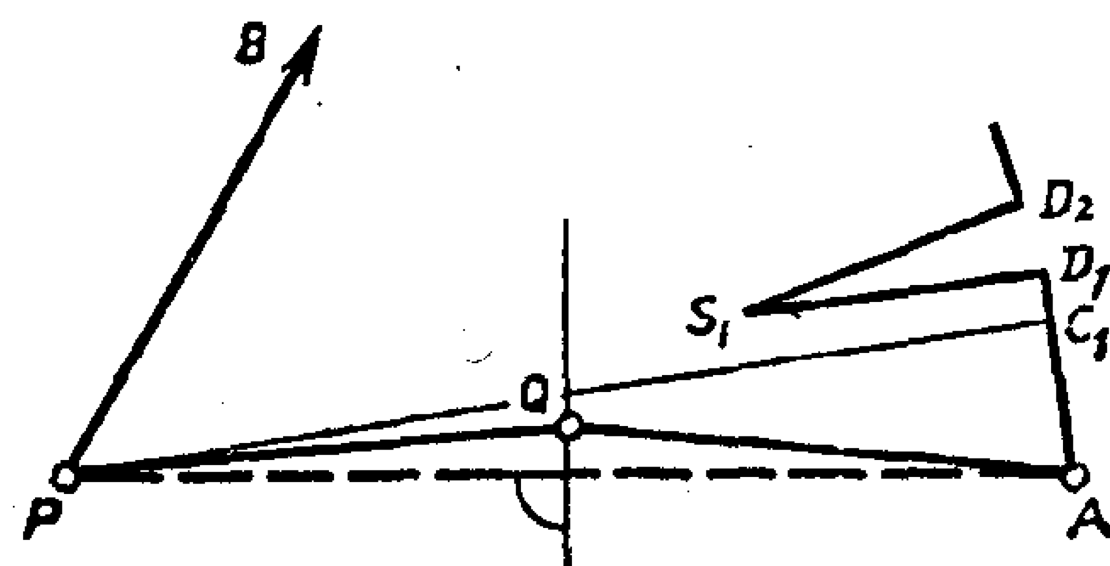


图　269

我们让读者独自去证明，我们所作的多边形Σ，Σ'，Σ''是自不相交的．

209. 从罗托❶中抽出五个号码牌，其中至少有两个是连续的整数（即彼此相差数 1）的概率是多少？❷

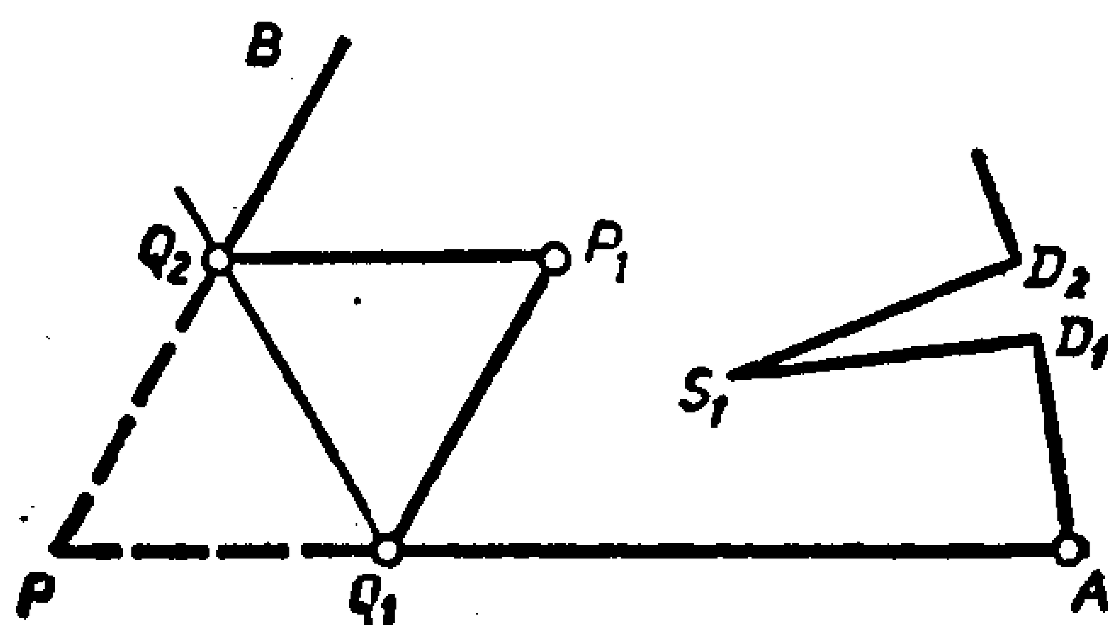


图 270

【解】设 p 是所要求的概率，k 是从前90个自然数中取出 5 个自然数，使其中任何两个数之差大于1的方法的总个数．因为从90个数中取出 5 个数可有 C_{90}^5 种方法，所以

$$p=1-\frac{k}{C_{90}^5}.$$

于是假若我们求出了数 k，那么原题便解决了．

我们来研究 5 个编号，它们之中任何两个都不是连续的：

$$1\leqslant a<b<c<d<e\leqslant 90.$$

这时，所有的数

$$a,\ b-1,\ c-2,\ d-3,\ e-4$$

都不相同且仅能从 1 到86的范围内取值．反之，任何一组数

$$1\leqslant a'<b'<c'<d'<e'\leqslant 86$$

都可以和五个编号

$$a',\ b'+1,\ c'+2,\ d'+3,\ e'+4$$

相对应，它们之中的每一个数都包含在 1 到90的范围内，且数 a'，$b'+1$，$c'+2$，$d'+3$，$e'+4$ 之中任何两个数都不是连续的自然数．因此，数 k 等于由前86个自然数中取出 5 个数的方法个数，即

$$k=C_{86}^5.$$

这样一来，

$$p=1-\frac{C_{86}^5}{C_{90}^5}=1-\frac{86\times85\times84\times83\times82}{90\times89\times88\times87\times86}=0.2\cdots.$$

210. 给定 n 个点，其中任何三点都不在一直线上．将这些点两两连接成线段．将其中若干线段涂成红的，若干线段涂成兰的，使得从任何一点走到另外任何一点，仅仅只要沿着涂了颜色的线段走就行了，而且这种路径是唯一的．证明：在这些线段中，没有涂色的线段可以涂成红的或兰的，使得以给定点为顶点的任一三角形的红边有奇数个．

【证明】我们规定已经涂色的线段不得再改涂成其它颜色．假设 AB 是一线段，其端点和给定的 n 个点中的两个点相重合，且它还没有涂色．根据本题条件，有一条且仅有一条折线从 A 到 B，且这个折线的每一段都是涂了颜色的．我们用 V_{AB} 来表示这个折线．我们将线段 AB

涂成兰色，如果折线 V_{AB} 有奇数个兰色线段，

涂成红色，如果折线 V_{AB} 是偶数个兰色线段．

（我们注意，“选色规则”在线段 AB 已经涂色的情况下仍然有效．）

---

❶ 罗托：一种赌博，由袋中取出有号码的牌子置于本人手中纸板上的相同号码上，以先摆满纸牌号码者为胜；亦用作教育性游戏，但号码牌改为图画．——中译者注．

❷ 罗托的号码牌的编号是从 1 到90．——俄译者注．

我们证明，选色规则满足本题条件．假设 ABC 是任何一个三角形，它的顶点和三个给定的点重合．

首先，对于顶点 A，B，C 可以添加这样一个点 D，从点 D 沿着原来涂了色的线段走到点 A，B，C 的折线 V_{DA}，V_{DB}，V_{DC}，除了点 D 以外，没有其它的公共点（点 D 可能和 $\triangle ABC$ 的一个顶点重合，例如和顶点 A 重合．在这种情况下，折线 V_{DA} 由唯一的一个点组成）．事实上，我们来研究从点 A 到 B 的原来涂色的折线 V_{AB}．从顶点 C 出发沿着折线 V_{CA} 往顶点 A 走，我们早晚总会到达折线 V_{AB} 的某一个点 D．（如果顶点 C 属于折线 V_{AB}，那么 $D=C$．当然点 D 也可能和点 A 或点 B 重合．）不难看出，所得到的点 D 具有上面所说的性质（图271）．

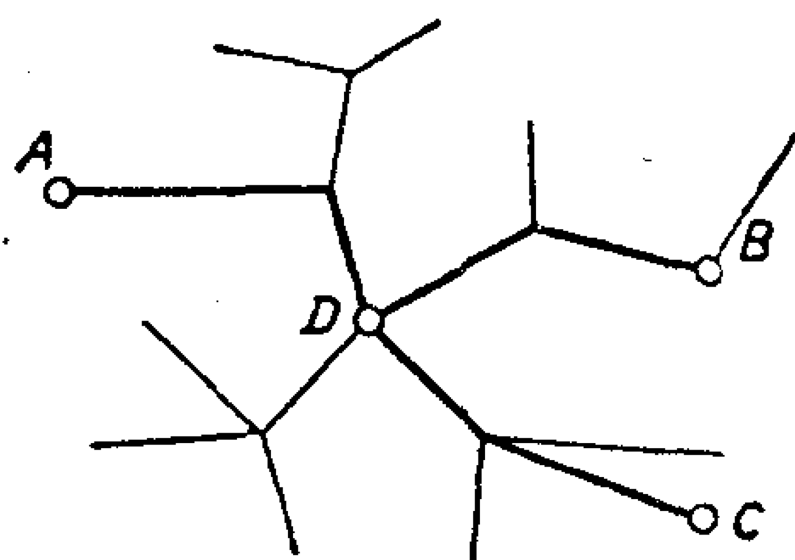


图 271

假设 x 是折线 V_{DA} 和 V_{DB} 中兰色线段的个数，y 是折线 V_{DB} 和 V_{DC} 中兰色线段的个数，z 是折线 V_{DC} 和 V_{DA} 中兰色线段的个数．这时根据选色规则，在线段 AB，BC，AC 中，涂成兰色的个数和 x,y,z 中奇数的个数相同．

因为和 $x+y+z$ 是偶数（在计算和数时，折线 V_{DA}，V_{DB}，V_{DC} 的兰色线段都算了两次），所以 $\triangle ABC$ 的边涂成兰色的有偶数个．这就证明了本题的断言．

211．一条直线和三角形 ABC 的边 AB 交于点 C_1，和边 AC 交于点 B_1，和边 BC 的延长线交于点 A_1．假设 C_2 是点 C_1 关于边 AB 的中点的对称点，B_2 是点 B_1 关于边 AC 的中点的对称点，A_2 是直线 B_2C_2 和 BC 的交点．证明：

$$\sin(\angle B_1A_1C):\sin(\angle C_2A_2B)==B_2C_2:B_1C_1.$$

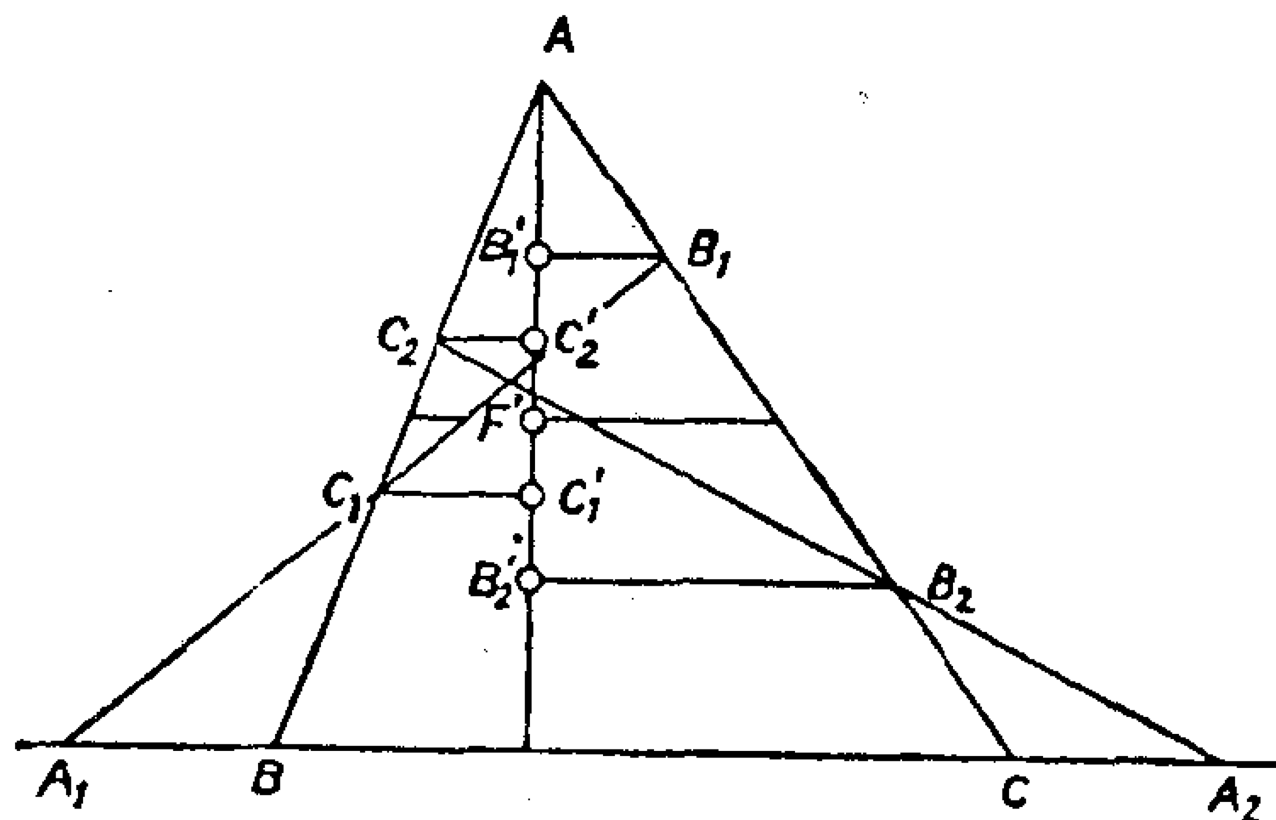


图 272

【证明】过顶点 A 作 $\triangle ABC$ 的高．设 B_1'，B_2'，C_1'，C_2' 是由点 B_1，B_2，C_1，C_2 所作的垂直于这个高的垂线的垂足．连接边 AB 和 AC 的中点的线段和边 BC 平行，故与 BC 上的高垂直，设中点连线与高相交于 F'（图272）．线段 $B_1'C_1'$ 和 $B_2'C_2'$ 关于点 F' 是对称的，因而相等（且指向相反）．

$\angle B_1'B_1C_1$ 和 $\angle B_1A_1C$，以及 $\angle C_2'C_2B_2$ 和 $\angle C_2A_2B$ 的夹边是平行的，因此角的正弦相等：

$$\sin(\angle B_1A_1C)=\sin(\angle B_1'B_1C_1)=\frac{B_1'C_1'}{B_1C_1},$$

$$\sin(\angle C_2A_2B)=\sin(\angle C_2'C_2B_2)=\frac{C_2'B_2'}{B_2C_2}.$$

由于 $B_1'C_1'=C_2'B_2'$，所以

$$\sin(\angle B_1A_1C):\sin(\angle C_2A_2B)=B_2C_2:B_1C_1,$$

这就是所要证明的．

在所作的证明中，任何一个地方也没有用到 B_1 和 B_2，C_1 和 C_2 属于 $\triangle ABC$ 的相应的边，而仅仅只要它们在高上的投影关于点 F' 是对称的．

此外，可以去掉直线 B_2C_2 和 BC 相交这个条件，因为这可由直线 B_1C_1 和 BC 相交推出．事实上，在上面所作的证明中，直线 B_1C_1 和 BC 相交意味着 B_1' 和 C_1' 不重合，因而点 B_2' 和 C_2' 不重合，这样一来，直线 B_2C_2 和 BC 不平行．

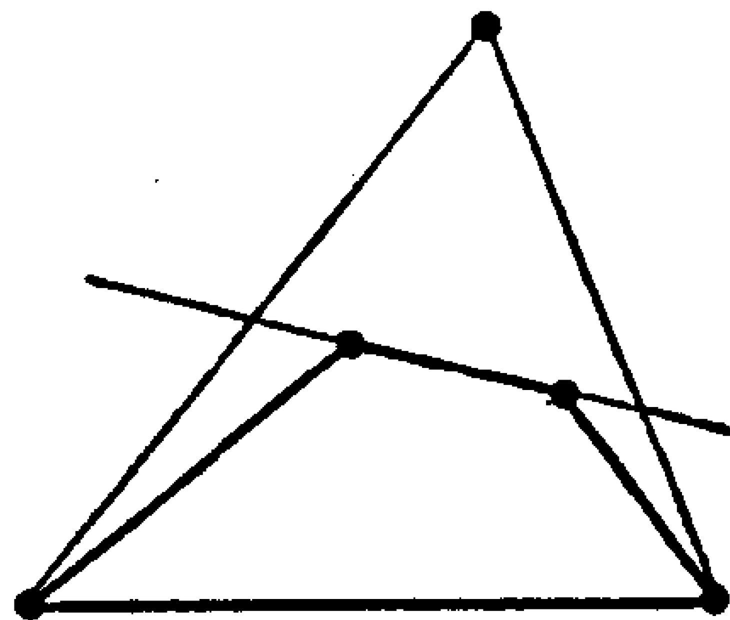
212．在平面上给定22个点，其中任何三点都不在一直线上．证明：它们可以这样分成对，使得连接每一对的两个点所得到的线段至少交于 5 个点．

【证明】我们利用如下事实：如果在平面上给定了 5 个点，其中任意三点都不在一直线上，那么从这 5 个点中总可以挑选出 4 个点，这 4 个点能构成一凸四边形．

事实上，如果 5 个给定点的凸包具有五边形的形状，那么任意四个给定点都可构成一个凸四边形．

如果 5 个给定点的凸包具有四边形的形状（它的内部还有一个给定点），那么我们就取这四个“外面的”点，显然，我们得到一个凸四边形，它和给定点的凸包重合．

如果 5 个给定点的凸包具有三角形的形状，那么通过位于三角形内的两个给定点作直线（图273），这条直线和三角形的两边相交于内点，因为如果它通过三角形的某一顶点，那么这三个给定点便在一直线上了，与本题条件相违．


图　273

将三角形内的两点和第三边的端点彼此连接起来，我们得到一个凸四边形．

现在我们来证明212题．

首先我们指出，如果 4 个点是凸四边形的顶点，那么这个四边形的对角线是以给定点为端点的两个相交的线段．

其次，我们作一直线 e_1，它和给定点中任意一对点所确定的直线都不平行．这样的直线是存在的，因为从有限多个点中只能取出有限多个点对，因而它们只能确定有限条直线．开始的时候，我们使所有22个点都在直线 e_1（或与它平行的直线）的同一侧，然后将这条直线往给定点平行移动，用这种方法依次作出直线 e_2, e_3, e_4, e_5，使得这些直线不通过任何给定点，而且在 e_1 和 e_2 之间有 5 个给定点，在 e_2 和 e_3，e_3 和 e_4，e_4 和 e_5 之间各有 4 个给定点，在 e_5 的另一侧有 5 个给定点．

在位于 e_1 和 e_2 之间的 5 个给定点中，可以挑选出 4 个点，它们可构成一凸四边形，因此它们是两个相交线段的端点，此外，还剩下一个点．将剩下的这个点和位于 e_2 与 e_3 之间的 4 个给定点算作一起，我们又可以从这 5 个点中挑选出两个相交线段的 4 个端点．每次将剩下的点和后面的点算作一起，我们就可以作相交的线段．只要给定点没有取完，这个过程就可以继续做下去．

总共我们可以作 5 对线段．根据作法，每一对线段都是相交的，且任何两个线段都没有公共端点．所有的交点都是不同的，因为在两个相交线段的 4 个端点中，至少有 3 个点在两条相邻的直线之间，因此，至少有一个线段的两个端点都落在这两条平行的直线之间，于是这个线段所有的内点（包括交点在内）也在这两条平行直线之间．这样一来，所有线段对的交点都被这些直线彼此隔开了．

于是，本题断言获证．

原题可作如下的推广：

假设在平面上给定了 $4n+1$ 个点，其中任意 3 点都不在一直线上．

证明：它们可以分成这样的对（当然会剩下一个点），使得连接每一对的两个点的线段至少相交于 n 个不同的点.

213. 有30个贮钱匣. 每一个贮钱匣只能用一把钥匙打开，而且这把钥匙不能打开其它任何一个贮钱匣. 把这些钥匙搅混以后，随意地放入锁上了的贮钱匣，每个贮钱匣放一把钥匙. 然后撬开两个贮钱匣. 在此之后，不许再撬锁. 试问：能够打开其它所有贮钱匣的概率是多少？（打开或撬开某一贮钱匣后，可以利用放在它里面的钥匙去打开它所能打开的贮钱匣.）

【解】我们证明：如果在 n 个贮钱匣中随意放入一把钥匙（每一个贮钱匣可以用一把且只能用一把钥匙打开）且有两个贮钱匣被撬开了，那么用放入的钥匙能够打开其余钱匣的概率是 $2/n$.

假设 p_n 是当贮钱匣的个数等于 n 时所要求的概率. 显然 $p_2=1$. 我们证明：若 $n\geqslant 2$，则

$$p_{n+1}=\frac{n}{n+1}p_n. \tag{1}$$

由此将得出

$$p_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}p_2=\frac{2}{n},$$

且本题所要求的概率 $p_{30}=1/15$.

我们将 $n+1$ 个贮钱匣放成一排，且在每一个贮钱匣中随意放入一把钥匙. 所得到的钥匙的排列（贮钱匣的编号仍然不变）用 E 表示. 假设 r 是放有第 $n+1$ 个贮钱匣的钥匙的贮钱匣的编号，s 是其钥匙放在第 $n+1$ 个贮钱匣中的贮钱匣的编号. 显然，有下面两种情况：或者两个数 r 和 s 都等于 $n+1$（最后一个贮钱匣的钥匙放在最后一个贮钱匣中），或者两个数 r 和 s 都小于 $n+1$.

在第一种情形（$r=s=n+1$），从我们的研究中去掉最后一个贮钱匣时，我们在前 n 个贮钱匣中得到前 n 个贮钱匣的钥匙的某一个排列 E_1. 在第二种情形，我们将 $n+1$ 把钥匙的排列 E 和排列 E_1 相比较，E_1 和 E 不同的仅仅是在第 r 个贮钱匣中放的是第 s 个贮钱匣的钥匙［而原先放在第 r 个贮钱匣中的第（$n+1$）个贮钱匣的钥匙现在放在第（$n+1$）个贮钱匣的“自身”内］.

于是，每一个排列 E 都和一个完全确定的排列 E_1 相对应. 反之，如果知道了排列 E_1，那么 E_1 只能从 E 这样得到：或者是从第 r 个和第（$n+1$）个贮钱匣中（$1\leqslant r\leqslant n$）取出钥匙并交换它们的位置后得到的，或者是从我们的研究中去掉第 $n+1$ 个贮钱匣——这时在它里面放的是它“自己的”钥匙——之后得到的. 因此，前 n 把钥匙的一个排列 E_1 对应于 $n+1$ 个贮钱匣的钥匙的 $n+1$ 个不同的排列.

不失一般性，我们可以认为前两个贮钱匣被撬开了. 此后，无论是在排列 E 的情况下，或是在排列 E_1 的情况下，在开到第 r 个贮钱匣之前，我们可以打开的贮钱匣是相同的. 当打开第 r 个贮钱匣时，在钥匙排列为 E 的情况下，我们可以打开第 $n+1$ 个贮钱匣，然后可以打开编号为 s 的贮钱匣；而在钥匙排列为 E_1 的情况下，放在第 r 个贮钱匣的钥匙可以打开第 s 个贮钱匣. 因此，在两种排列的情况下，我们往后又可以打开相同的贮钱匣.

这样一来，在排列为 E 的情况下，可以打开所有 $n+1$ 个钱匣当且仅当在那种情况下：如果对于和它相对应的排列 E_1，可以打开前 n 个贮钱匣而在第 $n+1$ 个贮钱匣中放入的不是

开它的锁的钥匙（要不然的话，不能打开第 $n+1$ 个贮钱匣）.

因此，n 把钥匙的每一个排列对应于 $n+1$ 把钥匙的 $n+1$ 个排列，而可以打开所有钱匣的排列仅对应于 $n+1$ 把钥匙的 n 个排列. 这正好证明了关系式（1）.

214. 证明：任意三角形的边长 a,b,c 满足不等式

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3.$$

【证法 1】 所要证明的不等式的左边的第三和第四被加项可以变成

$$c(a-b)^2+4abc=c(a+b)^2.$$

然后从左边的每一项减去右边相应的被加项，我们得到

$$a\left[(b-c)^2-a^2\right]+b\left[(c-a)^2-b^2\right]+c\left[(a+b)^2-c^2\right]=$$

$$=a(b-c-a)(b-c+a)+b(c-a-b)(c-a+b)+$$

$$+c(a+b-c)(a+b+c)=$$

$$=(a+b-c)(ab-ac-a^2-bc+ab-b^2+ac+bc+c^2)=$$

$$=(a+b-c)\left[-(a-b)^2+c^2\right]=$$

$$=(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

最后一个等式右边的三个因式都是正的，因为非蜕化的三角形的任意两边之和大于第三边. 因而本题断言被证明了.

关于题目的本身以及上面所作的证明，我们想作两点注解.

1） 本题断言可以叙述成下面的形式：长为 a,b,c 的线段可以构成三角形的必要条件是不等式

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3$$

成立.

不难看出，对于正数 a,b,c，这个条件不仅是必要的，而且是充分的. 事实上，如果不等式成立，那么

$$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)>0.$$

因此，或者所有三个因式为正，或者两个因式为负、另一个因式为正. 如果所有三个因式为正，那么存在一个边长为 a,b,c 的三角形. 假设两个因式为负，另一个因式为正. 例如，我们假设前两个因式为负. 这时它们的和等于 $2a$，也应该为负，由此得 $a<0$，这是不可能的.

2） 如果三角形蜕化成一直线上的两个线段，一个线段的起点和另一个线段的终点重合，那么所证明的不等式变成等式.

【证法 2】 所要证明的不等式的左右两边之差经过不太复杂的变换后可以变成

$$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)-2abc. \qquad (1)$$

如果三角形的边 a,b,c 所对的角用 α,β,γ 来表示，并利用余弦定理，那么所得到的表达式可以写成

$$2abc(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1).$$

我们利用关系式 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ 来变换上式圆括弧中的项：

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\frac{\gamma}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]=$$

$$=2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$=4\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

所得到的表达式是正的，因为$\alpha/2$，$\beta/2$，$\gamma/2$是锐角，从而它们的正弦是正的．于是本题断言获证．

215．某班有相同个数的男学生和女学生（全班总人数不少于4人）．他们以各种不同的顺序排成一排，看看能否将这一排分成两部分，使得在每一部分中，男学生和女学生各占一半．假设a是不能这样分的排法的个数，b是可以用唯一的方法将这一排分成男女各占一半的两部分的排法的个数．证明：$b=2a$．

【证明】我们说全班排成的一排是A型的，如果它不能分成这样两部分，使得每一部分中男生和女生各占一半：如果这样的分法是可能的，且只有一种方法这样分，我们就说排成的一排是B型的．

假设X是排在第一个的学生，如果X是女生，那么就用X来表示所有的女生，而所有的男生用Y来表示．如果X是男生，那么就用X来表示所有的男生，而用Y来表示所有的女生．因为全班有n个男生和n个女生，所以任何一种全班的排队都可以用字母X和Y的一个序列来表示，而且这个序列总是以X开始且含有n个字母X和n个字母Y（以后我们只研究这样的序列．为简单起见，我们把它们叫做词）．每一个词对应着全班的两种排法：一种排法是X表示男生，另一种排法是X表示女生．

如果词属于A型，那么无论将这个词从哪儿(除了最后一个字母)截断，在缩短了的词中，字母X至少要比Y多1个．事实上，因为缩短了的词以X开始，当词长加长时，X和Y的个数一个一个地改变，所以要想Y比X多，只有当X和Y的个数在某一个缩短了的词中变成一样多了之后才有可能．但是我们所研究的词是A型的，所以这是不可能的．

某词当而且仅当它可以分成两个比较短的A型词时是属于B型的．第一个“子词”以X开始，第二个“子词”以X或者Y开始．如果第二个A型的子词以Y开始，那么如果在这个子词中，用Y来代替X，用X来代替Y，我们又得到A型的词．因此，所有的B型词可以分成对，在这一对词中，它们的第一个子词是一样的，而第二个子词是这样的，用上面所说的交换字母的方法，可以从一个词的第二个子词得到另一个词的第二个子词．这样一来，如果我们能在每一个A型词和两个A型子词都是以字母X开始的B型词之间建立起一一对应的关系，那么本题就被证明了．

所要求的对应关系可以这样得到：将B型词的第二部分开头的字母X（第二部分的本身是缩短的A型词）放到整个词的最前面去．

我们来证明，所得到的词是属于A型的．事实上，如同上面所表明的那样，把原来的B型词的第一部分（缩短的A型词）从任意一个字母(除了最后一个字母外)截断，所得到的新的(短)词所包含的X至少要比Y多1个．把原词的A型的第二部分开头的字母X放到原词第一个字母X的前面之后，将这个词从任何一个字母——从第二个字母开始到第一部分最后一个字母前为止——截断，在所得到的短词中，X的个数至少要比Y多2个．原词第一部分

的最后一个字母在新词中所占的位置是原来的B型词第二个A型部分的第一个字母的位置．将新词从原词第一个A型部分的最后一个字母处截断，我们得到一个短词，它所包含的X比Y要多1个．将新词从原词第二个A型部分的第二个字母开始的任何一个字母处截断，在所得到的短词中，X和Y的关系与将原来的B型词从同一字母处截断所得到的短词中X和Y的关系是一样的．因此，在任何一个短词中，X都比Y多．只有从最后一个字母本身截断时，才会出现“平衡”．

反之，在任何一个A型词中，除了第一个字母外，还应该有这样一个字母，当把原词从这个字母处截断时，在所得到的短词中，X比Y多1个[1]（经过第一个字母以后，显然我们得到X多1个的“优势”）．在这个字母后面写上X，而划去原词的第一个字母X.所得到的新词还是以X开始的，因为如果原词的第二个字母是Y，那么将原词从第二个字母处截断，我们便得到一种分法，它将A型词分成两部分，每一部分里的X和Y的个数都一样多（根据本题条件，原词不少于4个字母），而这是不可能的．划去原词第一个字母以后，在所有右端不超过所加上的字母X的短词中，字母X和Y的个数之差减小了1个．对于右端为加写的字母X前一个字母的短词，这个差在划去第一个字母X之前等于1．因此，在划去第一个字母X之后，对这个短词来说，X的个数和Y的个数之差将等于0．因此，将所得到的词从这个字母（而不是前面的字母）处截断，我们便将它分成了两部分，在每一部分中，字母X和Y各占一半，且每一部分都以X开头．在任何一个右端的字母不在加写的字母X的左边的短词中，X都比Y多，因为在这个短词中，X和Y的关系与从原词所得到的同样长的短词中X和Y的关系是一样的．而且由于我们对加写字母X的前一个字母的取法，在每一个右端在这个字母之前的短词中，X和Y的个数是不一样的．

于是在A型词和两个A型部分都以X开头的B型词之间建立了一一对应关系．

从而本题断言获证．

216．沿着某边长为10公里的正方形领土的边界，有两条平行的公路．在这块领土上，设有4个观察哨所．现在要修若干段小路，这些小路平行于正方形的边，而且从每一个观察哨所可以骑自行车到达每一条公路（公路上禁止骑自行车）．证明：不管哨所设在什么地方，总可以这样修路，使所修的路的总长不超过25公里（当观察哨所成某一种分布的时候，所要修的小路的总长不能再少了）．

【证明】我们假设公路是沿着领土北面的和南面的边界修的．观察所这样来表示：当从西往东走时，顺次遇到的哨所是A_1，A_2，A_3，A_4．假设a_1，a_2，a_3，a_4是对应的哨所到领土的西边界的距离．数a_1，a_2，a_3，a_4中可以有相等的．一般地，它们满足不等式$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$．

如果$a_3-a_2 \leqslant 5$公里，那么在哨所A_2和A_3之间从北面的公路到南面的公路修筑一条小路，如果$a_2=a_3$，那么就沿着通过这两个哨所的子午线修路．然后对所有的哨所从西到东或从东到西修路把哨所和所修筑的路连接起来（图274．a）．连接北边公路和南面公路的路的长为10公里．因为$a_4-a_1 \leqslant 10$公里，所以从哨所A_1和A_4到这条南北通路所修的小路其总长不超过10公里．根据假设，哨所A_2和A_3到南北通路所修的小路其长度不超过5公里．这样一来，在这种情况下，所修的路的总长不超过25公里．

如果$a_3-a_2 \geqslant 5$公里，那么我们在哨所A_1和A_2之间，A_3和A_4之间，各修一条从北到南的通路．如果$a_1=a_2$，或者$a_3=a_4$．那么相应地使所修的路通过两个哨所所在的子午线．如

[1] 这样的字母可能不止一个，我们应该取最左面的．——中译者注．

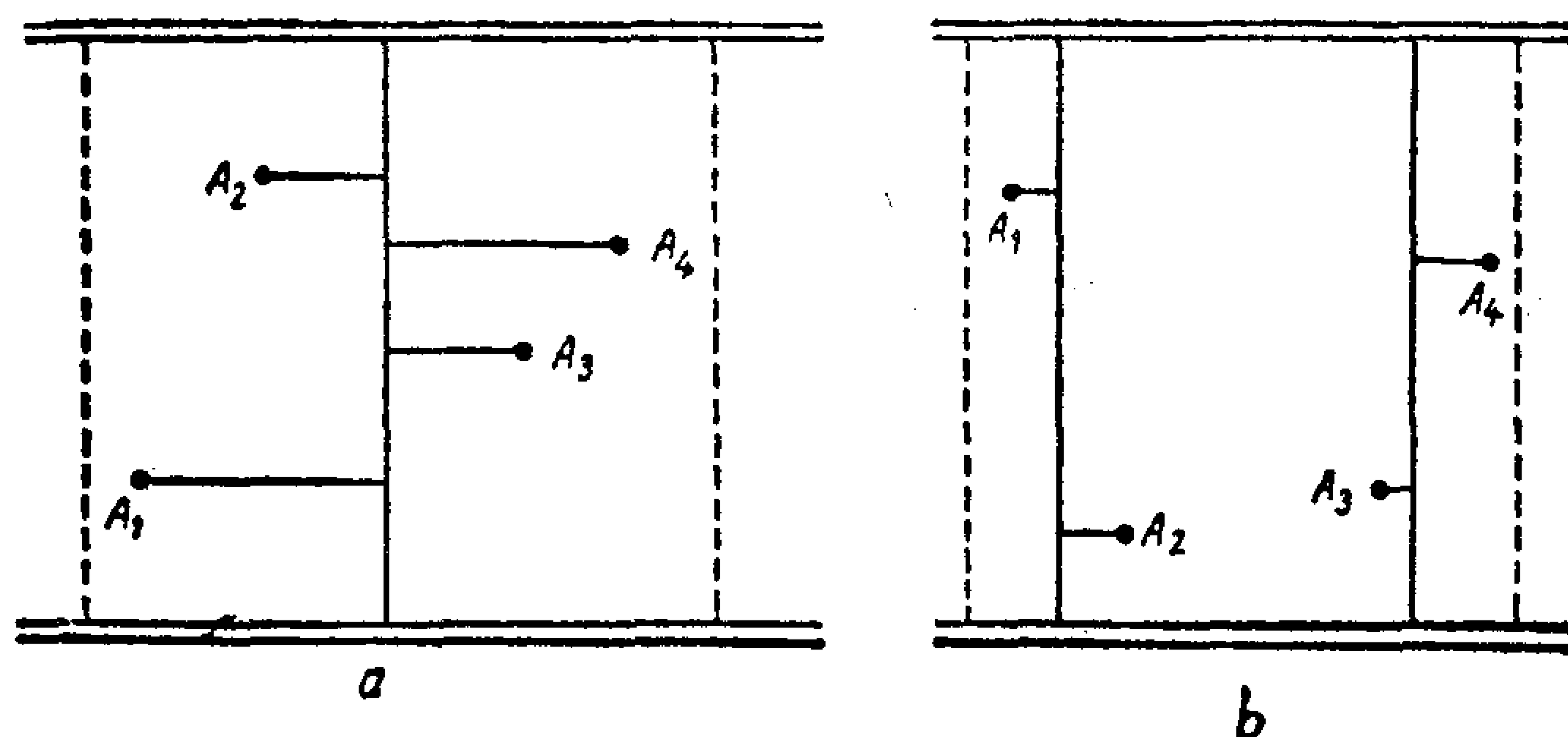


图 274

果只要有一个等式不成立，我们就修从西到东或从东到西的路把这两个哨所和它们之间的南北通路连接起来（图274. b）. 在这种情况下，所修的路的总长为

$$20+a_2-a_1+a_4-a_3=20+(a_4-a_1)-(a_3-a_2)\leqslant 20+10-5=25\text{公里}.$$

这样一来，即使在$a_3-a_2\geqslant 5$公里的情况下，所修的路的总长也不超过25公里.

我们来证明：如果所修的路的总长减少，那么当哨所成某一种分布时，便会不够了，例如，假若哨所分布在领土的边界上的西南角往北，西北角往东，东北角往南，东南角往西均为2.5公里的地方. 哨所按上面所说的顺序表示为A_1，A_2，A_4，A_3.

最短的筑路方案可以由不多于两个的互不连通的（即单独的）部分组成，因为如果包含有不少于三个的互不连通的部分，那么从北到南的路的总长不少于30公里.

如果修路方案由两个互不连通的部分组成，那么从北到南的路的总长为20公里. 而在这个筑路方案中，每一个连通的部分要包含不少于2个的哨所. 如果从哨所A_1出发沿着所修的路可以走到哨所A_3或A_4，那么在所修的路中，从西到东（或从东到西）的路的各段之和不小于7.5公里. 类似的断言对从哨所A_4可以走到哨所A_2的情况也是正确的. 如果从哨所A_1沿着所修的路只能到达哨所A_2，从哨所A_3沿着所修的路只能到达哨所A_4，那么筑路方案至少含有从西到东，长为2.5公里的两段.

最后❶，假设筑路方案是连通的，从任何一个哨所可以走到其它任何一个哨所. 于是从A_1沿着所修的路可以走到A_2，从A_4可以走到A_3. 我们用A_1A_2表示从A_1到A_2的路，用A_4A_3表示从A_4到A_3的路. 如果A_1A_2和A_4A_3没有公共点（图275. a），那么A_1A_2和A_4A_3的“竖直的”路的长度都不得小于7.5公里. 而对整个连通的路来说，由A_1到A_4的路在水平方向上的各段的长度不小于10公里. 于是在这种情况下，所修的路的总长不小于25公里.

如果A_1A_2和A_4A_3有公共点，但只有一个公共点的话，我们还是可以像上面那样来证明所修的路的总长不少于25公里.

如果A_1A_2和A_4A_3有一个以上的公共点，那么它们有一段路是重合的，因为为了使得所修的路最短，在任何两个公共点之间只要修一段路就行了. 这时我们可以来考虑A_1A_3和A_4A_2，它们之间是没有公点的（图275. b）. 仿照上面的论证便可证明所修的路的总长不少于25公里.

至此，本题结论完全获证.

❶ 以下的叙述，中译者有所改动.

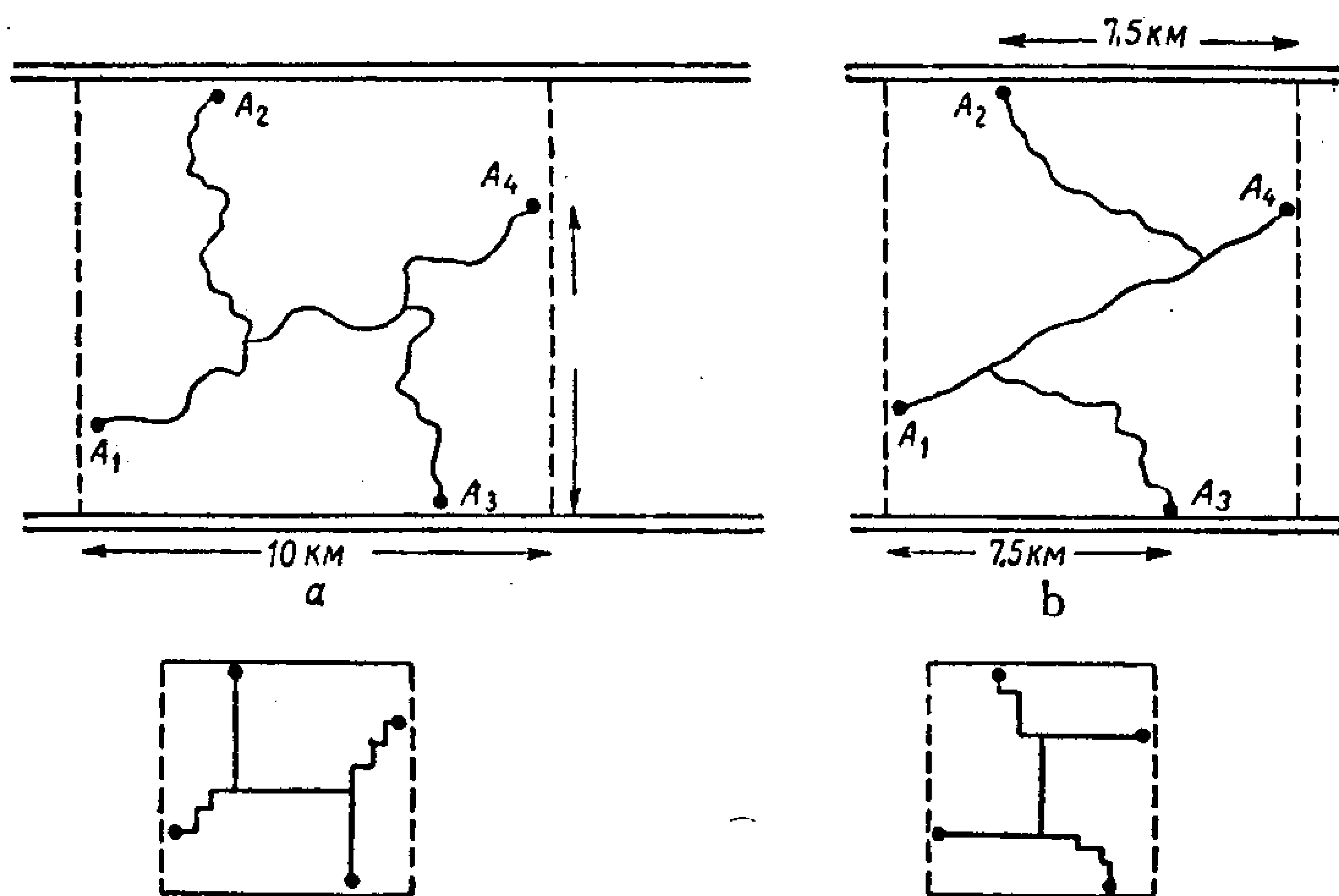


图 275

217. 对怎样的自然数 n 和 k，二项式系数

$$C_n^{k-1},\quad C_n^k,\quad C_n^{k+1}$$

成等差数列?

【解】根据本题条件，两个相邻的二项式系数之差 $C_n^{k-1}-C_n^k$ 和 $C_n^k-C_n^{k+1}$ 相等. 因此，这两个差的差等于 0：

$$C_n^{k-1}-2C_n^k+C_n^{k+1}=0. \tag{1}$$

我们假设 $k-1\geqslant 0$ 和 $k+1\leqslant n$，即

$$1\leqslant k\leqslant n-1. \tag{2}$$

如果等式(1)成立（且仅在这种情况下!），那么三个二项式系数构成等差数列.

将等式(1)的两边乘以数 $(k+1)!\ (n-k+1)!/n!$（因为我们假定不等式(2)成立，所以这个数是存在的并且是正的)，我们得到

$$k(k+1)-2(k+1)(n-k+1)+(n-k)(n-k+1)=0.$$

这样一来，等式(1)当而且仅当

$$n^2-4nk+4k^2-n-2=0 \tag{3}$$

时成立.

因为这时

$$n=(n-2k)^2-2$$

是整数，且比某一个其它的整数的平方小 2，所以 n 可以表示成

$$n=u^2-2$$

的形式，其中 u 是满足关系式 $u=n-2k$（或 $u=2k-n$）的自然数，由此得出

$$k=k_1=\frac{n-u}{2}=\frac{u^2-u}{2}-1=C_u^2-1$$

或

$$k=k_2=\frac{n+u}{2}=C_{u+1}^2-1.$$

由后一个关系式看出 k 取整数值.

为了使数 n 取正值，u 应该满足不等式 $u \geqslant 2$．但当 $u=2$ 时，值 k_1和 k_2 不满足不等式（2）．

如果 $u \geqslant 3$，那么

$$k_1=C_u^2-1 \geqslant 1 \text{ 且 } k_1=\frac{n-u}{2}<n,$$

又因为 $k_1+k_2=n$ 和 $k_1<k_2$，所以 k 的两个值都满足不等式（2）．

于是，从三个二项式系数 C_n^{k-1}，C_n^k，C_n^{k+1} 组成等差数列的必要充分条件出发我们得到了和原题断言等价的断言：当 $u>2$ 时，由表达式 $n=u^2-2$ 和 $k=C_u^2-1$ 或 $k=C_{u+1}^2-1$ 所确定的数对 n,k 满足关系式（3）．

关于上面所作的解答必须指出下面几点：

1） 当 $u=2$ 时所得到的值 $k=0$ 和 $k=2$ 可以认为是允许的，如果规定当 $k<0$ 或 $k>n$ 时，二项式系数 C_n^k 变成 0．这时本题条件中所说的二项式系数或者是等差数列0，1，2，或者是等差数列2，1，0．

2） 与217题相关，自然产生一个问题：四个以及更多的连续的二项式系数能否构成等差数列？不难看出，这个问题的答案是否定的．事实上，在这样的等差数列中，第一，第二和第三个二项式系数以及第二，第三和第四个二项式系数构成由三项组成的等差数列．但是，正象从上面的解法中推出的，对应于给定的值 n 的两个 k 值所得到的三个二项式系数的组，它们关于 $(1+x)^n$ 的展开式的中项是对称分布的．因此，由三个二项式系数组成的等差数列，一个是上升的，另一个是下降的．这样一来，四个连续的二项式系数不可能是同一个等差数列的连续的项．

3） 等差数列可以定义作这样的数列，它的相邻两项之差所构成的序列是由同一个数重复而成的．类似地还可以定义序列（我们把它叫做二阶等差数列），它的相邻两项之差构成通常的等差数列（“一阶的”）．在一般的情况下，我们把序列叫做 k 阶（$k>1$）等差数列，如果它的相邻两项之差构成 $k-1$ 阶等差数列．

四个连续的二项式系数能否构成二阶等差数列呢？这个问题和原来的问题是相似的，并可以化为在 n 和 k 允许取值的范围内求解 n 和 k 的三次方程．但是下面简单的讨论可以得到新问题的无穷多个解答，而不必借助于三次不定方程．如果数 n 是奇数，即形如 $2u+1$ 的数，那么中间两个二项式系数相等，在它们之前的一个二项式系数和在它们之后的一个二项式系数相等．因此，二项式系数

$$C_{2u+1}^{u-1},\quad C_{2u+1}^{u},\quad C_{2u+1}^{u+1},\quad C_{2u+1}^{u+2}$$

的差等于 a，0，$-a$，构成等差数列．这个简单的说明使得不难在 n 和 k 允许取值的范围内求解联系 n 和 k 的三次方程：这个方程的左边的多项式可以分解成一次因式和二次因式的乘积，以后的求解容易进行到底．

218．在平面上画一个圆，半径为 r，圆心在直角坐标系的原点．假设 $\delta(r)$ 是和所画的圆最近而又有整数坐标的点到圆的距离．证明：如果圆的半径 r 取得充分大的时候，便可使距离 $\delta(r)$ 充分小，即当 $r\to\infty$ 时，$\delta(r)\to 0$．

（平面上的点到圆的距离定义如下：通过给定的点和圆心作一条直线，此直线和圆有两个交点，给定点到离它最近的交点的距离就叫做该点到圆的距离．）

【证法 1】 我们提醒一下，具有整数坐标的点在平面上构成整点网（见 § 67）；而这些点

的本身叫做整点.

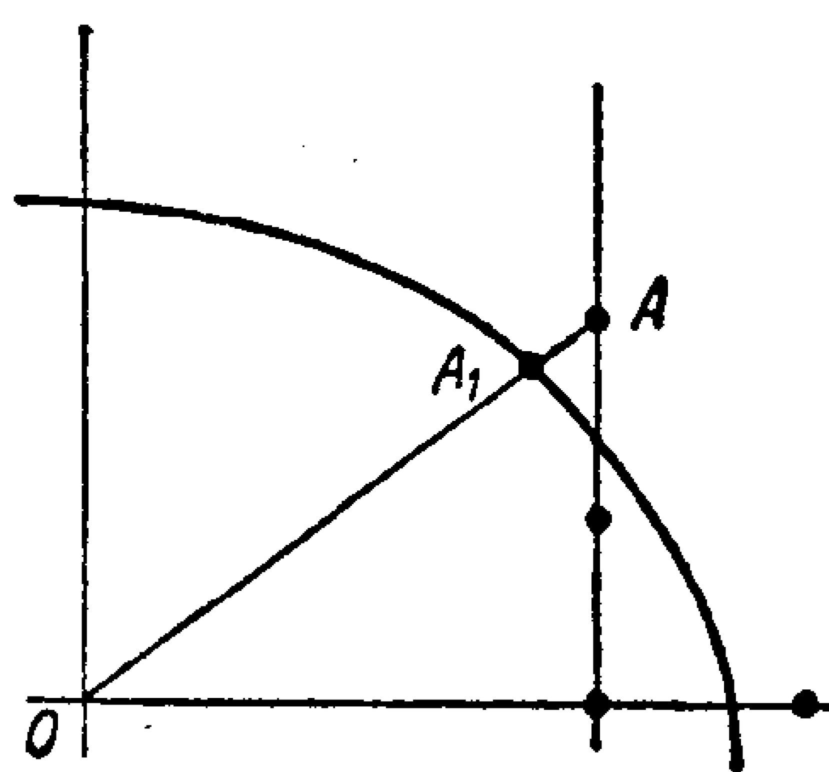


图 276

本题断言在于：对任何一个正数 p，可以指出这样一个数 R，使得对所有的 $r>R$，可以找到一个整点，它到圆心在坐标原点，半径为 r 的圆的距离 $\delta(r)<p$.

我们从和 y 轴平行的直线中挑选出那样的直线，它和半径为 r 的圆有公共点，且到坐标原点 O 的距离取最大的整数(图276). 如果 u 是这条直线到 y 轴的距离，那么

$$u\leqslant r<u+1 \quad (u\text{是整数}). \tag{1}$$

直线和圆的交点包含在属于这个直线上的整点 (u,v)和 $(u,v+1)$之间，这些整点满足不等式

$$u^2+v^2\leqslant r^2<u^2+(v+1)^2 \qquad (v\text{是整数}). \tag{2}$$

将直线上在圆外的与圆最近的整点 A 和坐标原点 O 连接起来. 假设 A_1 是线段 OA和圆的交点. 这时

$$\delta(r)\leqslant AA_1=OA-r=\sqrt{u^2+(v+1)^2}-r=$$
$$=\frac{u^2+(v+1)^2-r^2}{\sqrt{u^2+(v+1)^2}+r}=$$
$$=\frac{2v+1-(r^2-u^2-v^2)}{\sqrt{u^2+(v+1)^2}+r}<\frac{2v+1}{2r}, \tag{3}$$

因为由于不等式（2）的前一半，所以分子中所丢掉的项是非负的，由于不等式(2)的后一半，所以分母中平方根号下的量大于 r^2.

v 和 r 之间的关系可以从不等式(1)和(2)求得:

$$v\leqslant\sqrt{r^2-u^2}=\sqrt{(r-u)(r+u)}<\sqrt{1\cdot(r+r)}=\sqrt{2r}.$$

因此，如果 $r>1$，那么

$$\delta(r)<\frac{2\sqrt{2r}+1}{2r}<\frac{3\sqrt{r}+\sqrt{r}}{2r}=\frac{2}{\sqrt{r}}.$$

这样一来，如果

$$\frac{2}{\sqrt{r}}<p, \quad \text{即 } r>\frac{4}{p^2} \quad \text{和 } r>1,$$

那么 $\delta(r)$必定小于 p，这就是所要证明的.

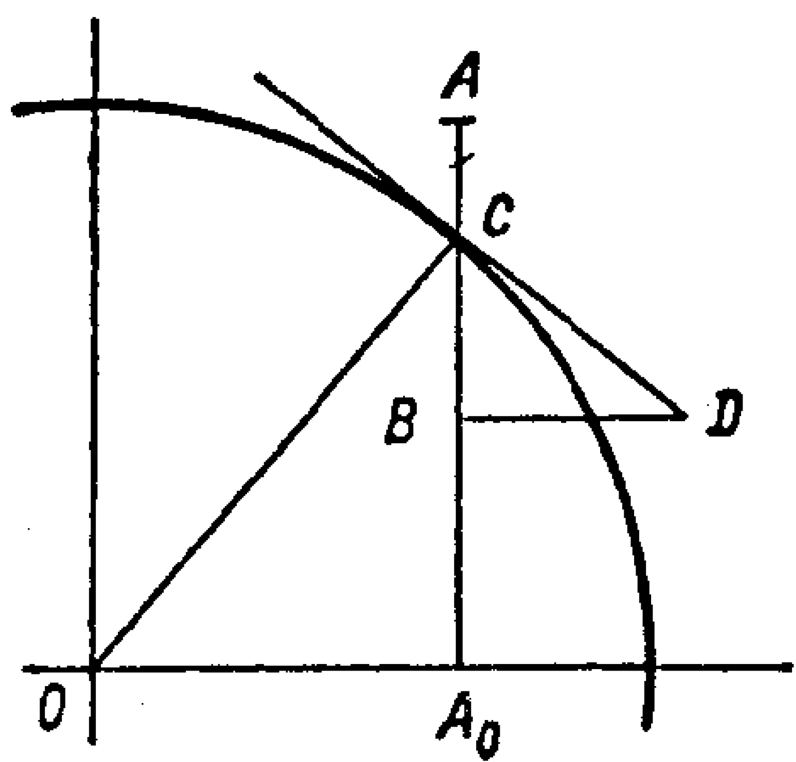


图 277

【证法2】点 A 或者点 B(图277) 到圆的距离可以用不同的方法来计算. 假设 C 是线段 AB 和圆的交点，D 是通过点 C 所作的圆的切线与通过点 B 平行于 x 轴的直线的交点. 点 B 到圆的距离小于线段 BD 的长，因此由 $\triangle BCD$ 和 $\triangle A_0OC$ 相似，我们得到

$$\delta(r)<BD=\frac{BD}{1}=\frac{BD}{AB}<\frac{BD}{BC}=\frac{A_0C}{A_0O}=$$
$$=\frac{\sqrt{r^2-u^2}}{u}<\frac{\sqrt{2r}}{u}<\frac{\sqrt{2r}}{r-1}<\frac{\sqrt{2r}}{r-\frac{r}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}},$$

假若 $r>2$. 因此，如果同时有不等式 $r>2$ 和 $r>8/p^2$成立，那么 $\delta(r)<p$.

【**证法 3**】因为在直线 $x=u$（u 是正整数）上，从一个整点到另一个整点的距离等于 1，所以只要证明：对于任一 $p>0$ 和充分大的数 r，可选取适当的 u，使得直线 $x=u$ 包含在圆心在坐标原点半径为 r 和 $r+p$ 的两个圆之间的线段（例如在第一象限中的这种线段）的长度不小于 1（图278）．事实上，如果这个线段的长度大于或等于 1，那么它至少含有一个整点，它到圆心为坐标原点，半径为 r 的圆的距离小于 p．

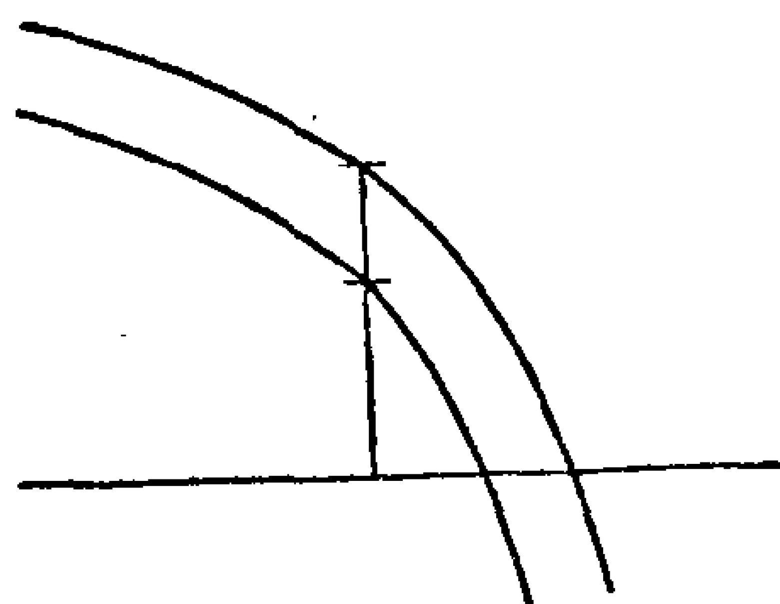


图 278

我们选取这样一个数 u，使有不等式

$$u\leqslant r<u+1.$$

如果 $u+1\leqslant r+p$，那么点 $(u+1,\ 0)$ 在圆心为坐标原点，半径为 $r+p$ 的圆内或圆上．因此，只要研究

$$u\leqslant r<r+p<u+1 \tag{3}$$

的情况就行了．

如果 $p<1$，不等式（3）可能成立．

在直线 $x=u$ 上，包含在圆心在坐标原点，半径为 r 和 $r+p$ 的两圆之间的线段的长 h 可以写成

$$h=\sqrt{(r+p)^2-u^2}-\sqrt{r^2-u^2}=\frac{(r+p)^2-r^2}{\sqrt{(r+p)^2-u^2}+\sqrt{r^2-u^2}}.$$

最后一个等式的右端的分子大于 $2rp$．如果 $r>1$，那么分母的二次根式可以变成下面的样子：

$$\sqrt{(r+p)^2-u^2}=\sqrt{(r+p-u)(r+p+u)}<\sqrt{1(r+1+r)}<\sqrt{3r},$$
$$\sqrt{r^2-u^2}=\sqrt{(r-u)(r+u)}<\sqrt{1\cdot 2r}=\sqrt{2r}.$$

于是

$$h>\frac{2rp}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{r}}=\frac{2p}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\sqrt{r}.$$

这来一来，如果

$$r>\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}{4p^2}=\frac{5+\sqrt{24}}{4}\cdot\frac{1}{p^2},$$

那么 $h>1$．这就证明了本题的断言．

和218题直接有关的是下面的问题：对于任何一个自然数 N，找出这样一个数 $M(N)$，使得在 N 和 $N+M(N)$ 之间，总有整数可以表示成两数的平方和的形式．

仿照证法 1，我们取圆的半径 r 等于 $\sqrt{N}$（即取 $r^2=N$）．设 $n=u^2+(v+1)^2$ 是与 N 最接近的可以表示成两个整数的平方和的形式的整数．这时

$$n-N=u^2+(v+1)^2-r^2<2v+1,$$

又因为 $n-N$ 是整数，所以

$$n-N\leqslant 2v<2\sqrt{2r}=\sqrt{8}\cdot\sqrt[4]{N}.$$

这样一来，在数 N 和 $N+\sqrt{8}\sqrt[4]{N}$ 之间总包含得有这样的整数，它可以表示成两个整数的平方和的形式．

219．在空间中给定 n 个平面（$n\geqslant 5$），其中任何三个平面都有一个公共点，但没有任何三个以上的平面通过一个点．

证明：在这 n 个平面将空间分成的部分中，有不少于$\frac{2n-3}{4}$个四面体.

【证明】为了简单起见，我们把同时属于三个平面的点叫做**顶点**．根据本题条件，n 个给定平面中的任意三个平面确定一个且仅仅一个顶点.

我们还可注意到，n 个给定平面中的任意四个平面确定一个（且仅仅一个）四面体.这个断言的证明我们留给读者去做．当然，由某四个平面确定的四面体可以被其它的平面切开，因此并不是每一个这样的四面体都包含在 n 个给定的平面把空间所划分成的那些部分里.

假设 S 是任何一个给定的平面．它把整个空间分成两个半空间．假设 P 是在同一侧的顶点中最接近 S 而又不属于 S 的顶点，而 S_1, S_2, S_3 是确定顶点 P 的平面．这时，平面 S, S_1, S_2, S_3 从空间中切出一个四面体 T．我们断言：**其它 $n-4$ 个平面中的任何一个平面都不和四面体 T 相交，即 T 是 n 个给定平面将空间划分成的部分中的一个**.

我们假设某个给定的平面 S' 和四面体 T 相交.假设 A, B, C 是四面体 T 的异于顶点 P 的顶点．顶点 A, B, C 属于平面 S．显然平面 S' 和线段 AP, BP, CP 中的某一个相交．例如，假设平面 S' 和线段 AP 相交于点 Q.这时 Q 也是顶点，因为 AP 是异于平面 S' 的两个给定平面的交线，因此点 Q 同时属于三个给定的平面.但是点 Q 到平面 S 的距离比点 P 更近，这与点 P 的选取相矛盾．从而断言获证.

我们的论证可对每一个给定的平面来应用．因此，任何一个给定的平面都确定一个四面体，这个四面体是 n 个给定平面将空间所划分成的一个部分．不仅如此，如果顶点不光是在平面 S 的一侧，而是在 S 的两侧，那么这样的平面确定的不是一个，而是两个四面体，这两个四面体都是给定平面将空间所划成的部分.

我们断言：**在给定的平面中，具有下面性质的平面不多于三个：所有不属于这个平面的顶点分布在它的同一侧**．假设有四个这样的平面 S_1, S_2, S_3, S_4．假设 $ABCD$ 是平面 S_1, S_2, S_3, S_4 所构成的四面体．（平面 S_1 和平面 ABC 重合，平面 S_2 和平面 ABD 重合，平面 S_3 和平面 ACD 重合，平面 S_4 和平面 BCD 重合.）因为 $n\geqslant 5$，所以在给定的平面中，至少有一个不同于 S_1, S_2, S_3, S_4 的平面 S．显然 S 不可能和四面体 $ABCD$ 的所有六个棱同时相交，因此，例如平面 S 和棱 AB 所在的直线相交于线段 AB 之外的点 E.假设点 E 在棱 AB 的延长线上顶点 A 的外面．这时顶点 E 和 B 在平面 S_3（和平面 ACD 重合）的不同的两侧，这和我们早先作的假设相违背（图279）.

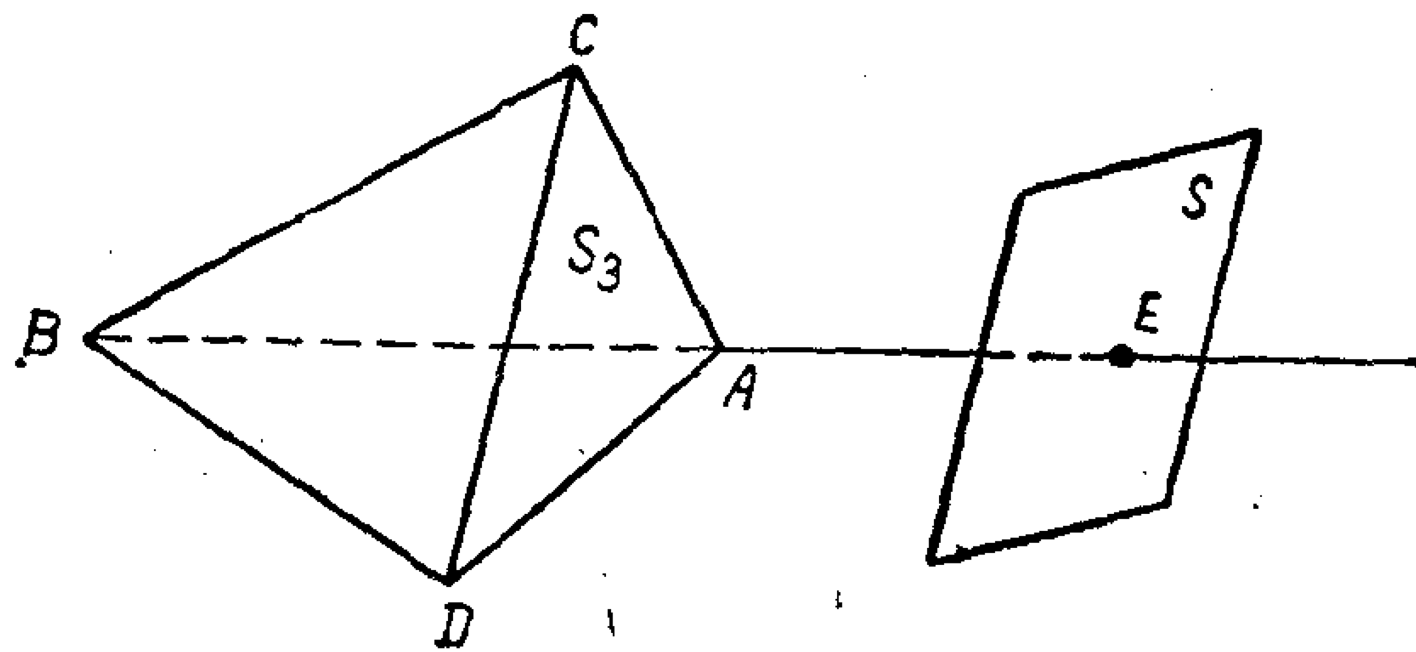


图 279

现在我们来计算 n 个给定的平面将空间划分成的部分中含有多少个四面体.为此，我们来计算位于每一个给定平面上的四面体的个数.前已证明，除了不多于三个的平面以外，在任一给定的平面上的四面体不少于 2 个.而在每一个"例外的"平面上的四面体不少于 1 个．因此，在所有给定平面上的四面体的个数不少于 $2n-3$ 个.但是由于在作这种计算时，每一个四面体算了4次（对每一个界面算了一次），所以四面体的总数不小于 $(2n-3)/4$，这就是所要证明的.

关于219题以及它的可能得到的答案必须注意下面几点：

1） 和四面体相交的平面把这个四面体分成的两个部分不一定都是四面体．如果作一个平面把四面体的不通过一个顶点的两个棱隔开．但又不和这两个棱相交，那么所得到的两个"屋顶"是两个五面体（图280）.

2） 本题断言在平面情形的类比要简单得多：**如果在平面上给定 n 条直线，其中任何两条直线都不平行且任何三条直线都不通过同一点，那么在这些直线把平面划分成的部分中，有不少于（$2n-2$）/3 个三角形．**

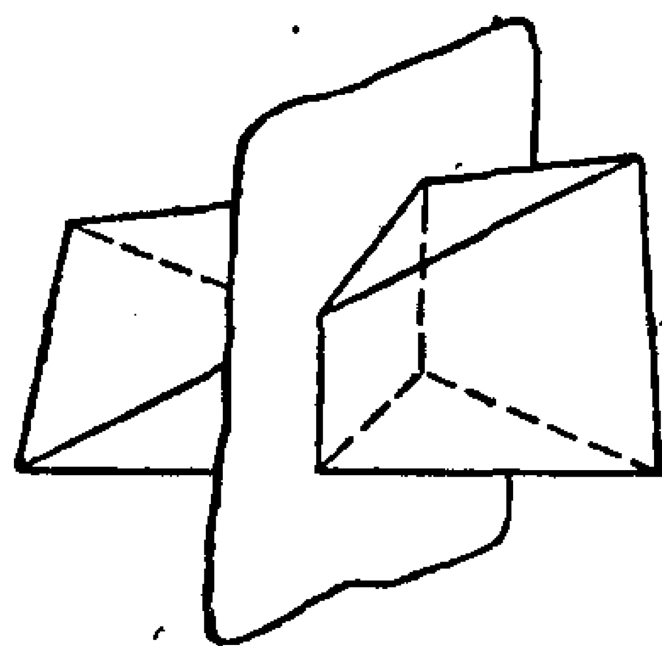


图 280

220． 为了统计到图书馆去的读者人数，挂了两块黑板．每一个读者必需在一块黑板上写上当他进入阅览室时他看见有多少读者，而在另一块黑板上写上当他离开图书馆时，阅览室还剩下多少读者．证明：在一天之内，两块黑板上出现同样的数（可能次序不同）．

【证明】 某读者进入图书馆以后，他以后的去向可以是不同的，而且这一点对本题来说是重要的．首先，他可能发现自己的阅览证忘在家里而立即离开图书馆．显然，在这种情况下，坐在阅览室里的人数不变而且这个健忘的读者在两块黑板上写上相同的数．其次，读者进入图书馆以后，可以在图书馆停留一段时间．在这种情况下，新的读者来了以后，阅览室里的人数增加了．

我们比较详细地研究第二种情况．

如果我们说出一个意见，忠实遵守图书馆的奇怪的规章的读者未必会反对的，这个意见对本题来说，什么也没有改变，但可以简化我们的证明．可以不管读者的个人特征，因为在给定的时刻，哪一个读者进入阅览室，哪一个读者离开阅览室，没有什么不一样．特别是，我们可以认为，从阅览室出来的人总是最后进去的人．

我们研究一个例子．假设我们在一个有涵养的读者的背上用红颜色写上一个大字母 A．进入图书馆时，读者 A 在“入馆黑板”上写上他出现在阅览室时阅览室里有 n 个读者．然后读者 A 坐下并开始工作，而其余的读者继续走来走去．我们假设过了一段时间以后，阅览室里增加了 k 个读者．读者 A 从自己的坐位上站起来并向门口走去，但是图书馆的副馆长挡住他的去路并且坚持请他留下．副馆长建议最后入馆的读者代替 A 离开图书馆，这个读者在“入馆黑板”的最下边写的数是 $n+k$．对本题来说，读者 A 被迫在阅览室待了一整天是无关紧要的．何况馆长知道副馆长擅自乱来后把他免职了．

由于我们所说的关于对读者不加区别的意见以及关于离馆的总是最后进馆的读者的假设，所以所有离馆的读者在“离馆黑板”上所写的数和他们写在“入馆黑板”上的数是一样的．如果从某个时刻开始，没有读者再进馆了，那么离馆的次序和入馆的次序正好相反．无意之中成为擅自乱来的牺牲品（与其说是副馆长的牺牲品，不如说是我们的牺牲品）的疲惫不堪的读者 A 等待着轮到自己出馆．所有的读者这样一个一个地离开图书馆．因此，每一个读者可以和一个数对一一对应．因为由我们带来的改变对本题来说是无关紧要的，所以我们所得到的结果和不加进这种变化的结果是一样的．这样一来，在两块黑板上（“入馆黑板”和“离馆黑板”），一天之内出现同样的数字，尽管次序不同．

221． 给定边长为 1，1/2，1/3，…，$1/n$，…的正方形的无穷序列．证明：存在这样一个正方形，可以把序列中所有的正方形互不重叠地放在这个正方形内，并且确定：能将序列中所有的正方形容纳下的最小正方形的边长等于多少？

【解】 我们将题解分成两部分：首先证明：边长为 1，1/2，1/3，…，$1/n$，…的所有

正方形可以互不重叠地放在边长为1.5的正方形内，然后证明：不能把这些正方形放在边长更小的正方形内而使边长为 1 和 1/2 的正方形互不重叠.

现在来证明：给定的无穷序列所相应的正方形可以互不重叠地放在边长为1.5的正方形内.

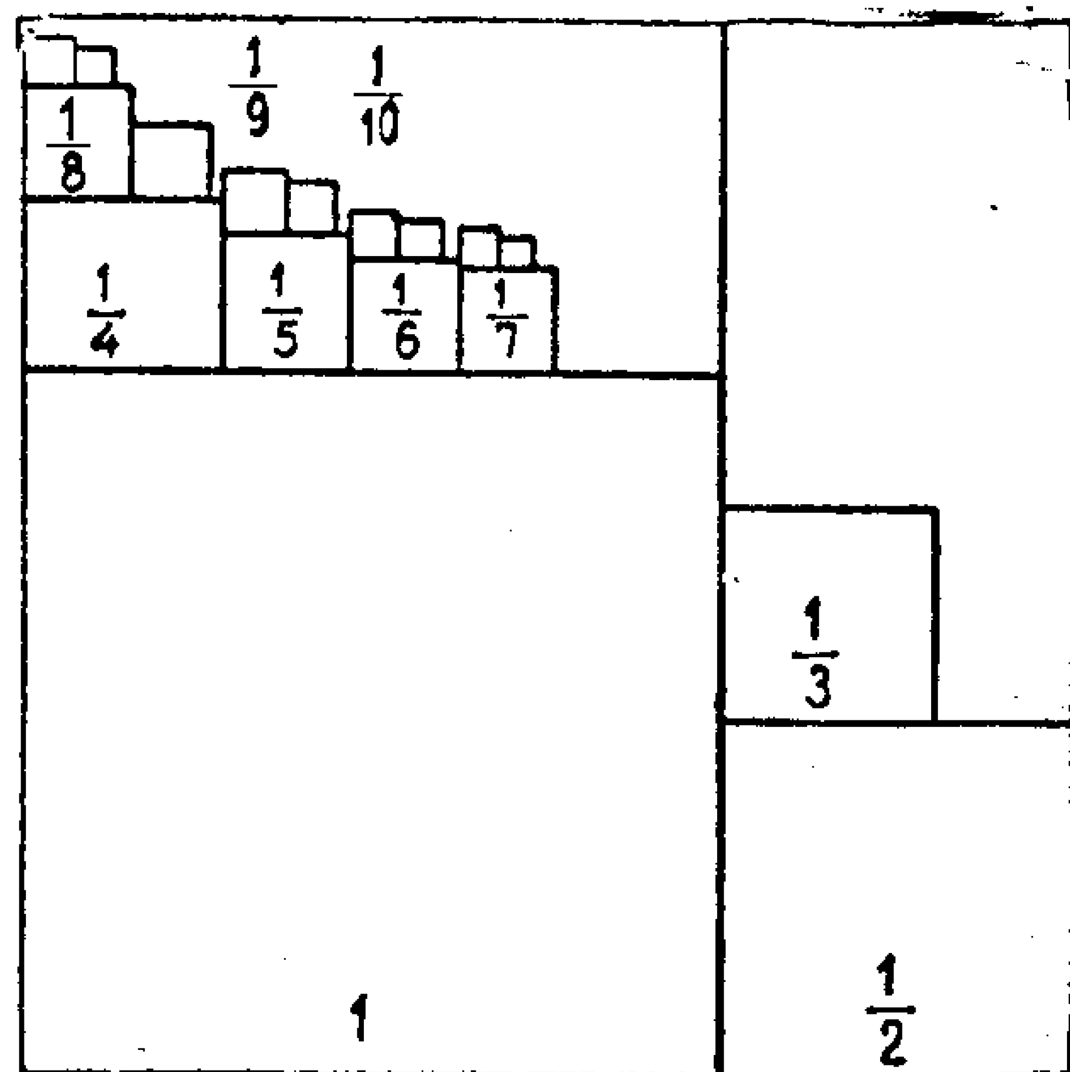


图　281

在边长为 1 的正方形的旁边放边长为1/2的正方形，在它们所构成的角落上放边长为1/3的正方形（图281）. 在单位正方形上面的边上放边长为1/4，1/5，1/6，1/7的正方形. 在边长为$1/k$（$k=4$，5，6，7）的正方形上面并排放边长为$1/2k$和$1/(2k+1)$的正方形. 因而放好了边长为1/8，…，1/15的正方形. 就这样放，下一排放的是边长为1/16，…，1/31的正方形，等等.

边长为$1/k$的正方形的上面"能放下"边长为$1/2k$和$1/(2k+1)$的正方形，因为

$$\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}<2\cdot\frac{1}{2k}=\frac{1}{k}.$$

边长为1/4，1/5，1/6，1/7的正方形不超过单位正方形的"宽"，因为

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}<4\cdot\frac{1}{4}=1.$$

放在单位正方形上面的正方形的"高"之和不超过1/2：

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k}+\frac{1}{8k}\cdots=\frac{2}{k}\leqslant\frac{1}{2}.$$

因此，以给定的无穷序列为边长的所有正方形可以互不重叠地放在边长为1.5的正方形内. 于是，本题断言的第一部分得证.

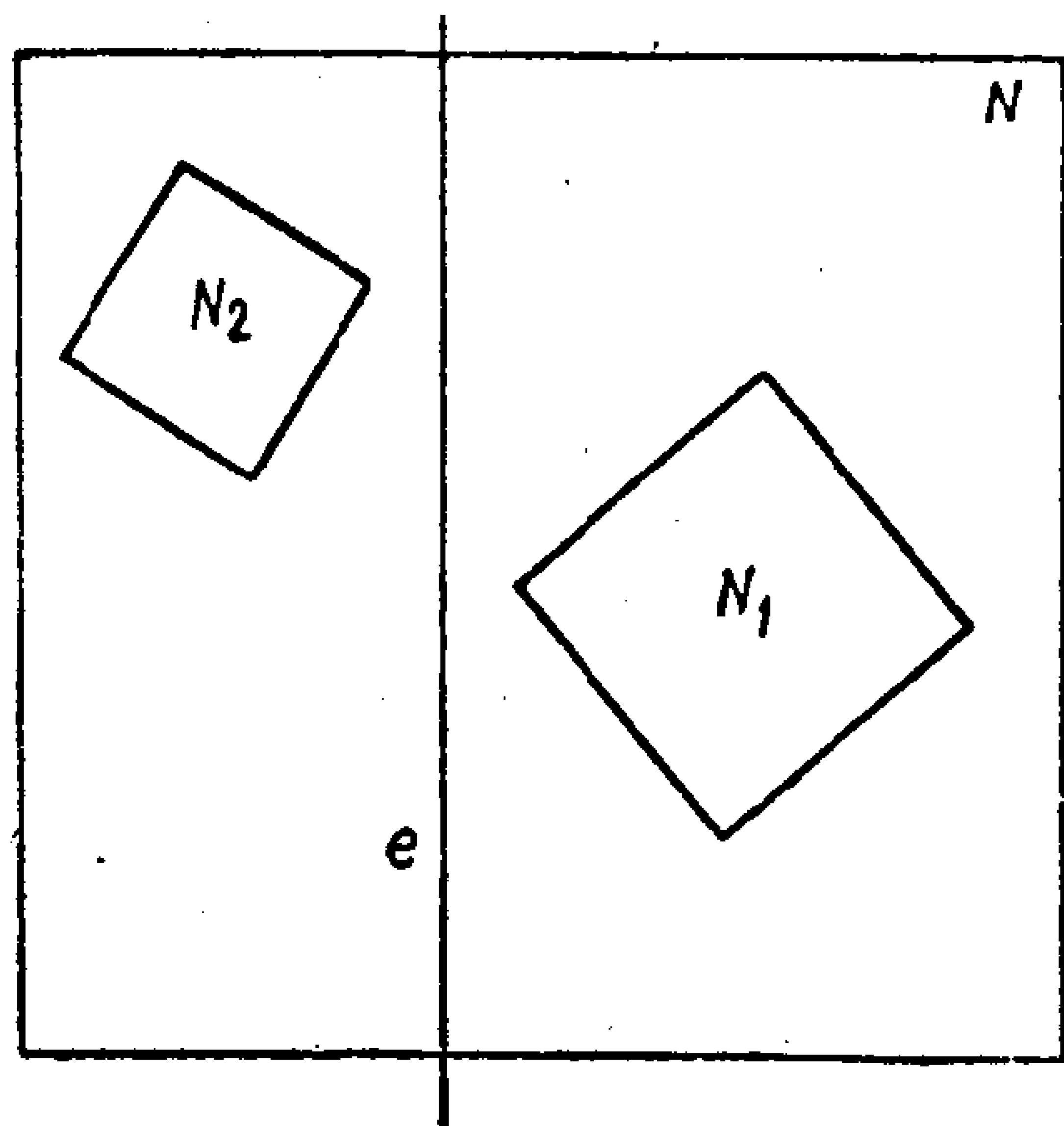


图　282

为了证明本题断言的第二部分，我们把边长为 1 的正方形N_1和边长为1/2的正方形N_2放在某一个正方形N内使正方形N_1和N_2没有公共点（图282）. 这时存在一直线e将正方形N_1和N_2隔开. 如果直线e平行于正方形N的一条边，那么它将正方形分成两个矩形. 这两个矩形和直线e垂直的边不小于这个矩形所包含的正方形的边长. 因此，在这种情况下，正方形N的边长不小于正方形N_1和N_2的边长之和.

如果直线e和正方形N的边不平行（即和正方形N的边或它的延长线相交），那么在e的两侧有一个最远的顶点C_1和C_2（图283）. 由顶点C_1和C_2沿着正方形N的边发出的射线和直线e交成两个直角三角形H_1和H_2，它们包

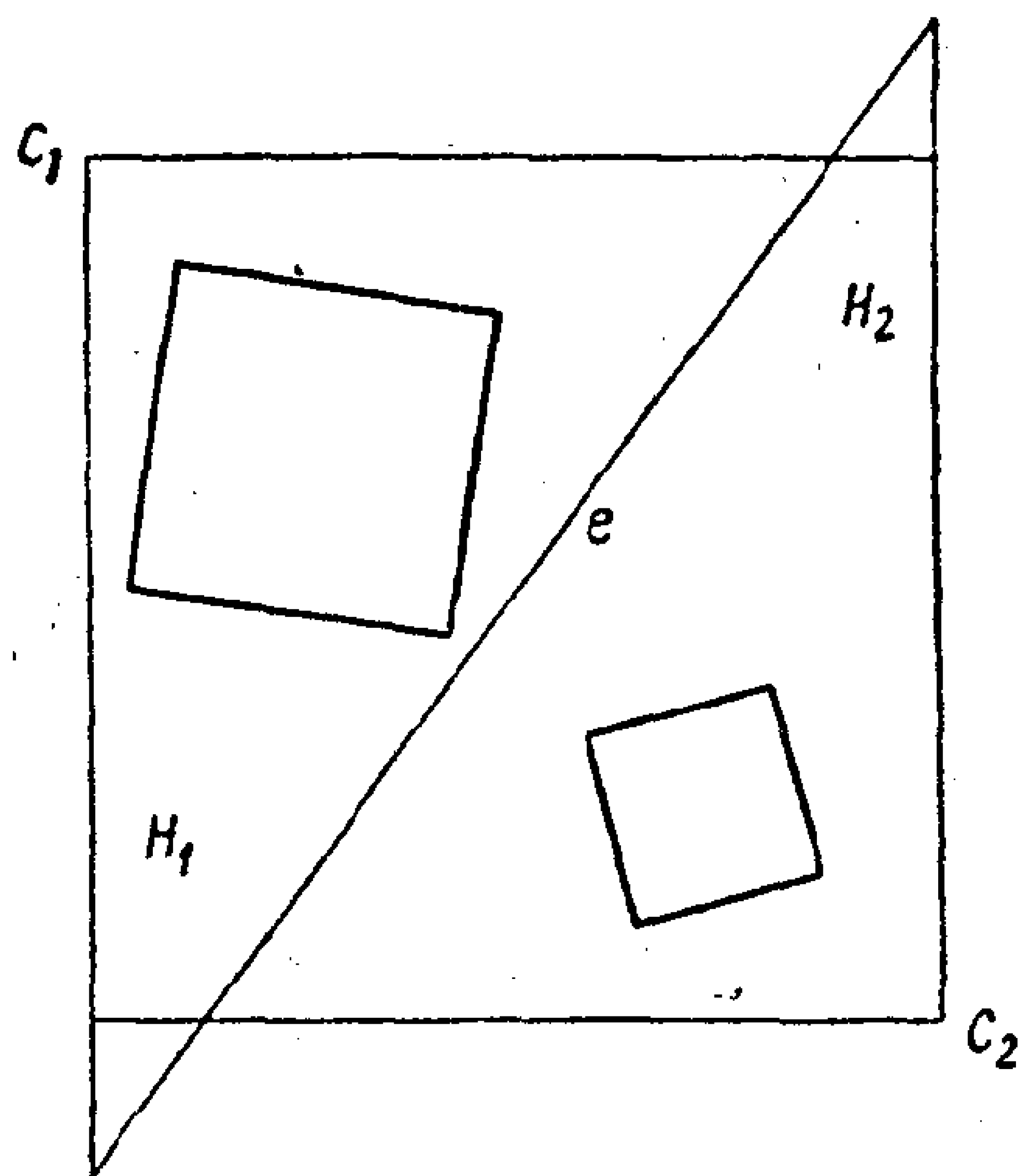


图 283

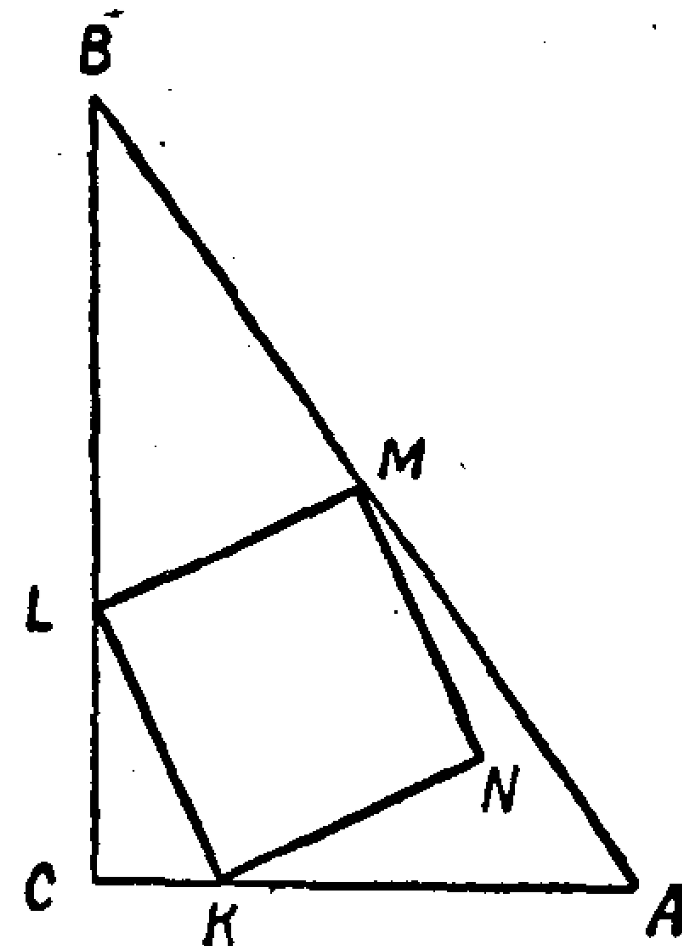


图 284

含了正方形N_1和N_2. 如果能证明下面的引理那么问题的断言就证明了：**包含在给定的直角三角形内的所有正方形中，两条边在直角边上且一个顶点在斜边上的正方形是最大的.**

事实上，如果引理是对的，那么包含在直角三角形H_1和H_2内的最大的正方形N_1和N_2的对角线在正方形N的对角线C_1C_2上，又因为正方形N_1和N_2不重叠，所以它们的对角线之和等于正方形N的对角线，它们的边之和等于正方形N的边，由此推出本题断言的第二部分.

现在，我们证明关于直角三角形内的最大正方形的引理.

包含在直角三角形ABC内的正方形$KLMN$（图284）可以这样移动，使正方形的顶点K和L落在直角边AC和BC上，而顶点M落在斜边BA上（在必要的时候，将原正方形$KLMN$关于直角三角形的顶点C作相似系数大于1的同位相似变换）. 如果正方形$KLMN$按我们所说的方式分布在直角三角形ABC内，那么正方形的中心在直角的平分线上. 事实上，将正方形绕中心旋转90°，那么属于边BC的顶点L和属于边AC的顶点K重合. 因为这时边BC变到AC，所以正方形的中心到AC与BC是等距离的，因而中心在直角$\angle ACB$的平分线上.

在所有那些一个顶点和直角顶点C重合的正方形中，这个顶点C和相对的顶点之间的距离不小于（等于）线段CP的长，这里P是直角的平分线和边MN的交点. 因此，只要证明：若正方形的顶点K和L都不和直角顶点C重合，那么$CP>KM$.

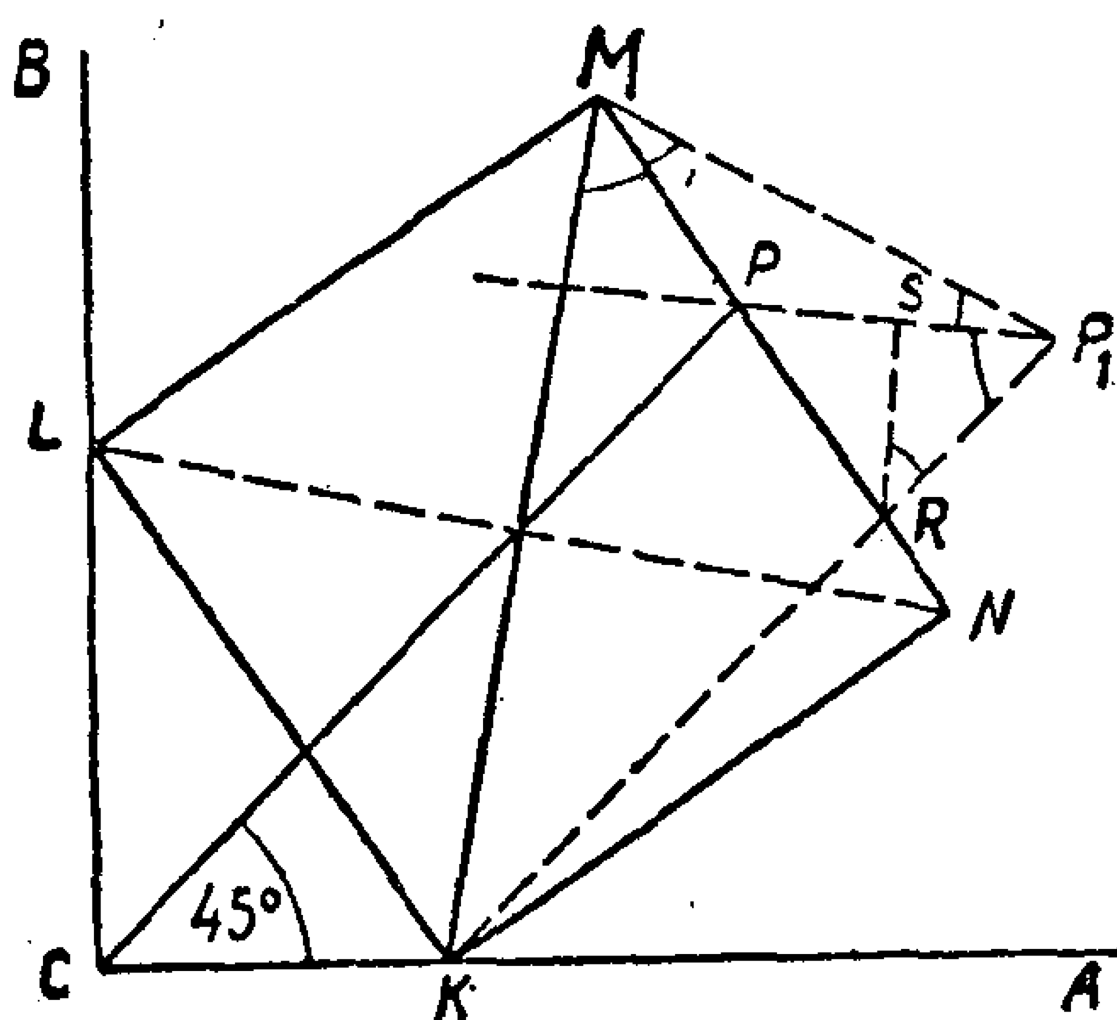


图 285

将线段CP平行移动到KP_1的位置（图285）. 问题化为比较$\triangle KP_1M$的边. 我们研究这个三角形的角. 边KM所对的$\angle KP_1M$和边

KP_1所对的$\angle KMP_1$大于$45°$.

假设 R 是线段 KP_1 和 MN 的交点，S 是由点 R 到线段 PP_1 的垂线的垂足．$\triangle P_1RS$ 是等腰直角三角形．此外，点 S 在直线 PP_1 上的点 P 和 P_1 之间．因此

$$\angle PRP_1 > \angle SRP_1 = \angle PP_1R,$$

由此得到

$$PP_1 > PR.$$

因为 $KR \parallel CP$，所以由 CP 将线段 KM 分成两等分，从而也将线段 MR 分成两等分，因此

$$MP = PR < PP_1 \quad 和 \quad \angle MP_1P < \angle PMP_1.$$

同时，我们得到不等式

$$\angle MP_1K = \angle MP_1P + 45° < \angle PMP_1 + 45° = \angle KMP_1,$$

由此推出所要证明的不等式

$$KM < KP_1 = CP.$$

注❶．下面我们用较简单的办法来证明 $CP > KM$.

由于$\angle PCK = \angle PMK = 45°$，所以 P、M、C、K 四点共圆．设圆心为 Q．假若 CP 和 KM 的交点为 O，那么 $QO \perp KM$，因为 O 是 KM 的中点．显然 Q 到 CP 的距离小于 QO．我们知道，在同一个圆内，弦心距小的弦比弦心距大的弦要长，所以 $CP > KM$.

222．证明：对所有的整数 $k \geqslant 1$ 和实数 x，有不等式

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^j \frac{x^j}{j!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} \geqslant 0.$$

【证法 1】我们用 $P_{2k}(x)$ 表示所要证明的不等式左边的多项式．我们来证明更强的不等式，即对所有的实数 x，有不等式

$$P_{2k}(x) > 0.$$

如果 x 取负值或为零，那么 $P_{2k}(x)$ 的任何一项都是非负的，而常数项等于 1．因此，当 $x \leqslant 0$ 时，多项式 $P_{2k}(x)$ 满足不等式 $P_{2k}(x) \geqslant 1$．不难看出，当 $x \geqslant 2k$ 时，$P_{2k}(x)$ 也满足同样的不等式．事实上，当 $x \geqslant 2k$ 时，$P_{2k}(x)$ 的项可以组合，使得所得到的和的所有被加项都是非负的：

$$P_{2k}(x) = 1 + \frac{x}{2!}(x-2) + \frac{x^3}{4!}(x-4) + \cdots + \frac{x^{2k-1}}{(2k)!}(x-2k) \geqslant 1.$$

在闭区间 $[0, 2k]$ 上，多项式 $P_{2k}(x)$ 是连续函数，因而达到它的最小值．

如果 $P_{2k}(x)$ 在区间 $[0, 2k]$ 的一个端点达到最小值，那么根据上面所证明的，这个值是 因此对于区间 $[0, 2k]$ 的所有其它的 x 值，多项式 $P_{2k}(x)$ 都取正值．

如果 $P_{2k}(x)$ 在区间 $[0, 2k]$ 的某一个内点 x_0 达到最小值，那么对于点 x_0 的某个邻域中的 有不等式 $P_{2k}(x) > P_{2k}(x_0)$．因此，多项式 $P_{2k}(x)$ 在点 x_0 的导数为 0：

$$P'_{2k}(x_0) = -1 + x_0 - \frac{x_0^2}{2!} + \cdots + \frac{x_0^{2k-1}}{(2k-1)!} = \frac{x_0^{2k}}{(2k)!} - P_{2k}(x_0) = 0.$$

因为

$$P_{2k}(x_0) = \frac{x_0^{2k}}{(2k)!} > 0,$$

中译者所加.

所以多项式 $P_{2k}(x)$ 在整个 x 轴上都是正的，这就是所要证明的.

【证法 2】 将 $P_{2k}(x)$ 乘以

$$P_{2k}(-x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

当 $j\leqslant 2k$ 时，在乘积 $P_{2k}(x)\cdot P_{2k}(-x)$ 中，x^j 的系数等于

$$1\cdot\frac{1}{j!}-1\cdot\frac{1}{(j-1)!}+\frac{1}{2!}\frac{1}{(j-2)!}+\cdots+(-1)^j\frac{1}{j!}\cdot 1=$$

$$=\frac{1}{j!}\left(C_j^0-C_j^1+C_j^2-\cdots+(-1)^jC_j^j\right)=0,$$

当 $2k+1\leqslant j\leqslant 4k$ 时，x^j 的系数等于

$$(-1)^{j-2k}\frac{1}{(j-2k)!}\cdot\frac{1}{(2k)!}+(-1)^{j-2k+1}\frac{1}{(j-2k+1)!}\cdot\frac{1}{(2k-1)!}+$$

$$+\cdots+(-1)^{2k}\frac{1}{(2k)!}\cdot\frac{1}{(j-2k)!}=$$

$$=\frac{1}{j!}\left[(-1)^{j-2k}C_j^{j-2k}+(-1)^{j-2k+1}C_j^{j-2k+1}+\cdots+(-1)^{2k}C_j^{2k}\right].$$

我们研究方括弧中的表达式. 与两端等远的项其绝对值相等. 因此，当 j 是奇数的时候，整个表达式变为 0. 这样一来，对于满足不等式 $2k+1\leqslant j\leqslant 4k$ 的奇数 j，x^j 的系数为 0. 当 j 为偶数时，方括弧中的表达式是交替变号的二项式系数的和，它可以从所有 j 阶的交替变号的二项式系数的和中去掉前 $(j-2k)$ 项的和

$$C_j^0-C_j^1+C_j^2-C_j^3+\cdots+(-1)^{j-2k-1}C_j^{j-2k-1}$$

以及与此相等的最后 $(j-2k)$ 项的和来得到. 所去掉的项的和是负的，因为项的总个数是偶数且小于 $j/2$，二项式系数将随着它的上面的附标的增加而增加，而且它们的符号是交替改变的. 因此，方括弧中的表达式是正的，因为它加上所去掉的前 $(j-2k)$ 项之和的二倍等于0，而前 $(j-2k)$ 项之和是负的.

这样一来，多项式的乘积 $P_{2k}(x)\times p_{2k}(-x)$ 仅包含带有正系数的 x 的偶次幂，因而在整个数轴上取正值. 如果 $x\geqslant 0$，那么因子 $P_{2k}(-x)>0$. 因为对所有的 x，$P_{2k}(x)P_{2k}(-x)>0$，所以当 $x\geqslant 0$ 时，$P_{2k}(x)>0$. 当 $x<0$ 时，不等式 $P_{2k}(x)>0$ 显然成立（因为 $P_{2k}(x)$ 中 x 的偶次幂的系数为正，奇次幂的系数为负）. 因此，$P_{2k}(x)$ 和 $P_{2k}(-x)$ 在整个数轴上仅取正值，这就是所要证明的.

不难证明

$$C_j^0-C_j^1+C_j^2+\cdots+(-1)^lC_j^l=(-1)^lC_{j-1}^l.$$

因此

$$P_{2k}(x)P_{2k}(-x)=1+\frac{x^{2k+2}}{(2k)!(k+1)}+\frac{x^{2k+4}}{(2k)!3!(k+2)}+$$

$$+\frac{x^{2k+6}}{(2k)!5!(k+3)}+\cdots+\frac{x^{4k}}{[(2k)!]^2}.$$